VYBRANÁ ROZDĚLENÍ DISKRÉTNÍ NÁH. VELIČINY

Martina Litschmannová

Opakování
Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

- Co je to náhodná veličina (dále NV)?

  Číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu.

- Jaké základní typy náhodných veličin známe?

  Diskrétní NV (dále DNV) a spojité NV (dále SNV).

- Co je to rozdělení pravděpodobnosti?

  Předpis, který jednoznačně určuje všechny pravděpodobnosti typu $P(X \in M)$, kde $M \subset \mathbb{R}$ (tj. $P(X = a)$, $P(X < a)$, $P(X > a)$, $P(a < X < b)$, ..., kde $a, b \in \mathbb{R}$).

Opakování
Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

- Jak lze popsat rozdělení pravděpodobnosti DNV?

  Distribuční funkcí $F(x) = P(X < x)$, resp. pravděpodobnostní funkcí $P(x_i)$.

- Jak lze popsat rozdělení pravděpodobnosti SNV?

  Distribuční funkcí $F(x) = P(X < x)$, resp. hustotou pravděpodobností $f(x)$.

- Jaké základní číselné charakteristiky používáme pro popis NV?

  Střední hodnota $E(X)$, rozptyl $D(X)$, směrodatná odchylka $\sigma(X)$, p-kvantily x_p.

Opakování
Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

- Co nám říká čebyševova nerovnost?

$$\forall k > 0: \; P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$$

Např.: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) > 0$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) > 0{,}75$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) > 0{,}89$$

Diskrétní náhodná veličina
Příklady

Technika:

— počet šroubů typu M10 mezi 10 vybranými (víme-li, že do dodávky 100 šroubů bylo omylem zařazeno 20 šroubů typu M50)

Biomedicína:

— počet pacientů (z 10 očkovaných) u nichž byla použita prošlá očkovací látka (víme-li, že v balení bylo 20 dávek očkovací látky, přičemž 5 z nich bylo prošlých)

Obecně:

— počet úspěchů v n (závislých) pokusech

Diskrétní náhodná veličina
Příklady

Technika:

— počet správně přenesených bitů předtím než dojde ke 4. chybě (víme-li, že pravděpodobnost chybného přenosu bitu je 0,12)

Biomedicína:

— počet dobrovolníků, které budeme muset testovat dříve než najdeme 5 dárců s krevní skupinou AB (předpokládejme, že dobrovolníci neznají svou krevní skupinu, pravděpodobnost výskytu krevní skupiny (populační frekvence) krevní skupiny AB je 0,05)

Obecně:

— počet (nezávislých) pokusů do k. úspěchů

Diskrétní náhodná veličina
Příklady

Technika:

— počet škrábanců na 1 m^2 lakovaného povrchu (víme-li, že průměrně lze očekávat 3 škrábance na 10 m^2)

Biomedicína:

— počet červených krvinek v 10 ml krve ženy (víme-li, že u průměrně lze pozorovat $4{,}8 \cdot 10^{12}$ červených krvinek v 1l krve (u žen))

Obecně:

— počet událostí v časovém intervalu, na ploše, v objemu

Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- Alternativní rozdělení
- Hypergeometrické rozdělení
- Binomické rozdělení
- Negativně binomické rozdělení
- Geometrické rozdělení
- Poissonovo rozdělení

Alternativní rozdělení

- nastane-li sledovaný náhodný jev A (budeme říkat, že došlo k výskytu události, resp. že došlo k úspěchu), bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 1$, nenastane-li jev A, bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 0$.

X ... počet výskytů daného náhodného jevu (úspěchů) v jednom pokusu

$$X \sim A(\pi)$$

pravděpodobnost úspěchu
(parametr rozdělení)

Pravděpodobnostní funkce:
$P(X = 1) = \pi$
$P(X = 0) = 1 - \pi$

Střední hodnota: $E(X) = \pi$
Rozptyl: $D(X) = \pi(1 - \pi)$
(dokažte!)

Bernoulliho pokusy

Posloupnost nezávislých pokusů majících pouze dva možné výsledky

(tj. takových pokusů, kdy úspěch v libovolné skupině pokusů neovlivňuje pravděpodobnost úspěchu v pokusu, který do této skupiny nepatří),

v nichž jev A (úspěch) nastává s pravděpodobností π
a neúspěch s pravděpodobností $1 - \pi$.

1

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je

a) je právě jedna dívka?

Binomické rozdělení

$\boxed{X \ \ldots \text{ počet úspěchů v } n \text{ Bernoulliho pokusech}}$

$$X \sim Bi(n; \pi)$$

pravděpodobnost úspěchu

počet pokusů

Počet příznivých realizací posloupnosti Bernoulliho pokusů.

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \binom{n}{k} \underbrace{\pi^k (1 - \pi)^{n-k}}$

Pravděpodobnost výskytu jedné příznivé realizace posloupnosti Bernoulliho pokusů.

1

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je

a) je právě jedna dívka?

b) jsou méně než dvě dívky?

c) je více než jedna dívka?

Binomické rozdělení

X … počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

$$X \longrightarrow Bi(n;\pi)$$

počet pokusů

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X=k)=\binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}$

Střední hodnota: $E(X)=n\pi$

Rozptyl: $D(X)=n\pi(1-\pi)$

(dokažte!)

Binomické rozdělení

X … počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

$$X \longrightarrow Bi(n;\pi)$$

počet pokusů

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}$

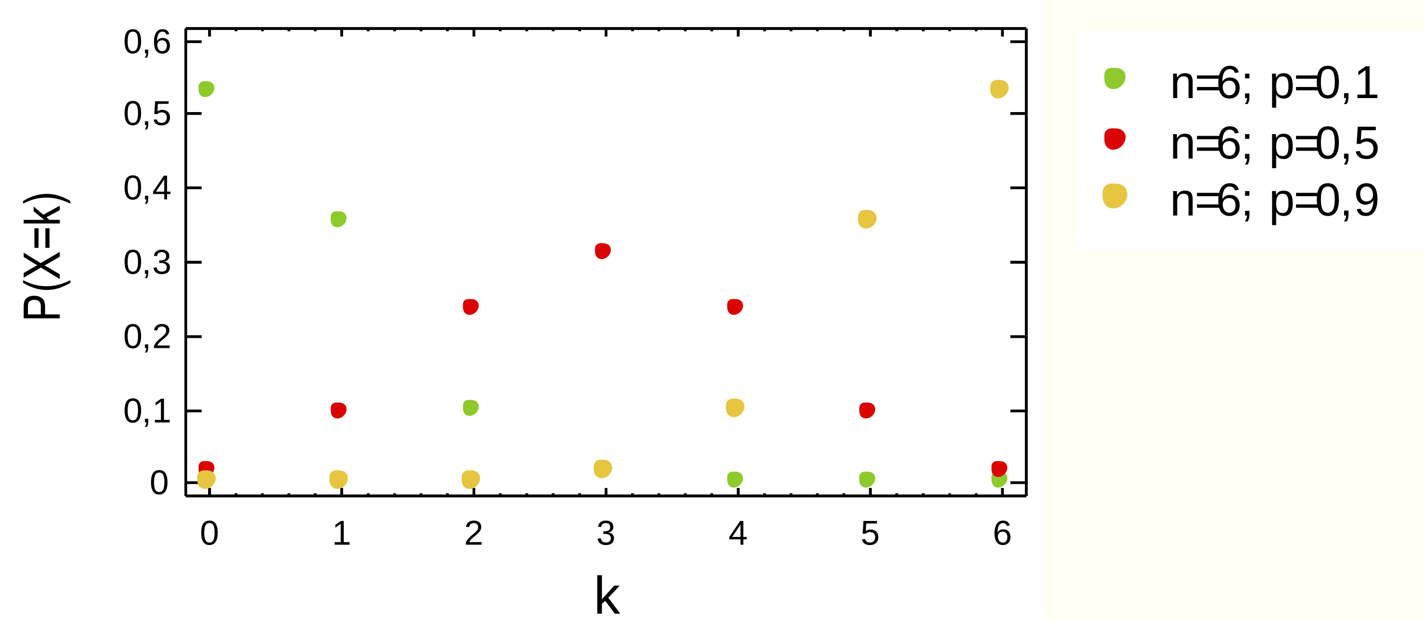
Střední hodnota: $E(X) = n\pi$

Rozptyl: $D(X) = n\pi(1-\pi)$

Příklady: počet chlapců mezi 10 000 novorozenci, počet vadných výrobků mezi 30 testovanými, počet nevzrostlých rostlin ze 100 zasazených cibulek…

Binomické rozdělení - vlastnosti

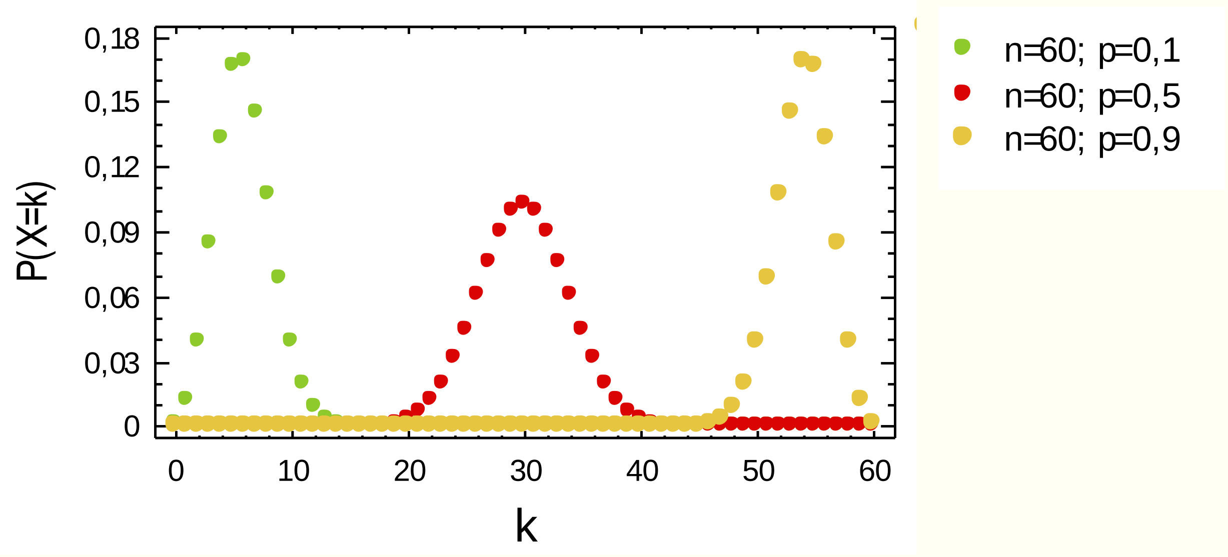
X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech



- $\pi < 0{,}5, \text{malé } n$ ⇒ poz. zešikmené r.
- $\pi = 0{,}5$ ⇒ symetrické r.
- $\pi < 0{,}5, \text{malé } n$ ⇒ neg. zešikmené r.

Binomické rozdělení - vlastnosti

X … počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech



- $\pi < 0{,}5$, malé n $\Rightarrow$ poz. zešikmené r.
- $\pi = 0{,}5$ $\Rightarrow$ symetrické r.
- $\pi < 0{,}5$, malé n $\Rightarrow$ neg. zešikmené r.

- $\pi \neq 0{,}5$, s rostoucím n se rozdělení stává více a více symetrickým

2

Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 vajec, bude 8 z nich prasklých?

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru $\boldsymbol{N}$ prvků je $\boldsymbol{M}$ prvků s danou vlastností a zbylých $(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru $\boldsymbol{n}$ prvků, z nichž žádný nevracíme zpět.

X … počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

rozsah základního souboru

počet prvků s danou vlastností

rozsah výběru

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru $\boldsymbol{N}$ prvků je $\boldsymbol{M}$ prvků s danou vlastností a zbylých $(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru $\boldsymbol{n}$ prvků, z nichž žádný nevracíme zpět.

$\boxed{X \text{ ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru } n \text{ prvků}}$

$$X \sim H(N; M; n)$$

Počet příznivých možností, tj. počet možností jak vybrat k prvků s danou vlastností z M a zároveň $(n-k)$ prvků, které uvedenou vlastnost nemají z $(N-M)$ prvků.

Pravděpodobnostní funkce: $P(X=k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Počet všech možností, jak vybrat n prvků z N (nezáleží na pořadí).

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru $\boldsymbol{N}$ prvků je $\boldsymbol{M}$ prvků s danou vlastností a zbylých $(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru $\boldsymbol{n}$ prvků, z nichž žádný nevracíme zpět.

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Střední hodnota: $E(X)=n\cdot\frac{M}{N}$

Rozptyl: $D(X)=n\cdot\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru $\boldsymbol{N}$ prvků je $\boldsymbol{M}$ prvků s danou vlastností a zbylých $(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{M})$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru $\boldsymbol{n}$ prvků, z nichž žádný nevracíme zpět.

X … počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Střední hodnota: $E(X)=n\cdot\dfrac{M}{N}$

Rozptyl: $D(X)=n\cdot\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

Příklady: počet vadných výrobků mezi 10 vybranými z dodávky 30 výrobků, mezi nimiž bylo 7 vadných, počet dívek v náhodně vybrané skupině 4 dětí ze třídy, v níž je 6 chlapců a 8 dívek, …

Hypergeometrické rozdělení - možnost aproximace

Je-li n/N, tzv. **výběrový poměr,** menší než 0,05, lze hypergeometrické rozdělení nahradit binomickým s parametry n a M/N.

$$\left(\frac{n}{N} < 0{,}05\right) \Rightarrow \left[H(N;M;n) \approx Bi\left(n;\frac{M}{N}\right)\right]$$

Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

$\boxed{X \text{ ... počet Bernoulliho pokusů do } k. \text{ výskytu události (úspěchu), včetně } k. \text{ výskytu}}$

$$X \sim NB(k;\ \pi)$$

požadovaný počet úspěchů (výskytů události)

pravděpodobnost úspěchu

Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

X … počet Bernoulliho pokusů do k. výskytu události (úspěchu), včetně k. výskytu

$$X \sim NB(k;\ \pi)$$

požadovaný počet úspěchů (výskytů události)

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce:

$$P(X = n) = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}\pi^{k-1}(1-\pi)^{((n-1)-(k-1))}}_{\text{pravděpodobnost } k-1 \text{ úspěchů v } n-1 \text{ Bernoulliho pokusech}} \cdot \underbrace{\pi}_{\text{pravděpodobnost } k. \text{ úspěchu}}$$

pravděpodobnost k. úspěchu

pravděpodobnost $k-1$ úspěchů
v $n-1$ Bernoulliho pokusech

Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

X … počet Bernoulliho pokusů do k. výskytu události (úspěchu), včetně k. výskytu

$$X \sim NB(k;\, \pi)$$

požadovaný počet úspěchů (výskytů události)

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} \pi^{k-1} (1-\pi)^{(n-k)} \cdot \pi$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{k}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{k(1-\pi)}{\pi^2}$

Příklady: počet dárců neznajících svou krevní skupinu, které musíte testovat proto, abyste našli 4 dárce s krevní skupinou 0, počet cestujících, které musí revizor zkontrolovat do chvíle, než najde 10 černých pasažérů, …

Dle http://ksicht.natur.cuni.cz/serialy/detektivni-chemie/3 je pravděpodobnost výskytu krevní skupiny A+ 35%. V polní nemocnici nutně potřebují najít 3 dárce krve s touto krevní skupinou. Potenciálních dárců je dostatek, nikdo z nich však nezná svou krevní skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+, budeme muset postupně vyšetřit více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců?

Řešení:

X … počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+

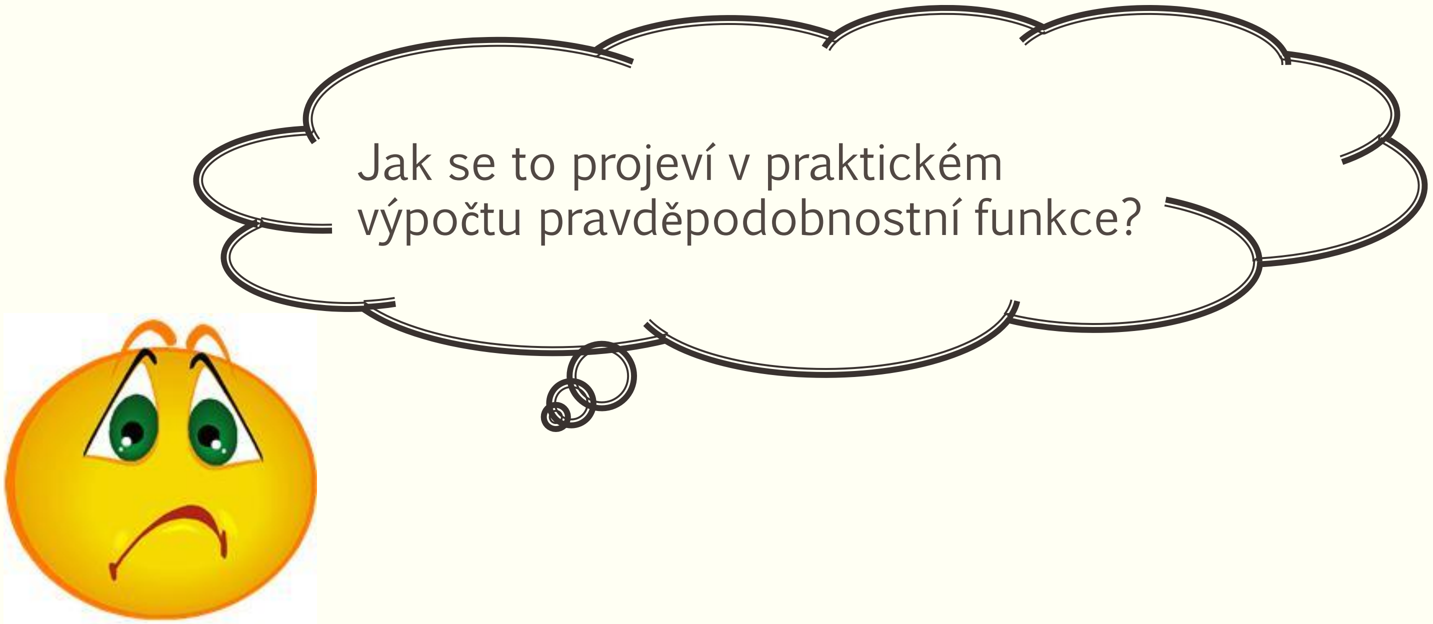
$X \to NB(k = 3; \pi = 0{,}35)$

$$P(7 < X < 12) = \sum_{n=8}^{11} \binom{n-1}{2} 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^{n-3} \cong 0{,}332$$

Pro výpočet lze použít applet Vybraná rozdělení pravděpodobnosti.

POZOR!!!

V případě negativně binomické náhodné veličiny není definice ustálená. Někteří statistici (popř. statistický software) ji definují jako počet neúspěchů před k. úspěchem.



Geometrické rozdělení

- Geometrické rozdělení je speciálním typem negativně binomického rozdělení pro $k = 1$.

X ... počet Bernoulliho pokusů do **prvního** výskytu události (úspěchu), včetně.

$$X \sim Ge(\pi)$$

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \pi(1 - \pi)^{n-1}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{(1-\pi)}{\pi^2}$

Geometrické rozdělení

- Geometrické rozdělení je speciálním typem negativně binomického rozdělení pro $k = 1$.

X … počet Bernoulliho pokusů do prvního výskytu události (úspěchu), včetně.

$$X \sim Ge(\pi)$$

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \pi(1 - \pi)^{n-1}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{(1-\pi)}{\pi^2}$

Příklady: počet volání nutných k tomu, abychom se dovolali do televizní soutěže, počet řidičů, kteří podstoupí test na obsah alkoholu v krvi do doby, než bude nalezen první podnapilý řidič, …

Poissonův proces

Bodový proces

- Sledujeme chod procesu, v němž čas od času dochází k nějaké význačné události.

- Registrujeme počet událostí $N(s;t)$ v časovém intervalu $\langle s; s+t \rangle$

Jako **Poissonův proces** označujeme proces, který je:

- ordinární – tj. pravděpodobnost výskytu více než jedné události v limitně krátkém časovém intervalu $(t \longrightarrow 0)$ je nulová. (tzv. **řídké jevy**),
- stacionární – tj. rychlost výskytu událostí λ je konstantní v průběhu celého sledovaného intervalu,
- beznásledný – tj. pravděpodobnost výskytu události není závislá na čase, který uplynul od minulé události.

Poissonův proces

- Rychlost výskytu události λ je parametrem Poissonova procesu.
- Poissonův proces lze obdobně jako v časovém intervalu definovat na libovolné uzavřené prostorové oblasti (na ploše, v objemu).

Poissonovo rozdělení

- Definujme si náhodný pokus jako Poissonův proces (nezávislé události probíhající v čase t, s rychlostí výskytu λ; popř. nezávislé události objevující se na ploše t, resp. v objemu t s hustotou výskytu λ). Pak

X … počet výskytu události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)

$$X \sim Po(\lambda t)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

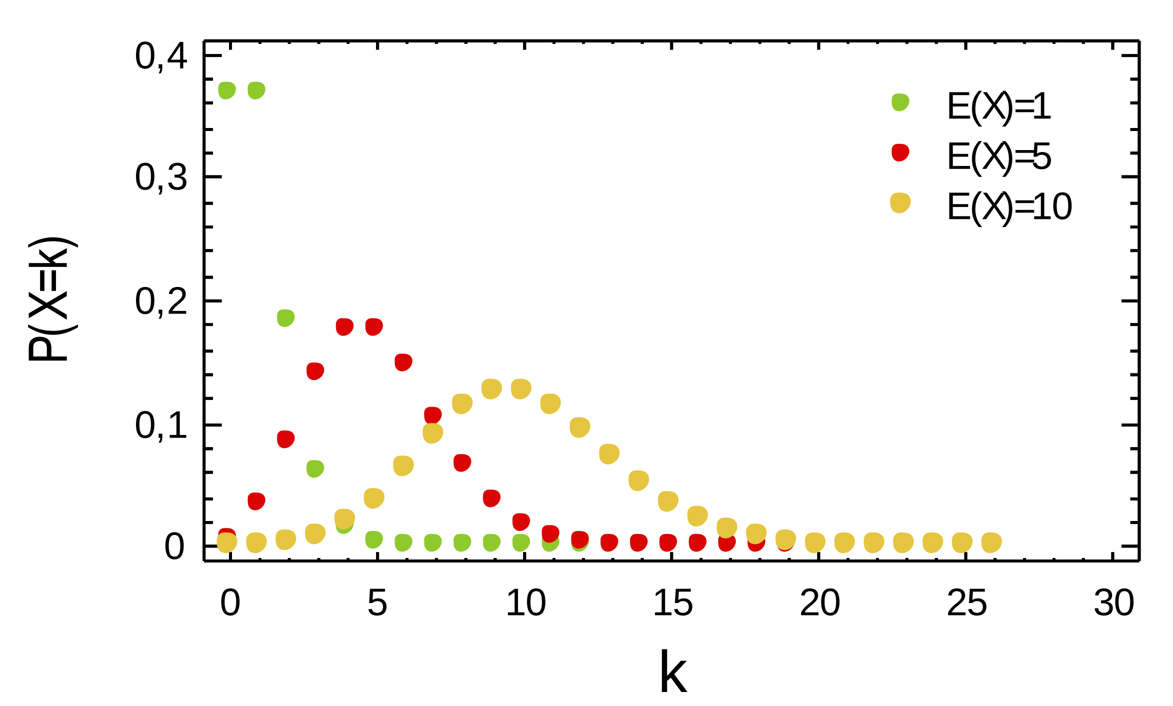
Střední hodnota, rozptyl: $E(X) = D(X) = \lambda t$

<u>Příklady</u>: počet pacientů ošetřených během dopoledních ordinačních hodin, počet mikrodefektů na zadaném vzorku materiálu, počet mikroorganismů v 1 dl vody, …

Poissonovo rozdělení - $Po(\lambda t)$

X ... počet výskytu události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)

$$X \sim Po(\lambda t)$$



Aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým

Poissonovým rozdělením lze velmi dobře aproximovat binomické rozdělení pro případ, že počet pokusů n je dostatečně velký $(n > 30)$ a pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) je dostatečně malá $(\pi < 0{,}1)$. V takovém případě je $\lambda t = n\pi$.

$$(n > 30 \ \wedge \ \pi < 0{,}1) \Rightarrow Bi(n, \pi) \approx Po(n\pi)$$

Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna

a) právě jeden hovor?

b) alespoň dva hovory?

Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny - přehled

Popis	Podmínky		Název náhodné veličiny - symbolický zápis
počet úspěchů v n pokusech	nezávislé pokusy	$k=1$	**Alternativní** - $A(\pi)$
			Binomická - $Bi(n,\pi)$
	závislé pokusy		**Hypergeometrická** - $H(N,M,n)$
počet pokusů do $k.$ úspěchu (včetně)	nezávislé pokusy	$k=1$	**Geometrická** - $Ge(\pi)$
			Negativně binomická (Pascalova) - $NB(k,\pi)$
počet události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)	ordinarita, stacionarita, beznáslednost procesu		**Poissonova** - $\mathrm{Po}(\lambda t)$

DĚKUJI ZA POZORNOST!