Výpočet derivací

Pravidla pro počítání s derivacemi

Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $fg, \frac{f}{g}$ a cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci a platí

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0$,

d) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

Derivace inverzní funkce

Nechť $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(y_0)}, je-li \; f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, \quad je-li \; f'(y_0) = 0 \; a \; funkce \; f \; je \; na \; I \; rostoucí, \\ -\infty, \quad je-li \; f'(y_0) = 0 \; a \; funkce \; f \; je \; na \; I \; klesající. \end{cases}$$

Derivace složené funkce

Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládáme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$(F)'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

[1] $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}\ (konst.), x \in \mathbb{R}$,

[2] $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$,

[3] $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,

[4] $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,

[5] $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$,

[6] $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$,

[7] $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$,

[8] $(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^+$,

[9] $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1)$,

[10] $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1; 1)$,

[11] $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$,

[12] $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$,

[13] $(a^x)' = a^x \ln a,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,

[14] $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot ln\, a},\ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ \ x \in \mathbb{R}^+$.

Martina Litschmannová (2015)