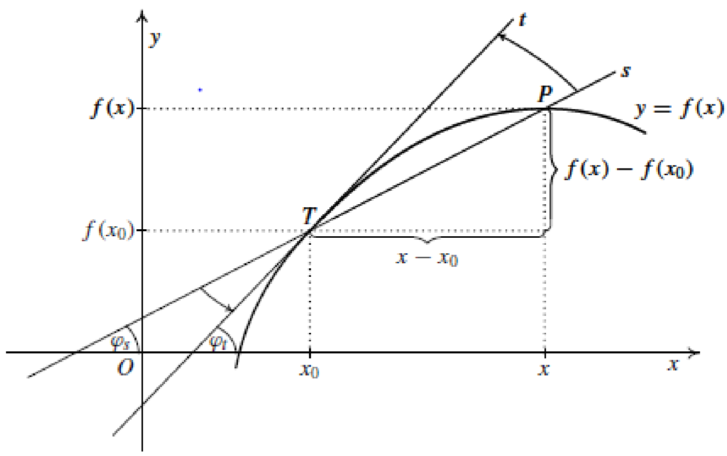
1. cvičení – Derivace (Opakování)

1.1 Definice derivace

Derivování je přechod od funkce f, jenž udává vztah mezi proměnnými x a y, k funkci f', jenž udává vztah mezi proměnnou x a směrnici tečny funkce f v bodě x. Hodnota $f'(x)$, udává v každém bodě x sklon funkce f (směrnici její tečny). Funkci $f'(x)$ nazýváme **derivací** funkce f.

Geometrický model



Geometrický model derivace (převzato z [1])

Definice 1.1
Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme ji **derivací** funkce f v bodě x_0.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Definice 1.2
Nechť $x_0 \in D(f)$.

Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, značíme ji $f'_+(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zprava** funkce f v bodě x_0.
Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, značíme ji $f'_-(x_0)$ a nazýváme ji **derivací zleva** funkce f v bodě x_0.

Funkce f má v bodě x_0 derivaci, právě když existují obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a jsou si rovny.

Věta 1.1
Má-li funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Pravidla pro počítání s derivacemi

Věta 1.2
Nechť existují derivace funkcí f a g v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $fg, \frac{f}{g}$ a cf, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci a platí

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, je-li $g(x_0) \neq 0$,

d) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

Věta 1.3 - Derivace inverzní funkce
Nechť $f: x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak inverzní funkce $f^{-1}: y = f^{-1}(x)$ má v bodě $x_0 = f(y_0)$ derivaci a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(y_0)}, je - li \;\; f'(y_0) \neq 0, \\ +\infty, \quad\quad je - li \;\; f'(y_0) = 0 \; a \; funkce \; f \; je \; na \; I \; rostoucí, \\ -\infty, \quad\quad je - li \;\; f'(y_0) = 0 \; a \; funkce \; f \; je \; na \; I \; klesající. \end{cases}$$

Věta 1.4 - Derivace složené funkce
Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládáme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$(F)'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

[1] $(c)' = 0, c \in \mathbb{R} \, (konst.), x \in \mathbb{R}$,

[2] $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$,

[3] $(\sin x)' = \cos x, \; x \in \mathbb{R}$,

[4] $(\cos x)' = -\sin x, \; x \in \mathbb{R}$,

[5] $(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$,

[6] $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$,

[7] $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$,

[8] $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \; x \in \mathbb{R}^+$,

[9] $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1; 1)$,

[10] $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; x \in (-1; 1)$,

[11] $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \; x \in \mathbb{R}$,

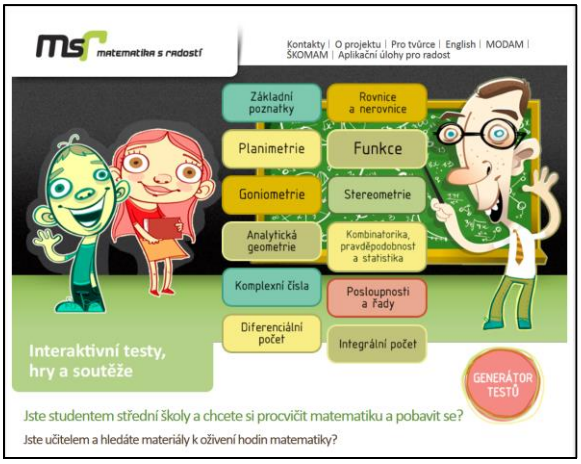
[12] $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}, \; x \in \mathbb{R}$,

[13] $(\mathrm{a}^\mathrm{x})' = \mathrm{a}^\mathrm{x} \ln a, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,

[14] $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \; x \in \mathbb{R}^+$.

Derivace funkcí $f(x)^{g(x)}$
Využíváme známého vztahu $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

1.2 Seznámení s Matematikou s radostí – http://msr.vsb.cz/



Interaktivita vytvářených materiálů je založena na technologii **Acrobat JavaScript**, která není v alternativních prohlížečích PDF souborů podporována. To se týká prohlížečů PDF integrovaných do webových prohlížečů, aplikací pro zobrazování PDF souborů na mobilních zařízeních. Korektně nefunguje ani Adobe Reader pro unix nebo android.

S interaktivními PDF lze pracovat dvěma způsoby:

- Stáhnout si PDF soubor na disk a otevřít ho v Adobe Readeru.
    - Nastavit si Firefox tak, aby se jakýkoliv soubor PDF otevíral v Adobe Readeru (viz http://msr.vsb.cz/napoveda/testy).

MSR – Diferenciální počet – Testy – Základní vzorce pro derivování
(http://msr.vsb.cz/sites/msr.vsb.cz/files/pdf/test_dif_pocet_derivace_794_708_0.pdf)

MSR – Diferenciální počet – Testy – Derivace složené funkce (středně těžké)
(http://msr.vsb.cz/sites/msr.vsb.cz/files/pdf/test_dif_pocet_derivace_861_707_0.pdf)

Příklad 1.1
Vypočtěte f', je-li f dána předpisem:
a) $f(x) = x^x$ *b)* $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

1.3 Derivace vyšších řádů

Definice 1.3
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom n-tou derivací (nebo derivací n-tého řádu) funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}(x)$ a definujeme rovností
$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',$$
přičemž $f^{(0)}(x) = f$.

Příklad 1.2

Vypočtěte třetí derivaci funkce f: $f(x)=cos^2x$.

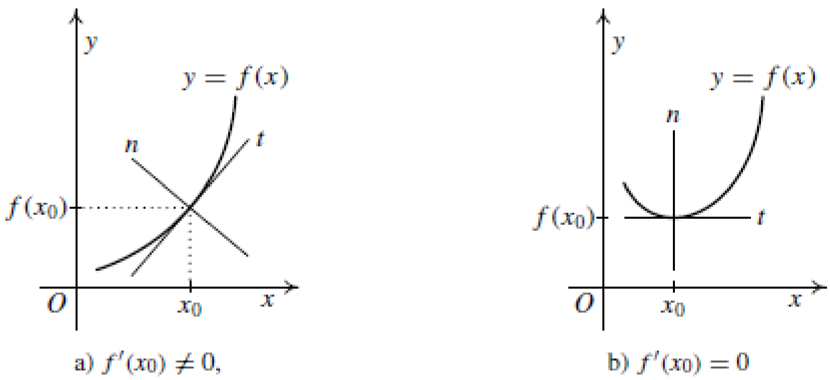
1.4 Tečna a normála

Definice 1.4

Přímka t o rovnici

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

se nazývá **tečna ke grafu funkce f v dotykovém bodě $T=\left(x_0,f(x_0)\right)$**. Přímka n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, se nazývá **normála ke grafu funkce f v dotykovém bodě T**.



Tečna a normála ke grafu funkce (převzato z [1])

Příklad 1.3

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce f dané předpisem $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$ v dotykovém bodě $T=(2,?)$.

MSR – Diferenciální počet – Párovací hry – Geometrický význam derivace
(http://msr.vsb.cz/sites/msr.vsb.cz/files/pdf/hra_dif_pocet_derivace_664_524.pdf)

1.5 Fyzikální význam derivace

Předpokládejme, že přímočarý pohyb hmotného bodu je popsán funkcí $s(t)$, která udává polohu hmotného bodu v závislosti na čase. Nechť existuje první a druhá derivace funkce $s(t)$.

$v(t_0)=s'(t_0)$ nazýváme **okamžitou rychlostí** bodu v čase t_0.

$a(t_0)=v'(t_0)=s''(t_0)$ nazýváme **okamžitým zrychlením** bodu v čase t_0.

Příklad 1.4

Dráha pohybujícího se tělesa je popsána funkcí s danou předpisem $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$. *Přitom dráha s je vyjádřena v metrech a čas t v sekundách. Zjistěte, ve kterém okamžiku je rychlost nulová.*

Literatura

[1] MAYEROVÁ, Šárka, Jaromír KUBEN a Pavlína RAČKOVÁ. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1191-X. Dostupné také z: http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm