2. cvičení – Úvod do integrálního počtu, Metoda per partes

2.1 Několik poznámek na úvod

funkce f $\xrightarrow{\text{derivování}}$ $f'(x)$ … směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x; f(x)]$

$f'(x)$ … směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x; f(x)]$ $\xrightarrow{\text{integrování}}$ funkce f

$f(x)$ … poloha bodu pohybujícího se po přímce v čase x $\xrightarrow{\text{derivování}}$ $f'(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x

$f'(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x $\xrightarrow{\text{integrování}}$ $f(x)$ … poloha bodu pohybujícího se po přímce v čase x

$f(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x $\xrightarrow{\text{derivování}}$ $f'(x)$ … okamžité zrychlení bodu v čase x

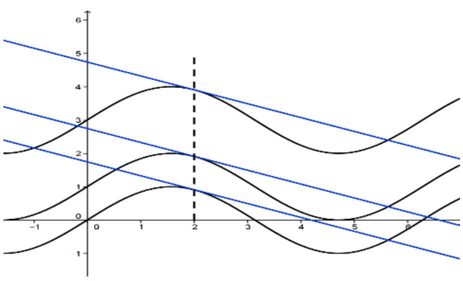
$f'(x)$ … okamžité zrychlení bodu v čase x $\xrightarrow{\text{integrování}}$ $f(x)$ … okamžitá rychlost bodu v čase x

Integrální počet – Jakou funkci musíme derivovat, abychom získali danou funkci $f(x)$?

hledáme $F(x)$ $\xleftarrow{\textbf{integrování}}$ **známe $f(x) = F'(x)$**

Například:

$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + 1$	$\cos x$
$\sin x - 3$	$\cos x$
$\vdots$	$\vdots$
$\sin x + c, c \in \mathbb{R}$	$\cos x$



Geometrická interpretace: Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x; F(x) + c]$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ rovnoběžné, tj. mají stejnou směrnici.

Definice 2.1
Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I.
Funkce $F(x)$ se nazývá **primitivní funkce k funkci f**, jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$f(x) = F'(x).$$

Věta 2.1 (O existenci primitivní funkce)
Je-li funkce f spojitá na otevřeném intervalu I, má v I primitivní funkci.

Poznámka: Spojitost je postačující, nikoliv nutnou podmínkou existence primitivní funkce.

Věta 2.2
Je-li F primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, pak funkce $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, jsou právě všechny primitivní funkce k f na I.

Označení: Je-li F primitivní funkce k f, píšeme $\int f(x)dx = F(x)$ a mluvíme o **neurčitém integrálu**.

Úmluva: Symbol $\int f(x)dx$ pro nás bude znamenat některou z primitivních funkcí k f. Každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty.

Věta 2.3
Na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru příslušné integrované funkce platí:

[1] $\int c\, dx = cx \quad (c \in \mathbb{R})$,

[2] $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$,

[3] $\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = ln|x|$,

[4] $\int \sin x\ dx = -\cos x$,

[5] $\int \cos x\ dx = \sin x$,

[6] $\int \frac{1}{cos^2 x}\, dx = tg\ x$,

[7] $\int \frac{1}{sin^2 x}\, dx = -cotg\ x$,

[8] $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$,

[9] $\int e^x\, dx = e^x$,

[10] $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = arctg\ x$,

[11] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsin\, x$,

[12] $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)|$.

Platnost vzorců plyne ze vzorců pro derivování.

Věta 2.4 (O linearitě neurčitého integrálu)
Nechť f a g jsou funkce spojité na otevřeném intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak v I platí

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

MSR – Integrální počet – Párovací hry – Tabulkové integrály
(http://msr.vsb.cz/sites/msr.vsb.cz/files/pdf/hra_integ_pocet_primitivni_funkce_717_566.pdf)

Příklad 2.1

a) $\int x\, dx$
b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx$
c) $\int \sqrt{x}\, dx$
d) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$
e) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\, dx$
f) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx$
g) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$
h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\, dx$
i) $\int \left(2x^3 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{\sin x}{3}\right) dx$
j) $\int \frac{x^2-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} dx$
k) $\int \mathrm{cotg}^2 x\, dx$
l) $\int (x-1)^3 dx$
m) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

2.2 Metoda per partes

Věta 2.5
Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v I. Pak v I platí
$$\int \big(u(x) \cdot v'(x)\big)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int \big(u'(x) \cdot v(x)\big)\, dx.$$

Nejčastější integrály řešené metodou per partes:

Označme $P(x)$ libovolný polynom.

	$\boldsymbol{u(x)}$	$\boldsymbol{v'(x)}$
$\int (P(x) \cdot e^{ax})\, dx$	$P(x)$	e^{ax}
$\int (P(x) \cdot \sin(ax))\, dx$	$P(x)$	$\sin(ax)$
$\int (P(x) \cdot \cos(ax))\, dx$	$P(x)$	$\cos(ax)$
$\int (P(x) \cdot \ln x)\, dx$	$\ln x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \arcsin x)\, dx$	$\arcsin x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \arccos x)\, dx$	$\arccos x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \mathrm{arctg}\, x)\, dx$	$\mathrm{arctg}\, x$	$P(x)$
$\int (P(x) \cdot \mathrm{arccotg}\, x)\, dx$	$\mathrm{arccotg}\, x$	$P(x)$

MSR – Integrální počet – Testy – Integrování metodou per partes
(http://msr.vsb.cz/sites/msr.vsb.cz/files/pdf/test_integ_pocet_primitivni_funkce_920_660.pdf)

Příklad 2.2

a) $\int (x^2+1)e^x dx$

b) $\int x \cdot arctg\, x\, dx$

c) $\int (x^2-3x+2)e^x dx$

d) $\int ln(x^2+1)\, dx$

e) $\int (x^2-2x) \cdot arctg\, x\, dx$

Příklad 2.3

a) $\int cos\, x \cdot e^x dx$

b) $\int cos^2 x\, dx$

c) $\int sin\, 3x \cdot e^x dx$

Literatura

[1] MAYEROVÁ, Šárka, Jaromír KUBEN a Pavlína RAČKOVÁ. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1191-X. Dostupné také z: http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm