3. cvičení - Substituční metody řešení neurčitého integrálu, rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

3.1 První substituční metoda

Věta 3.1
Nechť
- funkce φ má na intervalu $(a;b)$ konečnou derivaci a pro všechna $x \in (a;b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha;\beta)$,
- funkce f je spojitá v $(\alpha;\beta)$.

Buď F libovolná primitivní funkce k f na $(\alpha;\beta)$. Pak v $(a;b)$ platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ dx = F(\varphi(x)).$$

Píšeme: $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ dx = \left| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)\ dt = F(t) = F(\varphi(x))$

Příklad 3.1

a) $\int \sin^4 x \cdot \cos x\ dx$

b) $\int \frac{1}{x}(\ln^3 x - \ln x)\ dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ dx$

d) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\ dx$

e) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\ dx$

f) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\ dx$

g) $\int \cos(5x-1)\ dx$

h) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

i) $\int (1-\pi x)^{2000}\ dx$

j) $\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}}\ dx$

k) $\int x\sqrt{1+3x^2}\ dx$

l) $\int \frac{x^9}{(x^5+1)^3}\ dx$

3.2 Druhá substituční metoda

Věta 3.2
Nechť funkce $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu J. Nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu I a zobrazuje tento interval na interval J. Dále předpokládejme, že funkce $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ má na intervalu I primitivní funkci $F(t)$. Pak funkce $f(x)$ má na intervalu J primitivní funkci $F[\varphi^{-1}(x)]$. Tudíž platí:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

Jestliže do primitivní funkce na pravé straně dosadíme za t funkci $\varphi^{-1}(x)$.

Příklad 3.2

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx,\ x \in (0;\infty)$

b) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx,\ x \in (-1;1)$

3.3 Polynomy

Definice 3.1
Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Funkci
$$P: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$$
Nazýváme **reálný polynom (mnohočlen)**. Čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty polynomu** P a n **stupeň polynomu** P.

Příklady polynomů:
- $P_1: y = 3x^3 - 1$ … polynom stupně 3,
- $P_2: y = 7x^4 + 3x^2 - 1$ … polynom stupně 4,
- $P_3: y = 4$ … polynom stupně 0.

Definice 3.2
Funkce R daná předpisem
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
kde P je polynom a Q je nenulový polynom se nazývá **racionální lomenná funkce**.

Říkáme, že funkce R je **ryze lomenná**, jestliže stupeň polynomu P je nižší než stupeň polynomu Q. Je-li stupeň polynomu P stejný nebo vyšší než stupeň polynomu Q, mluvíme o **neryze lomenné** funkci.

Příklady racionálně lomenných funkcí:
- $R_1: y = \frac{3x^3-1}{7x^4+3x^2-1}$ … ryze lomenná racionální funkce
- $R_2: y = \frac{3x^5-1}{7x^4+3x^2-1}$ … neryze lomenná racionální funkce

Příklad 3.3
Vyjádřete neryze lomenou racionální funkci f jako součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce.
$$f: y = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

3.4 Rozklad polynomu na součin

Definice 3.3
Kořenem polynomu P rozumíme libovolnou komplexní číslo α takové, že $P(\alpha) = 0$.

Definice 3.4
Jsou-li $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ navzájem různé kořeny polynomu P_n a $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$, pak tvar polynomu
$$P_n: y = a_n (x - \beta_1)^{k_1} (x - \beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \beta_s)^{k_s}$$
Nazýváme **rozklad polynomu P_n na součin kořenových činitelů v komplexním oboru**. Číslům $k_1, k_2, \dots, k_s$ říkáme **násobnosti kořenů** $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Platí $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Věta 3.3
Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

- Polynom stupně 1 má právě jeden kořen.
  $P: y = x - 2$ … kořen 2

- Polynom stupně 2 má právě dva komplexní kořeny, přičemž každý počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost.
  $P: y = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ … kořeny: 1, -2
  $P: y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ … dvojnásobný kořen 1
  $P: y = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ … kořeny: $i, -i$

- Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.
  - $P: y = x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$ … kořeny: $0, i, -i$
  - $P: y = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$ … kořeny: $0,1,-1$

- Má-li polynom komplexní kořen $x = \alpha + \beta i$, má i komplexně sdružený kořen $x = \alpha - \beta i$, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

  Roznásobíme-li kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům $\alpha \pm \beta i$, dostáváme
  $$[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$
  To je kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$.

Věta 3.4
Je-li polynom $P_n(x)$ stupně $n, n \geq 1$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ všechny jeho kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_s$ a označíme-li $x^2 + p_1 x + q_1$, …, $x^2 + p_r x + q_r$ všechny kvadratické trojčleny odpovídající všem různým dvojicím komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $l_1, l_2, \dots, l_r$, dostaneme

$$P_n(x) = a_n (x-\beta_1)^{k_1}(x-\beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-\beta_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}.$$

Tento tvar polynomu nazýváme **rozklad polynomu na součin ireducibilních (nerozložitelných) kořenových činitelů v reálném oboru**.

Příklad 3.4
Rozložte polynom $P_5(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních kořenových činitelů v reálném oboru, víte-li, že jeden kořen je $x = -\frac{1}{2}$.

3.5 Rozklad racionální lomenné funkce na parciální zlomky

Věta 3.5

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomenná funkce s reálnými koeficienty a nechť $Q(x) = \cdots \cdot (x-\alpha)^k \cdot \cdots \cdot (x^2+px+q)^j \cdot \cdots$, pak

$$R(x) = \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j} + \cdots,$$

Kde $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_j, C_1, \cdots, C_j \in \mathbb{R}$.

Postup nalezení koeficientů rozkladu [1]

1. Nejprve se přesvědčíme, že zadaná funkce je ryze lomenná. Pokud tomu tak není, převedeme ji dělením na součet polynomu a racionální ryze lomenné funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
2. Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.
3. Podle tohoto rozkladu napíšeme předpokládaný tvar rozkladu na parciální zlomky s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomenné funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu získaného v bodě 2.
4. Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů. Na jedné straně rovnice je mnohočlen se známými koeficienty, na druhé straně mnohočlen s neznámými koeficienty.
5. Dva mnohočleny jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají stejné koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, která má vzhledem k jednoznačnosti rozkladu právě jedno řešení.
6. Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice a tím dostat hned některé koeficienty. Pak stačí porovnat koeficienty jen u některých mocnin neznámé (tak, abychom dostali potřebný počet rovnic pro ty koeficienty, jejichž hodnoty ještě nemáme).

Příkad 3.5

Rozložte na parciální zlomky:

a) $R(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$

b) $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4-1}$

c) $R(x) = \frac{x^4-x+1}{x^3-1}$

d) $R(x) = \frac{-3x^3+25x^2-32x-2}{(x-1)^2(x-2)(x+3)}$

MSR – Integrální počet – Neriskuj – Metody výpočtu neurčitého integrálu
(http://msr.vsb.cz/sites/msr.vsb.cz/files/pdf/neriskuj_integ_pocet_1693.pdf)

Literatura

[1] MAYEROVÁ, Šárka, Jaromír KUBEN a Pavlína RAČKOVÁ. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1191-X. Dostupné také z: http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm