# 4. cvičení Integrace racionální lomenné funkce a další typy integrálů

## 1. Integrace racionální lomenné funkce

Každou racionální lomenou funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \underbrace{R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_s(x)}_{\text{parciální zlomky}}$$

Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$ jsou tyto funkce spojité, takže k nim existuje primitivní funkce a platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x)\, dx + \int R_1(x) dx + \cdots + \int R_s(x) dx.$$

Integraci základních typů parciálních zlomků si vyzkoušíme v následujícím příkladu.

***Příklad 4.1***

*a)* $\int \frac{3}{x-7} dx$

*b)* $\int \frac{5}{(x-1)^2} dx$

*c)* $\int \frac{1}{x^2+4} dx$

*d)* $\int \frac{3x+7}{x^2+2} dx$

***Příklad 4.2***

$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+4x-5}{x^3-x^2+2x-2} dx$

***Příklad 4.3***

$\int \frac{\sqrt{3}}{(x+1)(2-x)} dx$

***Příklad 4.4***

$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2(2-x)} dx$

## 2. Integrály typu $\int R(e^x)dx$, $\int R(ln\, x)dx$

$\int R(e^x)dx$ — substituce: $t = e^x$, $dt = e^x dx$

nebo

substituce: $t = e^x \Rightarrow x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$

$\int R(ln\, x)dx$ — substituce: $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$

***Příklad 4.5***

*a)* $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$

*b)* $\int \frac{\ln x-1}{(\ln^2 x+1)x}dx$

## 3. Integrály obsahující odmocniny

$\int R\left(x,\sqrt[s]{x}\right)dx$ substituce: $t=\sqrt[s]{x}\ \Rightarrow x=t^s,\ dx=st^{s-1}dt$

$\int R\left(x,\sqrt[s]{ax+b}\right)dx$ substituce: $t=\sqrt[s]{ax+b}\ \Rightarrow x=\frac{t^s-b}{a},\ dx=\frac{s}{a}t^{s-1}dt$

$\int R\left(x,\sqrt[s_1]{x},\sqrt[s_2]{x},\dots,\sqrt[s_k]{x}\right)dx$ substituce: $t=\sqrt[s]{x}$ , kde $s$ je nejmenší společný násobek $s_1,s_2,\dots,s_k$

$\int R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ substituce: $t=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

***Příklad 4.6***

*a)* $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}dx$

*b)* $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

*c)* $\int x\sqrt{3-x}dx$

*d)* $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$

*e)* $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$

*f)* $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx$

*g)* $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

## 4. Integrály obsahující goniometrické funkce

Speciálním případem je $\int sin^n x \cdot cos^m x \, dx$, který řešíme takto:

- $\text{je} - \text{li } n \text{ liché}$: substituce: $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$
- je-li $m$ liché: substituce: $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$
- je-li $n, m$ liché: substituce: $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$

  nebo

  substituce: $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$
- je-li $n, m$ sudé: upravíme pomocí vztahů:

  $sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

***Příklad 4.7***

*a)* $\int \frac{dx}{sin\, x \cdot cos^3 x}$

*b)* $\int sin^2 x \cdot cos^3 x \, dx$

*c)* $\int sin^2 x \, dx$

*d)* $\int sin^4 x \cdot cos^2 x \, dx$

**Literatura**

[1] MAYEROVÁ, Šárka, Jaromír KUBEN a Pavlína RAČKOVÁ. *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. ISBN 80-248-1191-X. Dostupné také z: http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/index.htm

[2] POSPÍŠIL, Lukáš. *Poznámky ze cvičení – 13. cvičení (parciální zlomky)*. Dostupné také z: http://homel.vsb.cz/~pos220/ma_2012_2013/13.pdf