

Úlohy týkající se rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky

1. Polynomy

Definice 1

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Funkci

$$P: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R}$$

Nazýváme **reálný polynom (mnohočlen)**. Čísla $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazýváme **koeficienty polynomu P** a **n stupeň polynomu P** .

Příklady polynomů:

- $P_1: y = 3x^3 - 1$... polynom stupně 3,
- $P_2: y = 7x^4 + 3x^2 - 1$... polynom stupně 4,
- $P_3: y = 4$... polynom stupně 0.

Definice 2

Funkce R daná předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P je polynom a Q je nenulový polynom se nazývá **racionální lomenná funkce**.

Říkáme, že funkce R je **ryze lomenná**, jestliže stupeň polynomu P je nižší než stupeň polynomu Q . Je-li stupeň polynomu P stejný nebo vyšší než stupeň polynomu Q , mluvíme o **neryze lomenné** funkci.

Příklady racionálně lomenných funkcí:

- $R_1: y = \frac{3x^3-1}{7x^4+3x^2-1}$... ryze lomenná racionální funkce
- $R_2: y = \frac{3x^5-1}{7x^4+3x^2-1}$... neryze lomenná racionální funkce

Příklad 1

Vyjádřete neryze lomenou racionální funkci f jako součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce.

$$f: y = \frac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$$

2. Rozklad polynomu na součin

Definice 3

Kořenem polynomu P rozumíme libovolnou komplexní číslo α takové, že $P(\alpha) = 0$.

Definice 4

Jsou-li $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ navzájem různé kořeny polynomu P_n a $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N}$, pak tvar polynomu

$$P_n: y = a_n(x - \beta_1)^{k_1}(x - \beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \beta_s)^{k_s}$$

Nazýváme **rozklad polynomu P_n na součin kořenových činitelů v komplexním oboru**. Číslům $k_1, k_2, \dots, k_s$ říkáme **násobnosti kořenů** $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Platí $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Věta 1

Každý polynom stupně n má v komplexním oboru právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

- Polynom stupně 1 má právě jeden kořen.
 $P: y = 2 \dots$ kořen 2
- Polynom stupně 2 má právě dva komplexní kořeny, přičemž každý počítáme tolikrát, jaká je jeho násobnost.
 $P: y = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) \dots$ kořeny: 1, -2
 $P: y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \dots$ dvojnásobný kořen 1
 $P: y = x^2 + 1 = (x - i)(x + i) \dots$ kořeny: $i, -i$
- Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.
 - $P: y = x^3 + x = x(x^2 + 1) = x(x + i)(x - i) \dots$ kořeny: 0, $i, -i$
 - $P: y = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1) \dots$ kořeny: 0, 1, -1
- Má-li polynom komplexní kořen $x = \alpha + \beta i$, má i komplexně sdružený kořen $x = \alpha - \beta i$, přičemž jejich násobnosti jsou stejné.

Roznásobíme-li kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům $\alpha \pm \beta i$, dostáváme

$$[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

To je kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$.

Věta 2

Je-li polynom $P_n(x)$ stupně $n, n \geq 1$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ všechny jeho kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_s$ a označíme-li $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_rx + q_r$ všechny kvadratické trojčleny odpovídající všem různým dvojicím komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $l_1, l_2, \dots, l_r$, dostaneme

$$P_n(x) = a_n(x - \beta_1)^{k_1}(x - \beta_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \beta_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_rx + q_r)^{l_r}.$$

Tento tvar polynomu nazýváme **rozklad polynomu na součin ireducibilních (nerozložitelných) kořenových činitelů v reálném oboru**.

Příklad 2

Rozložte polynom $P_5(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních kořenových činitelů v reálném oboru, víte-li, že jeden kořen je $x = -\frac{1}{2}$.

3. Rozklad na parciální zlomky**Věta 3**

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální ryze lomenná funkce s reálnými koeficienty a nechť

$Q(x) = \cdots (x - \alpha)^k \cdots (x^2 + px + q)^j \cdots$, pak

$$R(x) = \cdots \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j} + \cdots,$$

Kde $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_j, C_1, \dots, C_j \in \mathbb{R}$.

Postup nalezení koeficientů rozkladu [1]

1. Nejprve se přesvědčíme, že zadaná funkce je ryze lomenná. Pokud tomu tak není, převedeme ji dělením na součet polynomu a racionální ryze lomenné funkce. Tu pak teprve rozkládáme.
2. Rozložíme jmenovatel na součin ireducibilních činitelů v reálném oboru.
3. Podle tohoto rozkladu napíšeme předpokládaný tvar rozkladu na parciální zlomky s neznámými koeficienty. Ten položíme roven zadané racionální ryze lomenné funkci, jejíž jmenovatel si napíšeme ve tvaru součinu získaného v bodě 2.
4. Vzniklou rovnici vynásobíme jmenovatelem zadání. Dostaneme rovnost dvou mnohočlenů. Na jedné straně rovnice je mnohočlen se známými koeficienty, na druhé straně mnohočlen s neznámými koeficienty.
5. Dva mnohočleny jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného stupně a u stejných mocnin neznámé mají stejné koeficienty. Roznásobíme tedy mnohočleny na obou stranách a sloučíme členy se stejnými mocninami neznámé. Pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin neznámé na levé a pravé straně rovnice. Dostaneme soustavu lineárních rovnic, která má vzhledem k jednoznačnosti rozkladu právě jedno řešení.
6. Jestliže má jmenovatel reálné kořeny, je výhodné dosadit je do vzniklé rovnice a tím dostat hned některé koeficienty. Pak stačí porovnat koeficienty jen u některých mocnin neznámé (tak, abychom dostali potřebný počet rovnic pro ty koeficienty, jejichž hodnoty ještě nemáme).

Příklad 3

Rozložte na parciální zlomky:

a) $R(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$

b) $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4-1}$

c) $R(x) = \frac{x^4-x+1}{x^3-1}$

d) $R(x) = \frac{-3x^3+25x^2-32x-2}{(x-1)^2(x-2)(x+3)}$

4. Integrace racionální lomenné funkce

Každou racionální lomenou funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \underbrace{R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_s(x)}_{\text{parciální zlomky}}$$

Na libovolném intervalu, který neobsahuje kořeny jmenovatele $Q(x)$ jsou tyto funkce spojité, takže k nim existuje primitivní funkce a platí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int R_1(x) dx + \cdots + \int R_s(x) dx.$$

Integraci základních typů parciálních zlomků si vyzkoušíme v následujícím příkladu.

Příklad 4

a) $\int \frac{3}{x-7} dx$

b) $\int \frac{5}{(x-1)^2} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$

d) $\int \frac{3x+7}{x^2+2} dx$

e) $\int \frac{1}{x^2+2x+10} dx$

f) $\int \frac{5x+1}{x^2+x+1} dx$

Příklad 5

$$\int \frac{x^4+2x^3+x^2+4x-5}{x^3-x^2+2x-2} dx$$

Příklad 6

$$\int \frac{\sqrt{3}}{(x+1)(2-x)} dx$$

Definice, věty i mnohé příklady jsou převzaty z:

[1] PLCH, Roman - ŠARMANOVÁ, Petra - SOJKA, Petr. *Integrační počet funkcí více proměnných* [online]. 2 vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2012 [cit. 2016-09-15]. Elportál. Dostupné z: <http://is.muni.cz/elportal/?id=987409> . ISSN 1802-128X.

Za svolení k použití mnohokrát děkuji Petře Vondrákové ☺