Přednáška 9

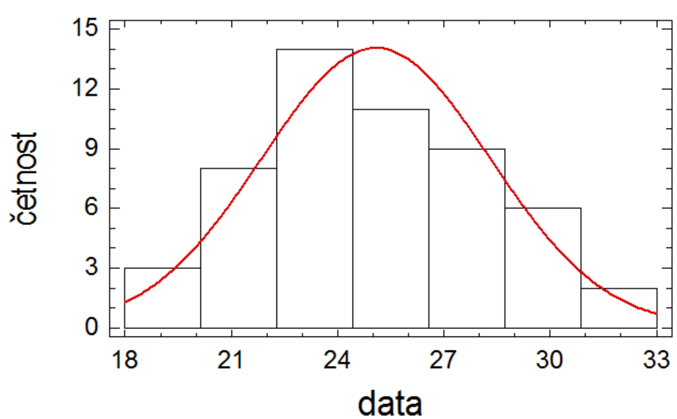
Testy dobré shody

- Grafická analýza pro ověření shody empirického a teoretického rozdělení
- χ^2 test dobré shody
  - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \dots; \pi_{0_k}$,
  - χ^2- test dobré shody s očekávaným rozdělením
    - úplně specifikovaný test,
    - neúplně specifikovaných test,
- Kolmogorovův-Smirnovův jednovýběrový test
- Exploratorní grafy pro ověření shody empirického a teoretického rozdělení
- Testy normality (testy na základě šikmosti a špičatosti, Liliefforsův test, Shapiro-Wilkův test, Anderson-Darlingův test)

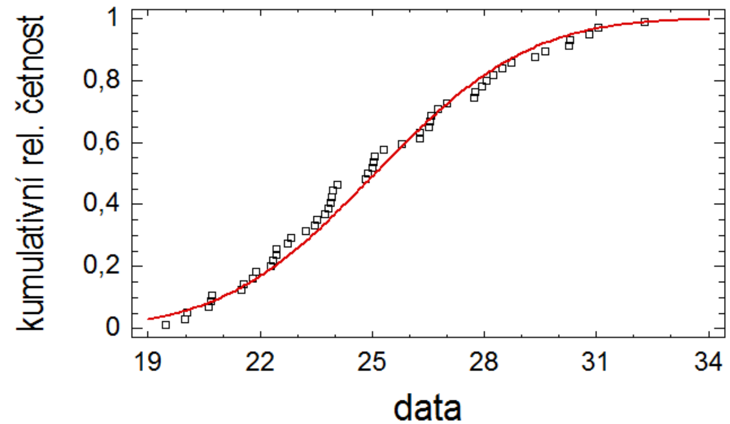
Poznámka: χ^2 čti: chí-kvadrát (česky) nebo „kaj skvére“ (anglicky)

Grafická metoda srovnávání empirického rozdělení s teoretickými modely

Jak ověřit,
zda se empirické rozdělení shoduje s teoretickým?

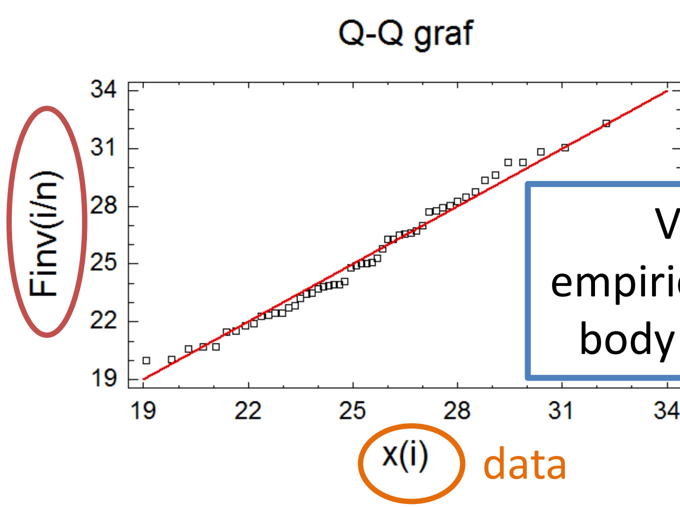


Srovnání histogramu
s teoretickou hustotou pravděpodobností



Srovnání kum. rel. četností (resp. empirické distr. f-ce) s teoret. distr. f-cí

kvantily teoretické distribuční f-ce - $F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)$



data

V případě ideální shody empirického a teoret. rozdělení by body ležely na ose I. kvadrantu.

Jak ověřit, zda se empirické rozdělení shoduje s teoretickým?

- Pomocí grafické analýzy můžeme metodou srovnání se standardními modely pouze odhadnout typ rozdělení!
- Objektivní míru shody dat s teoretickým modelem poskytují tzv. testy dobré shody.

Testy dobré shody

Testy dobré shody

H_0: Teoretické a empirické rozdělení se **shoduje**.

H_A: Teoretické a empirické rozdělení se neshoduje.

Vybrané testy dobré shody:

- χ^2 test dobré shody
  - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \dots; \pi_{0_k}$,
  - χ^2- test dobré shody s očekávaným rozdělením
    - úplně specifikovaný test,
    - neúplně specifikovaných test,
- Kolmogorovův-Smirnovův jednovýběrový test

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \ldots; \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}					

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \dots; \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \ldots; \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i					

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \ldots; \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \ldots; \ \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256
očekávaná (angl. expected) četnost E_i					

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \dots; \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256
očekávaná (angl. expected) četnost E_i	$0{,}248 \cdot 256$	$0{,}490 \cdot 256$	$0{,}126 \cdot 256$	$0{,}136 \cdot 256$	---

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \dots; \pi_{0_k}$

Motivační příklad:

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Náznak řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256
očekávaná (angl. expected) četnost E_i	61,0	120,5	31,0	33,5	---

Liší se pozorované a očekávané četnosti statisticky významně?

χ^2 test dobré shody - - ověření, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}; \dots ; \ \pi_{0_k}$

- V nejjednodušším případě použití χ^2testu lze konečnou populaci roztřídit podle nějakého znaku do k disjunktních skupin (tzv. variant) a my chceme na základě náhodného výběru ověřit, zda jsou relativní četnosti jednotlivých variant rovny číslům $\pi_{0_1}, \pi_{0_2}, \dots , \ \pi_{0_k}$.

Předpoklady testu: Dostatečně velký výběr – tj. v praxi: všechny <u>očekávané</u> četnosti větší než 2 a alespoň 80% <u>očekávaných</u> četností větších než 5.

Testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

p-hodnota: $p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$,
kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s $k-1$ stupni volnosti.

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Řešení:

H_0: Provedený výběr **je** výběrem z populace, v níž jsou relativní četnosti jednotlivých variant dány tabulkou:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000

H_A: $\overline{H_0}$, tj. provedený výběr není výběrem z populace, v níž jsou relativní četnosti jednotlivých variant dány výše uvedenou tabulkou.

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256
očekávaná (angl. expected) četnost E_i	61,0	120,5	31,0	33,5	---

Ověření předpokladů:
Všechny očekávané četnosti jsou větší než 5.

Výpočet pozorované hodnoty:

$$x_{OBS} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(80-61,0)^2}{61,0} + \frac{(110-120,5)^2}{120,5} + \frac{(30-31,0)^2}{31,0} + \frac{(26-33,5)^2}{33,5} = 8,53$$

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256
očekávaná (angl. expected) četnost E_i	61,0	120,5	31,0	33,5	---

Výpočet pozorované hodnoty:

$$x_{OBS} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(80-61,0)^2}{61,0} + \frac{(110-120,5)^2}{120,5} + \frac{(30-31,0)^2}{31,0} + \frac{(26-33,5)^2}{33,5} = 8,53$$

p-hodnota: $p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$, kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s 3 $(= 4 - 1)$ stupni volnosti, tj. $p\text{–}hodnota = 1 - F_0(8,53) = 0,036$.

Bylo provedeno šetření mezi ženami staršími 15 let. Mezi 246 náhodně oslovenými ženami bylo 80 (32,5%) svobodných, 110 (44,7%) vdaných, 30 (12,2%) rozvedených a 26 (10,6%) ovdovělých. Je známo (viz Český statistický úřad), že v ČR je mezi ženami staršími 15 let cca 24,8% svobodných, 49,0% vdaných, 12,6% rozvedených a 13,6% ovdovělých. Lze provedený výběr označit za reprezentativní?

Řešení:

Stav	svobodná	vdaná	rozvedená	ovdovělá	celkem
očekávaná rel. četnost π_{0_i}	0,248	0,490	0,126	0,136	1,000
pozorovaná (angl. observed) četnost O_i	80	110	30	26	256
očekávaná (angl. expected) četnost E_i	61,0	120,5	31,0	33,5	---

p-hodnota: $p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$, kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s 3 $(= 4 - 1)$ stupni volnosti, tj. $p\text{–}hodnota = 1 - F_0(8{,}53) = 0{,}036$.

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme H_0, tj. výběr nelze považovat za reprezentativní.

χ^2- test dobré shody s očekávaným rozdělením

H_0: Empirické a teoretické rozdělení se **shoduje** $\left(F(x) = F_0(x)\right)$, neboli výběr **pochází** z určitého teoretického rozdělení.

H_A: Empirické a teoretické rozdělení se neshoduje $\left(F(x) \neq F_0(x)\right)$, neboli není pravda, že výběr pochází z určitého teoretického rozdělení.

Rozlišujeme:

A) Úplně specifikovaný test – v nulové hypotéze jsou specifikovány všechny parametry teoretického rozdělení (např. H_0: Výběr pochází z Poissonova rozdělení se střední hodnotou 12.)

B) Neúplně specifikovaný test – v nulové hypotéze nejsou specifikovány všechny parametry teoretického rozdělení (např. H_0: Výběr pochází z Poissonova rozdělení.)

- V tomto případě musíme nespecifikované parametry teoretického rozdělení odhadnout (bodový odhad) z výběru.

χ^2- test dobré shody s očekávaným rozdělením

H_0: Teoretické a empirické rozdělení se **shoduje**, neboli výběr **pochází** z určitého teoretického rozdělení.

H_A: Teoretické a empirické rozdělení se neshoduje, neboli není pravda, že výběr pochází z určitého teoretického rozdělení.

Předpoklady testu: Dostatečně velký výběr – tj. v praxi: všechny očekávané četnosti větší než 2 a alespoň 80% očekávaných četností větších než 5.

Testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

p-hodnota: $p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS}),$

kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s $k - h - 1$ stupni volnosti, kde *h* je počet odhadovaných parametrů teoretického rozdělení.

χ^2- test dobré shody s očekávaným rozdělením

Je-li teoretické rozdělení diskrétní, pak:

1) stanovíme nulovou a alternativní hypotézu,
2) označíme pozorované varianty NV x_i, kde $i = 1, 2, \dots, k$,
3) určíme pozorované četnosti O_i jednotlivých variant NV $\left(\sum_{i=1}^{k} O_i = n\right)$,
4) určíme očekávané rel. četnosti π_i jednotlivých variant NV $(\pi_i = P_0(x_i))$,
5) určíme očekávané četnosti E_i jednotlivých variant NV $(E_i = n\pi_i)$,
6) ověříme předpoklady testu (očekávané četnosti větší než 2, alespoň 80% očekávaných četností větší než 5),
7) určíme pozorovanou hodnotu testové statistiky $\left(x_{OBS} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\right)$,
8) určíme *p*-hodnotu ($p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$), kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s $k - h - 1$ stupni volnosti, kde *h* je počet odhadovaných parametrů teoretického rozdělení),
9) rozhodneme o výsledku testu.

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150

Řešení:

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina *X*) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu						

Řešení:

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina X) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	$P_0(0)$	$P_0(1)$	$P_0(2)$	$P_0(3)$	$P_0(X \geq 4)$	1,000

Řešení: $P_0(x)$ je pravd. f-ce Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina *X*) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu						

Řešení:

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina *X*) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu	45,2	54,2	32,6	13,1	5,1	---

$= 150 \cdot 0{,}301$

Řešení:

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina X) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu	45,2	54,2	32,6	13,1	5,1	---

$= 150 \cdot 0{,}361$

Řešení:

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina *X*) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu	45,2	54,2	32,6	13,1	5,1	---

$= 150 \cdot 0{,}034$

Řešení:

H_0: Počet poruch daného zařízení během jednoho dne (náhodná veličina *X*) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$, neboli výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

H_A: $\overline{H_0}$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu	45,2	54,2	32,6	13,1	5,1	---

Řešení:

Pozorovaná hodnota: $x_{OBS} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(52-45{,}2)^2}{45{,}2} + \cdots + \frac{(4-5{,}1)^2}{5{,}1} = 3{,}13.$

Testové kritérium má za předpokladu platnosti H_0 χ^2 rozdělení s 4 $(k-1-h)$ stupni volnosti. (Počet variant $k = 5$, počet odhadovaných parametrů $h = 0$.)

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu	45,2	54,2	32,6	13,1	5,1	---

Řešení:

Pozorovaná hodnota: $x_{OBS} = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(52-45{,}2)^2}{45{,}2} + \cdots + \frac{(4-5{,}1)^2}{5{,}1} = 3{,}13.$

$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$, kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s 4 stupni volnosti.

$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(3{,}13) = 0{,}54$

Výrobní firma odhaduje počet poruch určitého zařízení během dne pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 1,2. Zaměstnanci zaznamenali pro kontrolu skutečné počty poruch celkem ve 150 dnech (výsledky jsou uvedeny v níže uvedené tabulce). Ověřte čistým testem významnosti, zda lze počet poruch daného zařízení během dne skutečně modelovat pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda t = 1{,}2$.

x_i – počet poruch během dne	0	1	2	3	4 a více	celkem
O_i – počet dní, v nichž byl pozorován počet poruch x_i	52	48	36	10	4	150
π_i - očekávané pravděpodobnosti výskytu	0,301	0,361	0,217	0,087	0,034	1,000
E_i - očekávané četnosti výskytu	45,2	54,2	32,6	13,1	5,1	---

Řešení:

$$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(3{,}13) = 0{,}54$$

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu, tzn. nemáme námitek proti použití Poissonova rozdělení s parametrem 1,2 pro odhad počtu poruch daného zařízení během jednoho dne.

χ^2- test dobré shody s očekávaným rozdělením

Je-li teoretické rozdělení spojité, pak:

1) stanovíme nulovou a alternativní hypotézu,
2) pozorované hodnoty NV roztřídíme do *k* tříd (obvykle volíme $5 \leq k \leq 15$),
3) určíme pozorované četnosti O_i v jednotlivých třídách $\left(\sum_{i=1}^{k} O_i = n\right)$,
4) určíme očekávané rel. četnosti π_i v jednotlivých třídách,
5) určíme očekávané četnosti E_i v jednotlivých třídách $(E_i = n\pi_i)$,
6) ověříme předpoklady testu (očekávané četnosti větší než 2, alespoň 80% očekávaných četností větší než 5),
7) není-li předpoklad testu splněn, pokusíme se třídy korigovat (nemusí být stejně velké),
8) určíme pozorovanou hodnotu testové statistiky $\left(x_{OBS} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}\right)$,
9) určíme *p*-hodnotu ($p\text{−}hodnota = 1 - F_0(x_{OBS})$), kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s $k - h - 1$ stupni volnosti, kde *h* je počet odhadovaných parametrů teoretického rozdělení)
10) rozhodneme o výsledku testu.

Na dálnici byly v průběhu několika minut měřeny časové odstupy [s] mezi průjezdy jednotlivých vozidel. Zjištěné hodnoty těchto odstupů jsou uvedeny v tabulce:

2,5	6,8	5,0	9,8	4,0	2,3	4,2	19	8,7	7,7	5,9	5,3	8,4	3,6	9,2
4,3	2,6	13,0	5,4	8,6	4,2	2,9	1,5	1,8	1,6	5,9	8,3	5,2	6,9	5,1
1,3	6,4	6,5	5,7	3,6	4,8	4,0	7,3	24,9	10,6	15,0	5,3	4,0	3,3	6,0
4,6	1,6	1,9	1,5	11,1	4,3	5,5	2,1	2,9	3,0	3,8	1,0	1,5	8,6	4,4
6,8	5,2	3,0	8,0	4,0	4,7	7,3	2,3	1,9	1,9	4,6	6,4	5,3	3,9	2,4
1,2	6,2	4,3	2,6	2,7	2,0	0,8	3,7	6,9	2,8	4,3	4,9	4,1	4,5	4,4
11,9	9,0	5,6	4,8	2,8	2,1	4,3	1,0	1,6	2,5	2,2	1,3	1,8	1,6	3,8
3,1	1,6	4,9	1,8	3,9	3,4	1,6	4,5	5,8	6,9	1,8	2,6	6,8	2,5	1,9
3,1	10,8	1,6	2,0	4,9	11,2	1,6	2,2	3,8	1,1	1,8	1,4			

Ověřte čistým testem významnosti, zda lze časové odstupy mezi vozidly modelovat pomocí náhodné veličinu s normálním rozdělením.

Řešení:

X … časový odstup mezi průjezdy jednotlivých vozidel.

H_0: Časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel mají norm. rozdělení.

H_A: Časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel nemají norm. rozdělení.

Řešení:

X … časový odstup mezi průjezdy jednotlivých vozidel.

H_0: Časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel mají norm. rozdělení.

H_A: Časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel nemají norm. rozdělení.

- Neúplně specifikovaný test – normální rozdělení má 2 parametry (μ a σ^2), které je třeba odhadnout.

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{132} x_i}{132} = 4{,}6, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{132}(x_i - 4{,}6)^2}{131} = 10{,}9$$

Proč musíme nyní pozorované hodnoty kategorizovat ?

Pravděpodobnostní f-ce spojité NV je nulová. Pravděpodobnost výskytu spojité NV na určitém intervalu již nulová není!

Řešení:

<u>Kategorizace NV</u>:

Definiční obor náhodné veličiny rozdělíme například do 13 třídících intervalů.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti O_i
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12
13	$(8{,}7; \infty)$	11
Celkem	-	132

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané pravděpodobnosti:

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	
13	$(8{,}7; \infty)$	11	
Celkem	-	132	1,000

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané pravděpodobnosti:

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107
Celkem	-	132	1,000

$P(X \in (-\infty; 1{,}5\rangle\ ) = P(X < 1{,}5) = F(1{,}5)$, kde $F(x)$ je distr. f-ce rozdělení $N(4{,}6; 10{,}9)$

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané pravděpodobnosti:

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107
Celkem	-	132	1,000

$P(X \in (1{,}5; 1{,}8\rangle\ ) = F(1{,}8) - F(1{,}5)$, kde $F(x)$ je distr. f-ce rozdělení $N(4{,}6; 10{,}9)$

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané pravděpodobnosti:

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107
Celkem	-	132	1,000

$P(X \in (1{,}8; 2{,}0\rangle\ ) = F(2{,}0) - F(1{,}8)$, kde $F(x)$ je distr. f-ce rozdělení $N(4{,}6; 10{,}9)$

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané pravděpodobnosti:

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107
Celkem	-	132	1,000

$P(X \in (8{,}7; \infty)\ ) = P(X > 8{,}7) = 1 - F(8{,}7)$, kde $F(x)$ je distr. f-ce rozdělení $N(4{,}6; 10{,}9)$

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané četnosti.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti $\mathrm{E_i}$
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024	
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017	
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	
Celkem	-	132	1,000	-

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané četnosti.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti $\mathrm{E_i}$
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	22,9
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024	3,2
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017	2,3
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	6,2
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	5,4
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	10,3
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	6,2
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	6,3
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	8,0
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	14,0
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	13,9
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	19,2
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	14,1
Celkem	-	132	1,000	-

$E_1 = 132 \cdot 0{,}174$

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme očekávané četnosti.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti $\mathrm{E_i}$
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	22,9
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024	3,2
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017	2,3
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	6,2
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	5,4
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	10,3
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	6,2
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	6,3
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	8,0
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	14,0
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	13,9
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	19,2
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	14,1
Celkem	-	132	1,000	-

$E_{13} = 132 \cdot 0{,}107$

Řešení:

Kategorizace NV:

Ověříme předpoklady testu.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti $\mathrm{E_i}$
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	22,9
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024	3,2
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017	2,3
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	6,2
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	5,4
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	10,3
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	6,2
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	6,3
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	8,0
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	14,0
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	13,9
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	19,2
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	14,1
Celkem	-	132	1,000	-

Všechny očekávané četnosti jsou větší než 2, sloučíme-li třídy 2 a 3, bude splněn i silnější předpoklad – očekávané četnosti budou větší než 5.

Řešení:

Kategorizace NV:

Ověříme předpoklady testu.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti O_i	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti E_i
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	22,9
2	$(1{,}5; 1{,}8\rangle$	13	0,024	3,2
3	$(1{,}8; 2{,}0\rangle$	7	0,017	2,3
4	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	6,2
5	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	5,4
6	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	10,3
7	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	6,2
8	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	6,3
9	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	8,0
10	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	14,0
11	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	13,9
12	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	19,2
13	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	14,1
Celkem	-	132	1,000	-

Všechny očekávané četnosti jsou větší než 2, sloučíme-li třídy 2 a 3, bude splněn i silnější předpoklad – očekávané četnosti budou větší než 5.

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme pozorovanou hodnotu.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti $\mathrm{E_i}$
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	22,9
2	$(1{,}5; 2{,}0\rangle$	20	0,041	5,5
3	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	6,2
4	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	5,4
5	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	10,3
6	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	6,2
7	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	6,3
8	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	8,0
9	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	14,0
10	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	13,9
11	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	19,2
12	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	14,1
Celkem	-	132	1,000	-

$$x_{OBS} = \sum_{i=1}^{12} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(11-22{,}9)^2}{22{,}9} + \cdots + \frac{(11-14{,}1)^2}{14{,}1} = 59{,}7$$

Řešení:

Kategorizace NV:

Určíme *p*-hodnotu.

i	Třídící interval [s]	Empirické četnosti $\mathrm{O_i}$	Očekávané pravd. π_{0_i}	Očekávané četnosti $\mathrm{E_i}$
1	$(-\infty; 1{,}5\rangle$	11	0,174	22,9
2	$(1{,}5; 2{,}0\rangle$	20	0,041	5,5
3	$(2{,}0; 2{,}5\rangle$	10	0,047	6,2
4	$(2{,}5; 2{,}9\rangle$	8	0,041	5,4
5	$(2{,}9; 3{,}6\rangle$	8	0,078	10,3
6	$(3{,}6; 4{,}0\rangle$	10	0,047	6,2
7	$(4{,}0; 4{,}4\rangle$	10	0,048	6,3
8	$(4{,}4; 4{,}9\rangle$	10	0,060	8,0
9	$(4{,}9; 5{,}8\rangle$	12	0,106	14,0
10	$(5{,}8; 6{,}8\rangle$	10	0,106	13,9
11	$(6{,}8; 8{,}7\rangle$	12	0,145	19,2
12	$(8{,}7; \infty)$	11	0,107	14,1
Celkem	-	132	1,000	-

$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(59{,}7) \ll 0{,}001$, kde $F_0(x)$ je distribuční funkce χ^2 rozdělení s 9 $(= k - 1 - h = 12 - 1 - 2)$stupni volnosti.

Řešení:

X … časový odstup mezi průjezdy jednotlivých vozidel.

H_0: Časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel mají norm. rozdělení.

H_A: Časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel nemají norm. rozdělení.

$p\text{–}hodnota = 1 - F_0(59{,}7) \ll 0{,}001 \Longrightarrow$ Na hladině významnosti 0,05 zamítáme nulovou hypotézu, tj. nelze předpokládat, že časové odstupy mezi průjezdy jednotlivých vozidel nemají normální rozdělení.

Kolmogorovův-Smirnovův test

Kolmogorovův-Smirnovův jednovýběrový test

H_0: Náhodný výběr pochází z rozdělení se spojitou distribuční funkcí $F_0(x)$.

H_A: Náhodný výběr nepochází z rozdělení se spojitou distribuční funkcí $F_0(x)$.

POZOR!!!

Distribuční funkcí $F_0(x)$ musí být úplně specifikována.

Tímto testem nelze ověřit např. hypotézu, že výběr pochází z norm. rozdělení.

Kolmogorovův-Smirnovův jednovýběrový test

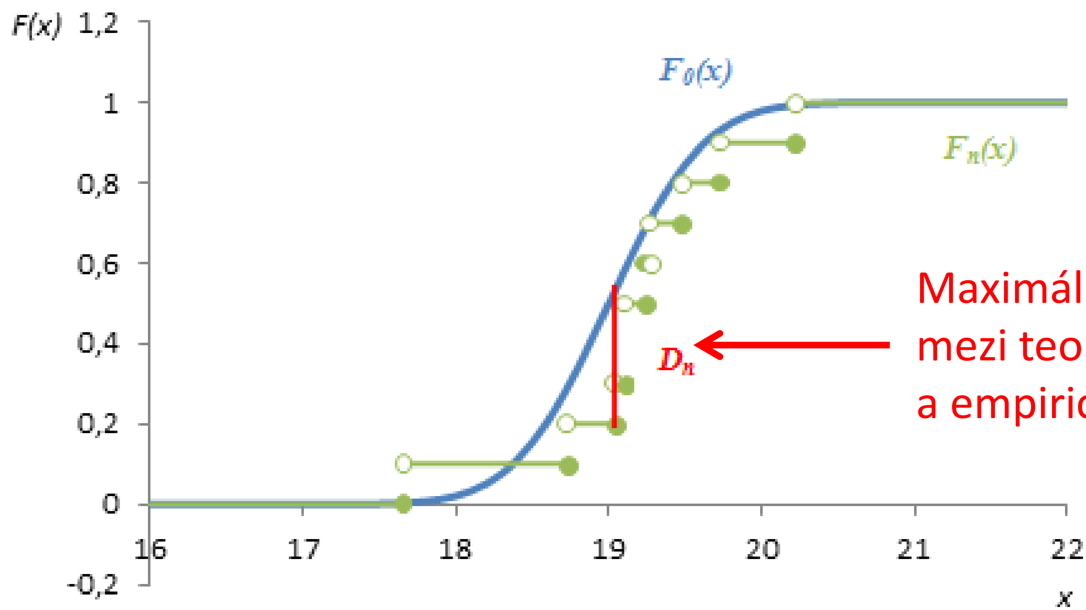
H_0: Náhodný výběr pochází z rozdělení se spojitou distribuční funkcí $F_0(x)$.

H_A: Náhodný výběr nepochází z rozdělení se spojitou distribuční funkcí $F_0(x)$.

Testové kritérium:

$$D_n = \sup|F_n(x) - F_0(x)| = max(D_1{}^*, D_2{}^*, \dots, D_n{}^*),$$

kde $D_i{}^* = max\left\{\left|F_0(x) - \frac{i-1}{n}\right|; \left|F_0(x) - \frac{i}{n}\right|\right\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$



Maximální rozdíl
mezi teoretickou
a empirickou distr. f-cí

Kolmogorovův-Smirnovův jednovýběrový test

H_0: Náhodný výběr pochází z rozdělení se spojitou distribuční funkcí $F_0(x)$.

H_A: Náhodný výběr nepochází z rozdělení se spojitou distribuční funkcí $F_0(x)$.

Testové kritérium: $D_n = \sup|F_n(x) - F_0(x)| = max(D_1{}^*, D_2{}^*, \dots, D_n{}^*)$,

kde $D_i{}^* = max\left\{\left|F_0(x) - \frac{i-1}{n}\right|; \left|F_0(x) - \frac{i}{n}\right|\right\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$

Rozhodnutí:

Nulovou hypotézu zamítáme, pokud $x_{OBS} > D_{n(\alpha)}$.

Je-li n malé $(n \leq 100)$, lze kritické hodnoty $D_{n(\alpha)}$ najít např. v tabulce T14.

Při velkých hodnotách n se kritické hodnoty $D_{n(\alpha)}$ aproximují pomocí vztahu

$$D_{n(\alpha)} \cong \sqrt{\frac{1}{2n} ln\frac{2}{\alpha}}.$$

V tabulce je 10 čísel generovaných jako hodnoty rozdělení $N(19; 0{,}49)$. Ověřte, zda generované hodnoty pocházejí z předpokládaného rozdělení.

x_i	19,732	19,108	19,234	19,038	19,270	19,105	19,473	17,660	20,219	18,727

Řešení:
H_0: Výběr pochází z rozdělení $N(19; 0{,}49)$, H_A: $\overline{H_0}$.

- χ^2test dobré shody nelze použít - malý rozsah výběru, očekávané četnosti v třídících intervalech by nepřekročily požadovanou hodnotu 5.

Kolmogorovův-Smirnovův test (dále K-S test)

Testové kritérium: $D_n = \sup|F_n(x) - F_0(x)| = max({D_1}^*, {D_2}^*, \dots, {D_n}^*)$,

kde ${D_i}^* = max\left\{\left|F_0(x) - \frac{i-1}{n}\right|; \left|F_0(x) - \frac{i}{n}\right|\right\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$

Řešení:

Testové kritérium: $D_n = \sup|F_n(x) - F_0(x)| = max(D_1{}^*, D_2{}^*, \dots, D_n{}^*)$,

kde $D_i{}^* = max\left\{\left|F_0(x) - \frac{i-1}{n}\right|; \left|F_0(x) - \frac{i}{n}\right|\right\}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$

Seřazené hodnoty $x_{(i)}$	Pořadí i	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	$F_0(x_{(i)})$	$\left\|F_0(x_{(i)}) - \frac{i}{n}\right\|$	$\left\|F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right\|$	$D_i{}^*$
17,660	1	0,00	0,10	0,03	0,07	0,03	0,07
18,727	2	0,10	0,20	0,35	0,15	0,25	0,25
19,038	3	0,20	0,30	0,52	0,22	0,32	0,32
19,105	4	0,30	0,40	0,56	0,16	0,26	0,26
19,108	5	0,40	0,50	0,56	0,06	0,16	0,16
19,234	6	0,50	0,60	0,63	0,03	0,13	0,13
19,270	7	0,60	0,70	0,65	0,05	0,15	0,15
19,473	8	0,70	0,80	0,75	0,05	0,05	0,05
19,732	9	0,80	0,90	0,85	0,05	0,05	0,05
20,219	10	0,90	1,00	0,96	0,04	0,06	0,06

V tabulce je 10 čísel generovaných jako hodnoty rozdělení $N(19; 0{,}49)$. Ověřte, zda generované hodnoty pocházejí z předpokládaného rozdělení.

x_i	19,732	19,108	19,234	19,038	19,270	19,105	19,473	17,660	20,219	18,727

Řešení:

H_0: Výběr pochází z rozdělení $N(19; 0{,}49)$, H_A: $\overline{H_0}$.

- χ^2test dobré shody nelze použít - malý rozsah výběru, očekávané četnosti v třídících intervalech by nepřekročily požadovanou hodnotu 5.

K-S test

Pozorovaná hodnota: $x_{OBS} = 0{,}32$

Kritická hodnota: $D_{10(0{,}05)}$ =0,40925 (dle T14)

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme H_0 $(0{,}32 < 0{,}41)$, tj. generované hodnoty lze považovat za výběr z $N(19; 0{,}49)$.

Testy normality ve Statgaphicsu (pro zájemce)

H_0: Výběr pochází z normálního rozdělení.
H_A: Výběr nepochází z normálního rozdělení.

Test na základě šikmosti

Výběrový koeficient šikmosti a_3:

$$a_3 = \frac{1}{s^3 n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3$$

Pochází-li výběr z normálního rozdělení, pak a_3 má asymptoticky normální rozdělení se stř. hodnotou $E(a_3) = 0$ a rozptylem $D(a_3) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$.

Testové kritérium: $Z_3 = \frac{a_3}{\sqrt{D(a_3)}}$

Rozhodnutí:

Nulovou hypotézu zamítáme, překročí-li pozorovaná hodnota kritickou hodnotu, která je tabelována [1], [2]. Máme-li dostatečný rozsah výběru $(n > 200)$, pak $p - hodnota = 2 \cdot min\{\Phi(x_{OBS}); 1 - \Phi(x_{OBS})\}$.

Test na základě špičatosti

Výběrový koeficient špičatosti a_4:

$$a_4 = \frac{1}{s^4 n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4$$

Pochází-li výběr z normálního rozdělení, pak a_3 má asymptoticky normální rozdělení se

stř. hodnotou $E(a_4) = 3 - \frac{6}{n+1}$ a rozptylem $D(a_4) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}$.

Testové kritérium: $Z_4 = \frac{a_4 - E(a_4)}{\sqrt{D(a_4)}}$

Rozhodnutí:

Nulovou hypotézu zamítáme, překročí-li pozorovaná hodnota kritickou hodnotu, která je tabelována [1], [3]. Máme-li dostatečný rozsah výběru $(n > 500)$, pak $p - hodnota = 2 \cdot min\{\Phi(x_{OBS}); 1 - \Phi(x_{OBS})\}$.

Kombinovaný test na základě šikmosti a špičatosti

Testy normality na základě šikmosti a špičatosti by se měly používat zároveň. Proto se často používá test založený na šikmosti a špičatosti zároveň.

Předpoklad testu: $n \geq 200$ (existuje modifikace testu, kterou lze použít již pro $n \geq 20$ [4])

Testové kritérium: $Z_{34} = {Z_3}^2 + {Z_4}^2$

p-hodnota:

$p - hodnota = 1 - F(x_{OBS}),$

kde $F(x)$ je distribuční f-ce χ^2 rozdělení s 2 stupni volnosti.

Lilieforsův test
(modifikace K-S testu pro neúplně specifikovaný test)

Testová statistika: totožná s testovou statistikou K-S testu

Rozhodnutí:

Nulovou hypotézu zamítáme, pokud $x_{OBS} > D_{modif - n(\alpha)}$. Kritické hodnoty $D_{modif - n(\alpha)}$ jsou tabelovány např. v [5].

Andersonův-Darlingův test

Nechť $y_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$. Mějme uspořádaný výběr: $y_{(1)} < y_{(2)} < \cdots < y_{(n)}$.

Testová statistika:

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \left(ln \left(\Phi \left(y_{(i)} \right) \right) - ln \left(\Phi \left(y_{(n-i+1)} \right) \right) \right)$$

Rozhodnutí:

Nulovou hypotézu zamítáme, překročí-li pozorovaná hodnota kritickou hodnotu, která je tabelována např. v [5].

Shapirův-Wilkův test

Jeden z nejsilnějších testů normality. [6]

Online výpočetní applet (Simon Dittami, 2009) pro tento test naleznete zde.

Literatura

1. Pearson, A. V., and Hartley, H. O. (1972). *Biometrica Tables for Statisticians, Vol 2*, Cambridge, England, Cambridge University Press.
2. Mulholland, H. P. (1977), "On the *Null Distribution* of √ b1 for *Samples of Size at Most 25, with Tables*," Biometrika, 64, 401–409.
3. D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A., eds. (1986). *Goodness-of-Fit Techniques*. Dekker, New York.
4. D'Agostino, Ralph B.; Albert Belanger; Ralph B. D'Agostino, Jr (1990). "A suggestion for using powerful and informative tests of normality". *The American Statistician* 44 (4): 316–321. JSTOR 2684359.
5. Sprent, P. (1993). *Applied Nonparametric Statistical Methods* (Second Edition). Chapman & Hall, London.
6. Shapiro, S.S., Wilk, M.B. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*. 1965, roč. 52, č. 3/4, s. 591-611. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/2333709.

Děkuji za pozornost!