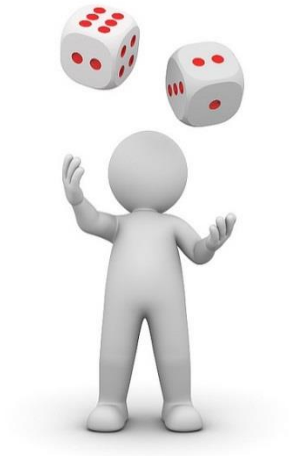
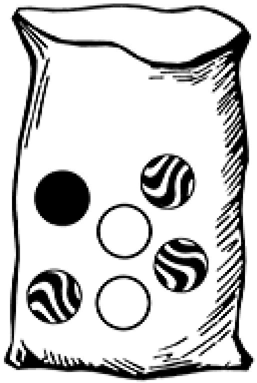
Kombinatorika a klasická pravděpodobnost

Martina Litschmannová





VŠB – TU Ostrava, FEI

Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru z daného souboru.

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členu n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?

Řešení

V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_1 = 6$, ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_2 = 6$. Počet různých dvojic ($k = 2$) je tedy $6 \cdot 6 =$ **36**.

Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru z daného souboru.

Kombinatorické pravidlo součtu

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2, \cup \cdots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Kolik máme pastelek, jestliže máme tři žluté, dvě modré a čtyři zelené pastelky?

Řešení:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

Kombinatorika

Kombinatorika se zabývá různými způsoby výběru z daného souboru.

Uspořádané výběry		
Bez opakování	Variace bez opakování	$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
	Permutace bez opakování	$P(n) = V(n,n) = n!$
S opakováním	Variace s opakováním	$V^*(n,k) = n^k$
	Permutace s opakováním	$P^*(n_1,\ n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot\ n_2! \cdot\ \cdots\ \cdot\ n_k!}$

Neuspořádané výběry		
Bez opakování	Kombinace bez opakování	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
S opakováním	Kombinace s opakováním	$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

Kombinatorika
Variace bez opakování

Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

1. místo	2. místo	3. místo
↑	↑	↑
8 ·	*7* ·	*6*

Kombinatorika
Variace bez opakování

Nechť *A* je množina o *n* prvcích. Vyberme z množiny postupně *k* prvků, přičemž prvky do množiny nevracíme.

1. prvek	2. prvek	3. prvek	…	k. prvek

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\boxed{V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

1. místo	2. místo	3. místo

$$8 \cdot 7 \cdot 6$$

Kombinatorika
Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo



Kombinatorika
Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo   2. křeslo   3. křeslo



Kombinatorika
Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo
		

Kombinatorika
Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo
		

Kombinatorika
Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo
		

Kombinatorika
Permutace bez opakování

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo | 2. křeslo | 3. křeslo



Permutace
=
Přesmyčky

Kombinatorika
Permutace bez opakování

Nechť *A* je množina o *n* prvcích. Vyberme z množiny postupně *n* prvků, přičemž prvky do množiny nevracíme.

1. prvek	2. prvek	3. prvek	…	n. prvek		
↑	↑	↑		↑		
n ·	$(n-1)$ ·	$(n-2)$ ·	… ·	1	=	$n!$

$$\boxed{P(n) = n!}$$

Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1. křeslo	2. křeslo	3. křeslo
↑	↑	↑
3 ·	**2** ·	**1**

Permutace
=
Přesmyčky

Kombinatorika
Kombinace bez opakování

<u>Nezáleží-li nám na pořadí</u> ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků k!. Proto je počet kombinací bez opakování k! krát menší než počet variací bez opakování:

$$C(n,k)=\frac{V(n,k)}{k!}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k}$$

$$\boxed{C(n,k)=\binom{n}{k}}$$

Sportka je numerická hra, v níž se losuje 6 čísel ze 49. Hráč na svém tiketu zaškrtne 6 čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit, chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne“ všechna čísla?

$$C(49,6)=\binom{49}{6}=13\ 983\ 816$$

Kombinatorika
Variace s opakováním

Nechť *A* je množina o *n* prvcích. Vyberme z množiny <u>postupně</u> *k* prvků, přičemž prvky do množiny <u>vracíme</u>.

1. prvek	2. prvek	3. prvek	…	k. prvek		
n $\cdot$	n $\cdot$	n $\cdot$	… $\cdot$	n	$=$	n^k

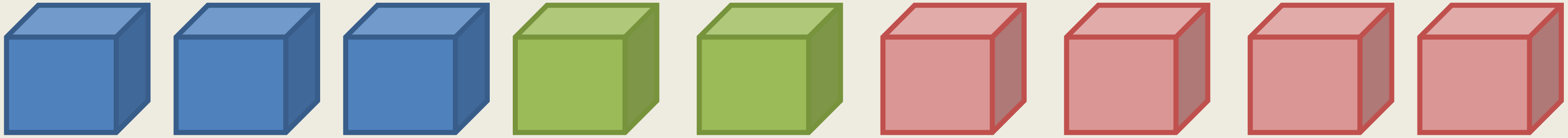
$$V^*(n,k) = n^k$$

Kolik 4 ciferných čísel lze vytvořit z číslic 4, 5, 6, 7, 8?

1. cifra	2. cifra	3. cifra	4. cifra	
5 $\cdot$	5 $\cdot$	5 $\cdot$	5	$=5^4$

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

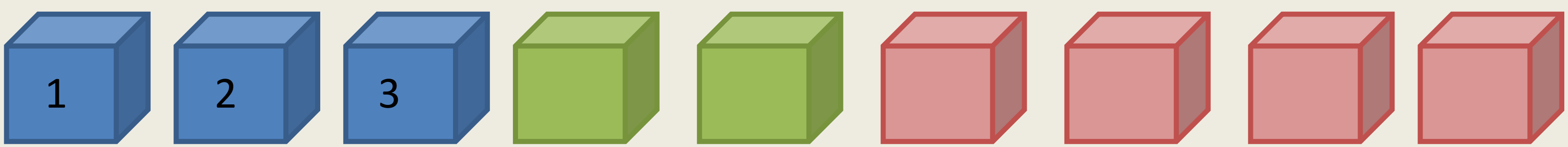


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

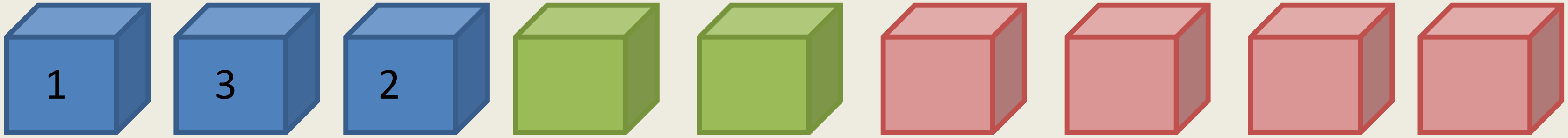


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

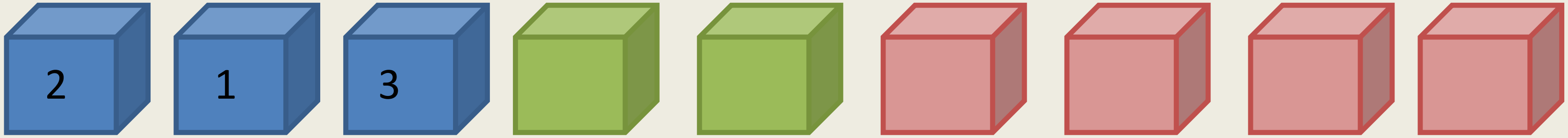


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

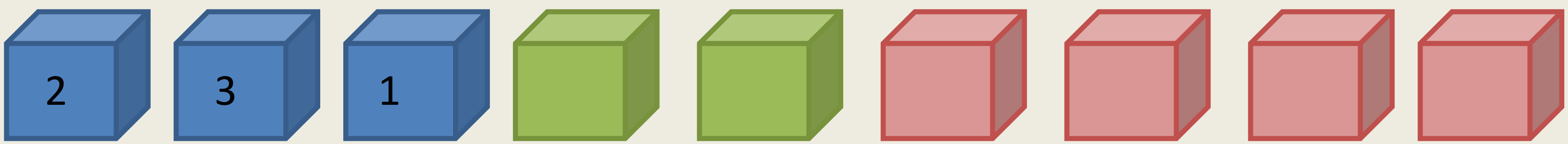


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

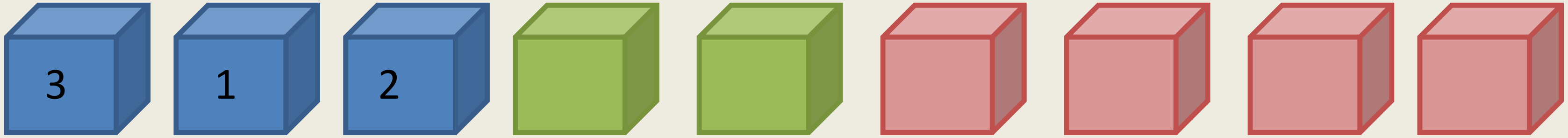


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.

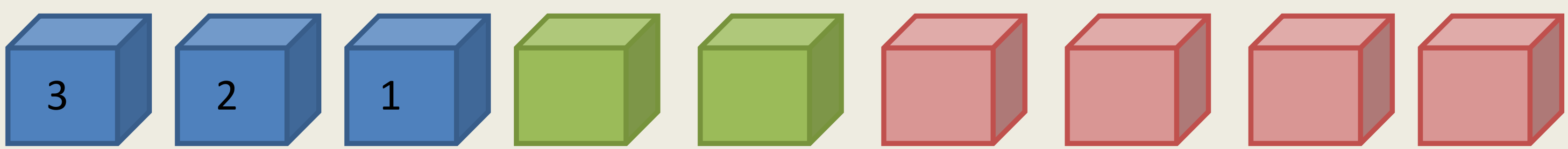


Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



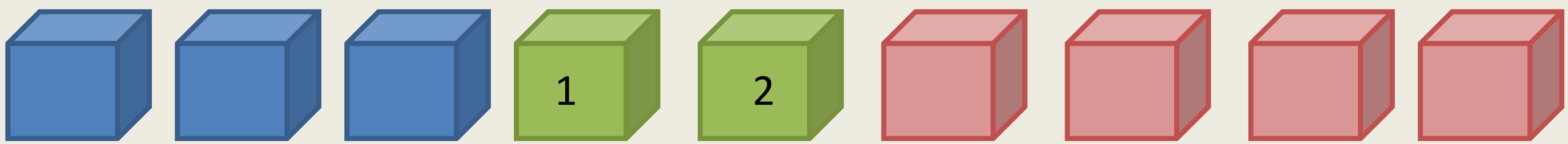
Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Každých 3! pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí modrých kostek.

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



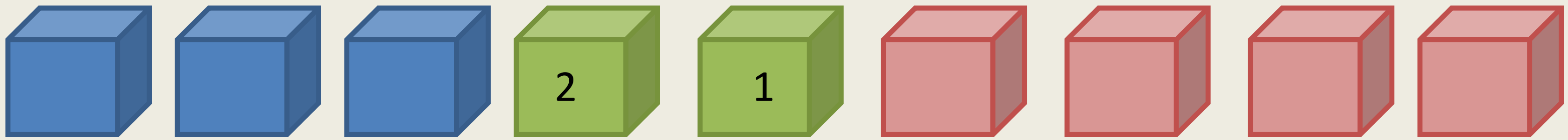
Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

Každých 3! pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí modrých kostek.

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

ALE!

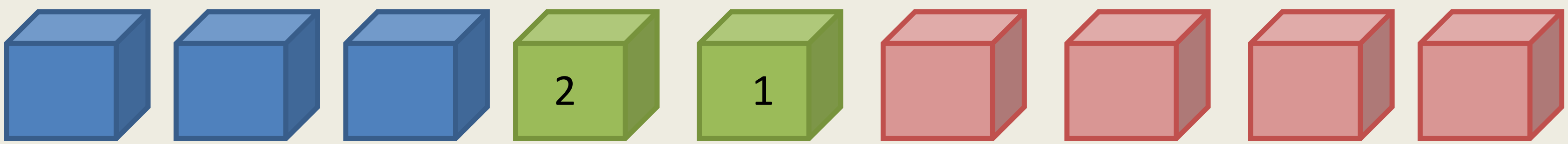
Každých 3! pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí modrých kostek.
Každých 2! pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí zelených kostek.
Každých 4! pořadí je stejných, protože se v nich mění pouze pořadí růžových kostek.

Kombinatorika
Permutace s opakováním

Počet $P^*(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé z nich opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – krát je:

$$P^*(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Mějme 3 modré, 2 zelené a 4 růžové kostky. Určete, kolika způsoby je možné tyto kostky seřadit.



Byly-li by každé dvě kostky navzájem různé, bylo by těchto možností $(3+2+4)!$.

Výsledný počet pořadí je proto: $\dfrac{(3+2+4)!}{3!\cdot 2!\cdot 4!} = P^*(3,2,4)$.

Kombinatorika
Kombinace s opakováním

Mějme množinu n prvků. Počet neuspořádaných k-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše k krát označujeme jako počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním a značíme C*(n,k).

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?
Řešení:
Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy C*(3,2), tj. počet neúspořádaných dvojic (k=2) ze 3 prvků (n=3), přičemž prvky se mohou opakovat.
Označme každý dopis symbolem ●.

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka
1	●●		
2		●●	
3			●●
4	●	●	
5	●		●
6		●	●

Kombinatorika
Kombinace s opakováním

Mějme množinu *n* prvků. Počet neuspořádaných *k*-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše *k* krát označujeme jako počet kombinací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním a značíme C*(n,k).

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?
Řešení:
Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy C*(3,2), tj. počet neúspořádaných dvojic (*k*=2) ze 3 prvků (*n*=3), přičemž prvky se mohou opakovat.
Označme každý dopis symbolem ●.

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka	
1	●●			{1,1}
2		●●		{2,2}
3			●●	{3,3}
4	●	●		{1,2}
5	●		●	{1,3}
6		●	●	{2,3}

Kombinatorika
Kombinace s opakováním

Mějme množinu *n* prvků. Počet neuspořádaných *k*-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše *k* krát označujeme jako počet kombinací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním a značíme C*(n,k).

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy C*(3,2), tj. počet neúspořádaných dvojic (*k*=2) ze 3 prvků (*n*=3), přičemž prvky se mohou opakovat.

Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |.

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		Symbolický zápis
1	●●			{1,1}	●●||
2		●●		{2,2}	|●●|
3			●●	{3,3}	||●●
4	●	●		{1,2}	●|●|
5	●		●	{1,3}	●||●
6		●	●	{2,3}	|●|●

Kombinatorika
Kombinace s opakováním

Mějme množinu *n* prvků. Počet <u>neuspořádaných</u> *k*-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše *k* krát označujeme jako počet kombinací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním a značíme C*(n,k).

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy C*(3,2), tj. počet neúspořádaných dvojic (*k*=2) ze 3 prvků (*n*=3), přičemž prvky se mohou opakovat. Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |. Všimněte si, že každé uskupení dopisů odpovídá právě jednomu symbolickému zápisu,

Číslo uskupení	1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		Symbolický zápis
1	●●			{1,1}	●●||
2		●●		{2,2}	|●●|
3			●●	{3,3}	||●●
4	●	●		{1,2}	●|●|
5	●		●	{1,3}	●||●
6		●	●	{2,3}	|●|●

Kombinatorika
Kombinace s opakováním

Mějme množinu *n* prvků. Počet <u>neuspořádaných</u> *k*-tic, v nichž se každý prvek vyskytuje nejvýše *k* krát označujeme jako počet kombinací *k*-té třídy z *n* prvků s opakováním a značíme C*(n,k).

$$C^*(n,k) = P^*(n-1,k) = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Kolik je možností jak rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Řešení:

Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy C*(3,2), tj. počet neúspořádaných dvojic (*k*=2) ze 3 prvků (*n*=3), přičemž prvky se mohou opakovat.

Označme každý dopis symbolem ● a každé oddělení dvou sousedních přihrádek symbolem |. Všimněte si, že každé uskupení dopisů odpovídá právě jednomu symbolickému zápisu, přičemž pro vytvoření symbolického zápisu potřebujeme 2 (*k*) symbolů ● a 2 (*n*-1) symbolů |. Je zřejmé, že C*(3,2) lze určit jako počet možných uspořádání 2 (*k*) symbolů ● a 2 (*n*-1) symbolů |.

$$C^*(3,2) = P^*(2,2) = \frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!} = 6$$

Číslo uskupení		Symbolický zápis
1	{1,1}	●●||
2	{2,2}	|●●|
3	{3,3}	||●●
4	{1,2}	●|●|
5	{1,3}	●||●
6	{2,3}	|●|●

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**. Nechť Ω je **množina všech jeho výsledků** a jev A je nějaké **tvrzení o výsledku náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, pak

$$P(A) = \frac{počet\ všech\ výsledků\ příznivých\ jevu\ A}{počet\ všech\ výsledků}.$$

čti: pravděpodobnost jevu *A*

Úvod do teorie pravděpodobnosti

je tématem první přednášky.