

VYBRANÁ ROZDĚLENÍ DISKRÉTNÍ NÁH. VELIČINY

Martina Litschmannová



Opakování

Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

- Co je to náhodná veličina (dále NV)?

Číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu.

- Jaké základní typy náhodných veličin známe?

Diskrétní NV (dále DNV) a spojité NV (dále SNV).

- Co je to rozdělení pravděpodobnosti?

Předpis, který jednoznačně určuje všechny pravděpodobnosti typu $P(X \in M)$, kde $M \subset \mathbb{R}$ (tj. $P(X = a)$, $P(X < a)$, $P(X > a)$, $P(a < X < b)$, ..., kde $a, b \in \mathbb{R}$).

Opakování

Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

- Jak lze popsat rozdělení pravděpodobnosti DNV?

Distribuční funkcí $F(x) = P(X < x)$, resp. pravděpodobnostní funkcí $P(x_i)$.

- Jak lze popsat rozdělení pravděpodobnosti SNV?

Distribuční funkcí $F(x) = P(X < x)$, resp. hustotou pravděpodobností $f(x)$.

- Jaké základní číselné charakteristiky používáme pro popis NV?

Střední hodnota $E(X)$, rozptyl $D(X)$, směrodatná odchylka $\sigma(X)$, p -kvantily x_p .

Opakování

Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti

- Co nám říká Čebyševova nerovnost?

$$\forall k > 0: P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$$

Např.: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) > 0$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) > 0,75$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) > 0,89$$

Poznámka: $\mu = E(X)$, $\sigma = \sigma(X)$.

Diskrétní náhodná veličina

Příklady

Technika:

—počet šroubů typu M10 mezi 10 vybranými (víme-li, že do dodávky 100 šroubů bylo omylem zařazeno 20 šroubů typu M50)

Biomedicína:

—počet pacientů (z 10 očkovaných) u nichž byla použita prošlá očkovací látka (víme-li, že v balení bylo 20 dávek očkovací látky, přičemž 5 z nich bylo prošlých)

Obecně:

—počet úspěchů v n (závislých) pokusech

Diskrétní náhodná veličina

Příklady

Technika:

— počet správně přenesených bitů předtím než dojde ke 4. chybě (víme-li, že pravděpodobnost chybného přenosu bitu je 0,12)

Biomedicína:

— počet dobrovolníků, které budeme muset testovat dříve než najdeme 5 dárců s krevní skupinou AB (předpokládejme, že dobrovolníci neznají svou krevní skupinu, pravděpodobnost výskytu krevní skupiny (populační frekvence) krevní skupiny AB je 0,05)

Obecně:

— počet (nezávislých) pokusů do k . úspěchů

Diskrétní náhodná veličina

Příklady

Technika:

—počet škrábanců na 1 m^2 lakovaného povrchu (víme-li, že průměrně lze očekávat 3 škrábance na 10 m^2)

Biomedicína:

—počet červených krvinek v 10 ml krve ženy (víme-li, že u průměrně lze pozorovat $4,8 \cdot 10^{12}$ červených krvinek v 1l krve (u žen))

Obecně:

—počet události v časovém intervalu, na ploše, v objemu

Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- Alternativní rozdělení
- Hypergeometrické rozdělení
- Binomické rozdělení
- Negativně binomické rozdělení
- Geometrické rozdělení
- Poissonovo rozdělení

Alternativní rozdělení

- nastane-li sledovaný náhodný jev A (budeme říkat, že došlo k výskytu události, resp. že došlo k úspěchu), bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 1$, nenastane-li jev A , bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 0$.

X ... počet výskytů daného náhodného jevu (úspěchů) v jednom pokusu

$$X \sim A(\pi)$$



pravděpodobnost úspěchu
(parametr rozdělení)

Pravděpodobnostní funkce:

$$P(X = 1) = \pi$$

$$P(X = 0) = 1 - \pi$$

Střední hodnota: $E(X) = \pi$

Rozptyl: $D(X) = \pi(1 - \pi)$

(dokažte!)

Bernoulliho pokusy

Posloupnost nezávislých pokusů majících pouze dva možné výsledky

(tj. takových pokusů, kdy úspěch v libovolné skupině pokusů neovlivňuje pravděpodobnost úspěchu v pokusu, který do této skupiny nepatří),

v nichž jev A (úspěch) nastává s pravděpodobností π
a neúspěch s pravděpodobností $1 - \pi$.



Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je

a) je právě jedna dívka?

X ... počet dívek mezi 4 dětmi

D ... narodí se dívka, $P(D) = \pi$

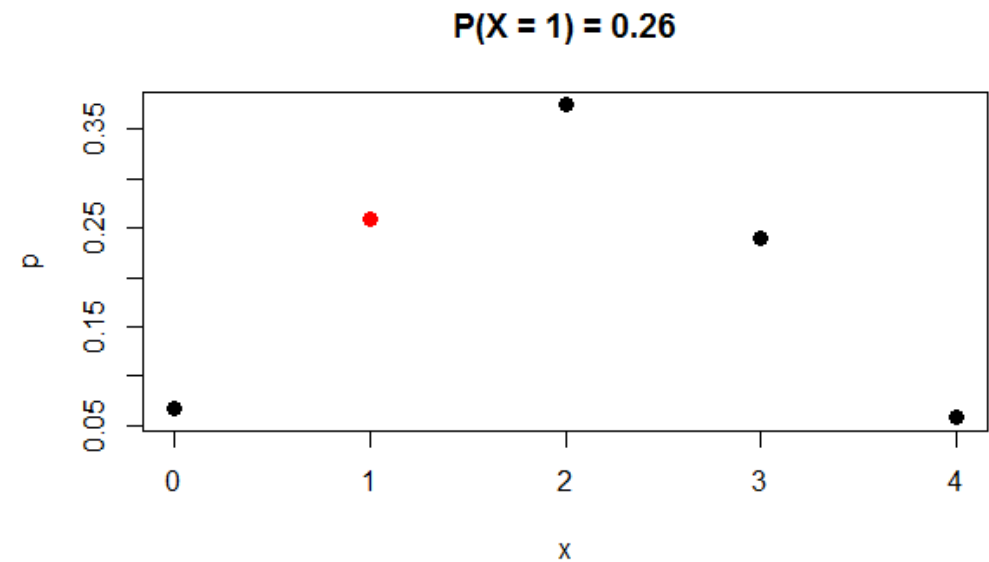
\bar{D} ... narodí se kluk, $P(\bar{D}) = 1 - \pi$

$(X = 1) \dots \{D\bar{D}\bar{D}\bar{D}, \bar{D}D\bar{D}\bar{D}, \bar{D}\bar{D}D\bar{D}, \bar{D}\bar{D}\bar{D}D\}$

$$P(\bar{D}D\bar{D}\bar{D}) = P(\bar{D}\bar{D}D\bar{D}) = P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D) = \pi \cdot (1 - \pi)^3$$

$$P(X = 1) = P(D\bar{D}\bar{D}\bar{D} \cup \bar{D}D\bar{D}\bar{D} \cup \bar{D}\bar{D}D\bar{D} \cup \bar{D}\bar{D}\bar{D}D) = \binom{4}{1} \cdot \pi \cdot (1 - \pi)^3$$

$$P(X = 1) = \mathbf{0,260}$$



Binomické rozdělení

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

$$X \sim Bi(n; \pi)$$

↑ ↑
pravděpodobnost úspěchu
počet pokusů

Počet příznivých realizací posloupnosti Bernoulliho pokusů.

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \binom{n}{k} \underbrace{\pi^k (1 - \pi)^{n-k}}$

Pravděpodobnost výskytu jedné příznivé realizace posloupnosti Bernoulliho pokusů.



Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi čtyřmi dětmi v rodině je

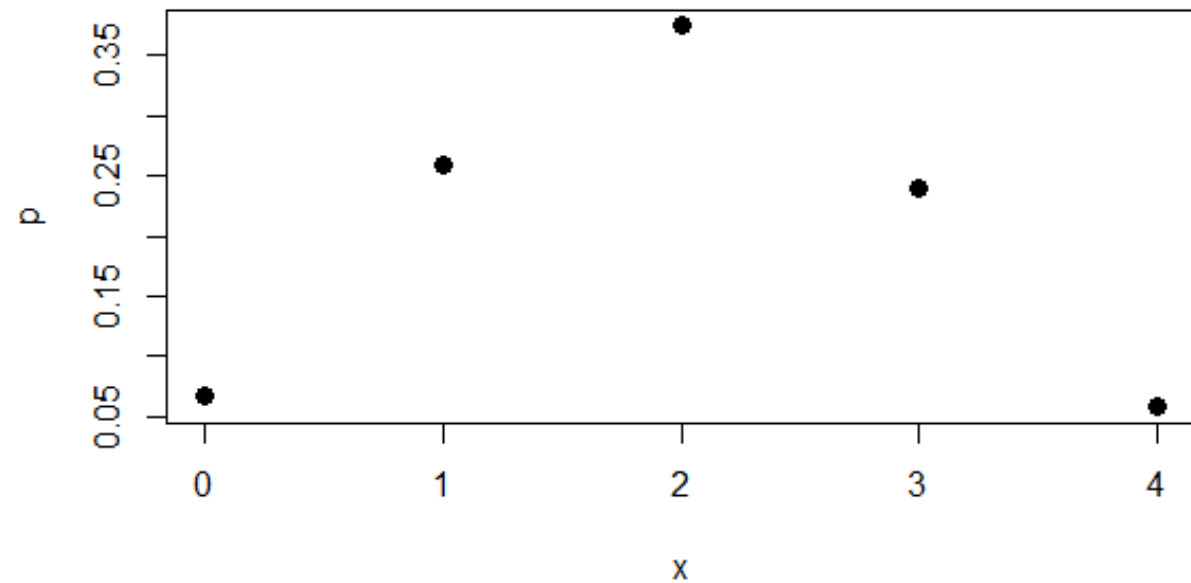
- a) je právě jedna dívka?
- b) jsou méně než dvě dívky?
- c) je více než jedna dívka?

VR: $P(X = k), P(X \leq k)$

$$P(X = 1)$$

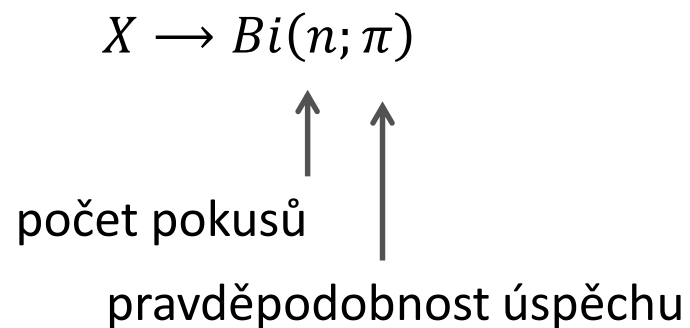
$$P(X < 2) = P(X \leq 2)$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$



Binomické rozdělení

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech



Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$

Střední hodnota: $E(X) = n\pi$

Rozptyl: $D(X) = n\pi(1 - \pi)$

(dokažte!)

Binomické rozdělení

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

$$X \rightarrow Bi(n; \pi)$$

↑ ↑
počet pokusů pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$

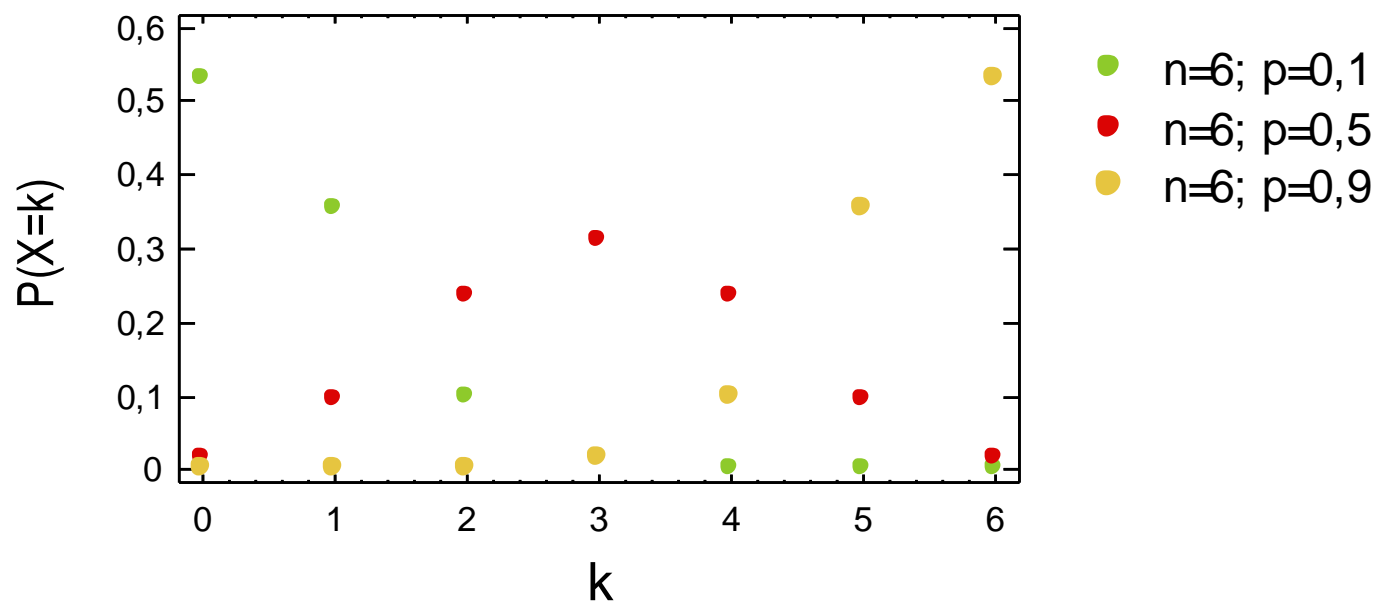
Střední hodnota: $E(X) = n\pi$

Rozptyl: $D(X) = n\pi(1 - \pi)$

Příklady: počet chlapců mezi 10 000 novorozenci, počet vadných výrobků mezi 30 testovanými, počet nevzrostlých rostlin ze 100 zasazených cibulek...

Binomické rozdělení - vlastnosti

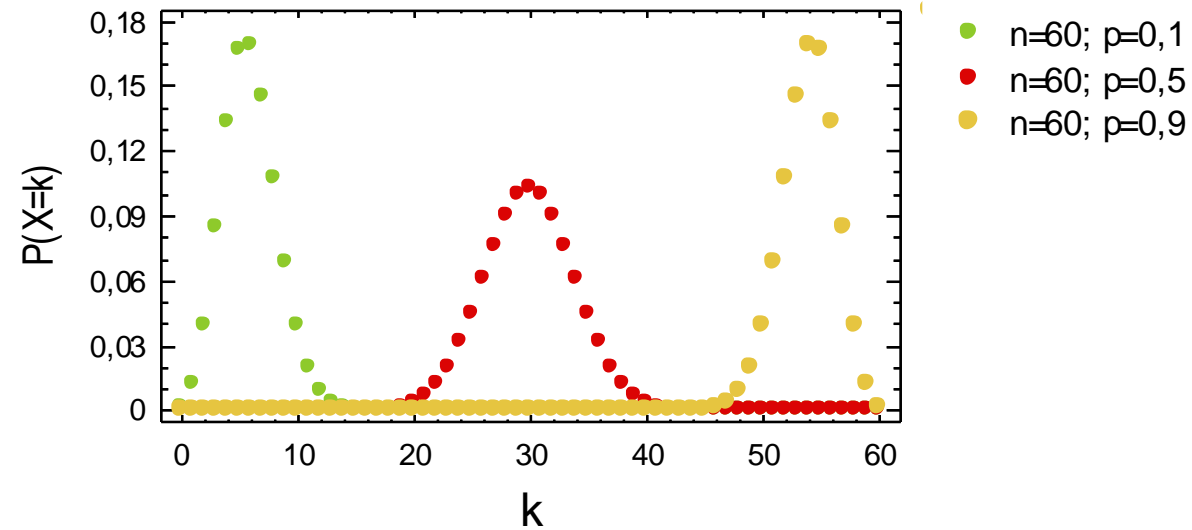
X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech



- $\pi < 0,5$, malé $n \Rightarrow$ poz. zešikmené r.
- $\pi = 0,5 \Rightarrow$ symetrické r.
- $\pi < 0,5$, malé $n \Rightarrow$ neg. zešikmené r.

Binomické rozdělení - vlastnosti

X ... počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

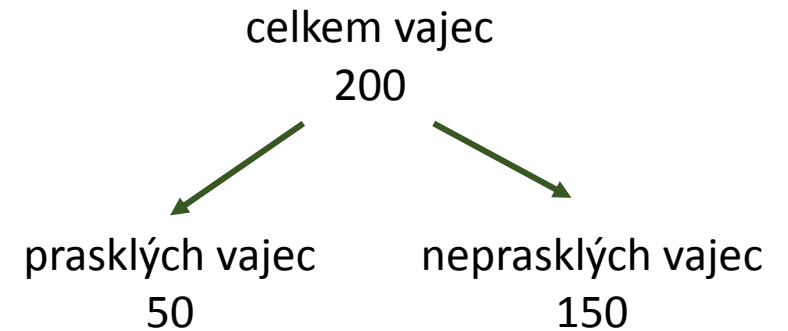


- $\pi < 0,5$, malé $n \Rightarrow$ poz. zešikmené r.
- $\pi = 0,5 \Rightarrow$ symetrické r.
- $\pi > 0,5$, malé $n \Rightarrow$ neg. zešikmené r.
- $\pi \neq 0,5$, s rostoucím n se rozdělení stává více a více symetrickým



Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 vajec, bude 8 z nich prasklých?

X ... počet prasklých vajec z 20 vybraných (výběr bez vracení)



$$P(X = 8) = \frac{\binom{50}{8} \binom{150}{12}}{\binom{200}{20}}$$

počet příznivých možností

– vybíráme 8 prasklých z 50 prasklých a zároveň 12 ze 150 neprasklých

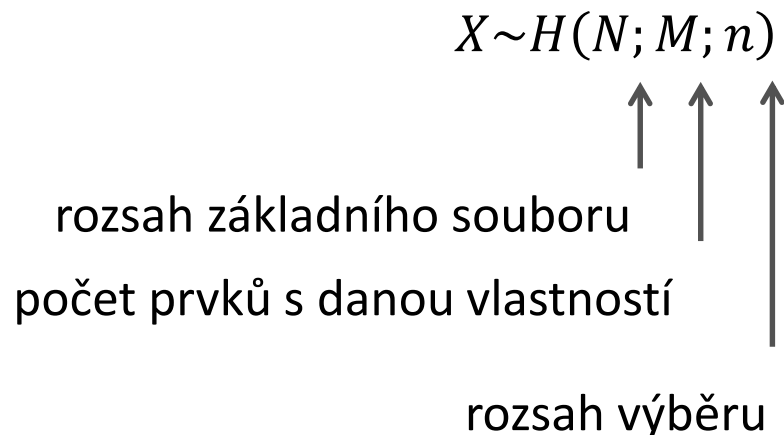
počet všech možností

– vybíráme 20 vajec z 200

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru N prvků je M prvků s danou vlastností a zbylých $(N - M)$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru n prvků, z nichž žádný **nevracíme zpět**.

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků



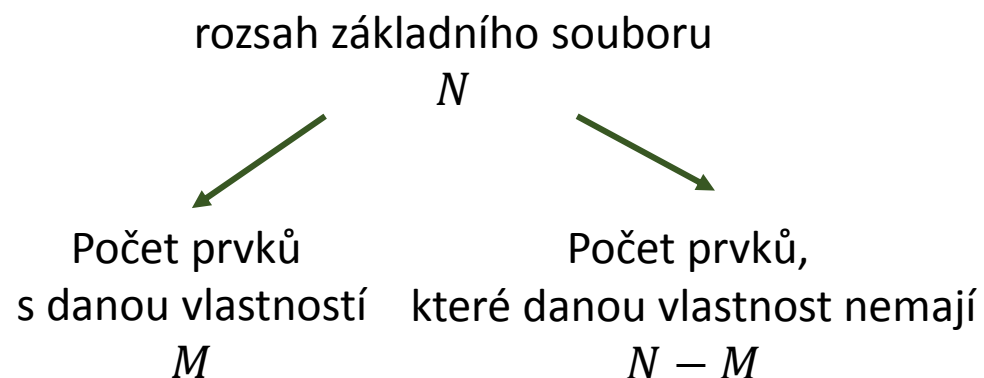
Hypergeometrické rozdělení

- v souboru N prvků je M prvků s danou vlastností a zbylých $(N - M)$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru n prvků, z nichž žádný **nevracíme zpět**.

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

Pravděpodobnostní funkce:
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$



Počet příznivých možností, tj. počet možností jak vybrat k prvků s danou vlastností z M a zároveň $(n - k)$ prvků, které uvedenou vlastnost nemají z $(N - M)$ prvků.

Počet všech možností, jak vybrat n prvků z N (nezáleží na pořadí).

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru N prvků je M prvků s danou vlastností a zbylých $(N - M)$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru n prvků, z nichž žádný **nevracíme zpět**.

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Střední hodnota: $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Rozptyl: $D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Hypergeometrické rozdělení

- v souboru N prvků je M prvků s danou vlastností a zbylých $(N - M)$ prvků tuto vlastnost nemá. Postupně vybereme ze souboru n prvků, z nichž žádný **nevracíme zpět**.

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků

$$X \sim H(N; M; n)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Střední hodnota: $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Rozptyl: $D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

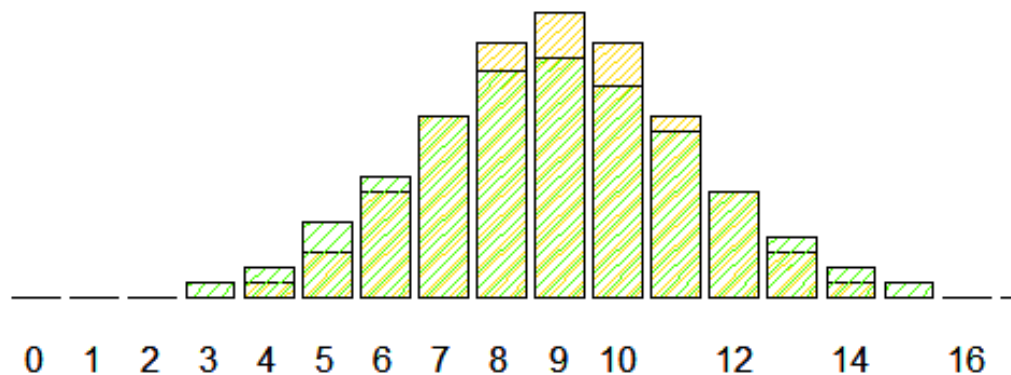
Příklady: počet vadných výrobků mezi 10 vybranými z dodávky 30 výrobků, mezi nimiž bylo 7 vadných, počet dívek v náhodně vybrané skupině 4 dětí ze třídy, v níž je 6 chlapců a 8 dívek, ...

Hypergeometrické rozdělení - možnost aproximace

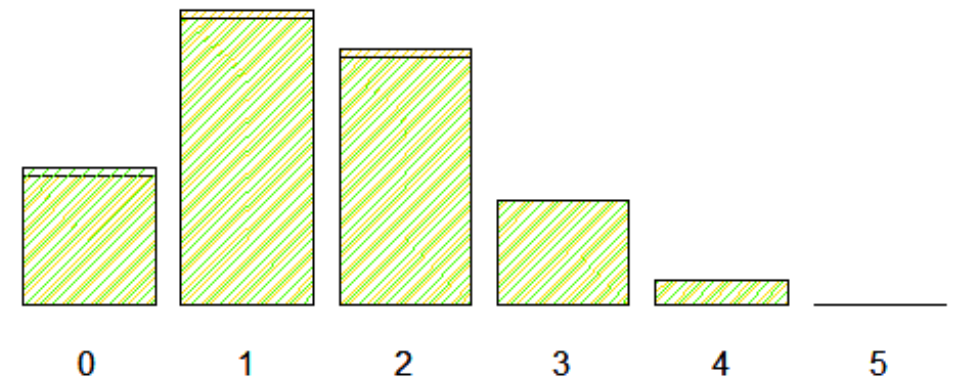
Je-li n/N , tzv. **výběrový poměr**, menší než 0,05, lze hypergeometrické rozdělení nahradit binomickým s parametry n a M/N .

$$\left(\frac{n}{N} < 0,05\right) \Rightarrow \left[H(N; M; n) \approx Bi\left(n; \frac{M}{N}\right) \right]$$

■ $H(N = 100, M = 30, n = 30)$ ■ $Bi(n = 30, \pi = 0.3)$



■ $H(N = 100, M = 30, n = 5)$ ■ $Bi(n = 5, \pi = 0.3)$



Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

X ... počet Bernoulliho pokusů do k . výskytu události (úspěchu), včetně k . výskytu

$$X \sim NB(k; \pi)$$

požadovaný počet úspěchů (výskytů události)

pravděpodobnost úspěchu

Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

X ... počet Bernoulliho pokusů do k . výskytu události (úspěchu), včetně k . výskytu

$X \sim NB(k; \pi)$

požadovaný počet úspěchů (výskytů události) \uparrow

pravděpodobnost úspěchu \uparrow

Pravděpodobnostní funkce:

$$P(X = n) = \underbrace{\binom{n-1}{k-1} \pi^{k-1} (1-\pi)^{(n-1)-(k-1)}}_{\text{pravděpodobnost } k-1 \text{ úspěchů v } n-1 \text{ Bernoulliho pokusech}} \cdot \underbrace{\pi}_{\text{pravděpodobnost } k. \text{ úspěchu}}$$

Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

X ... počet Bernoulliho pokusů do k . výskytu události (úspěchu), včetně k . výskytu

$$X \sim NB(k; \pi)$$

požadovaný počet úspěchů (výskytů události)

pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} \pi^{k-1} (1-\pi)^{(n-k)} \cdot \pi$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{k}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{k(1-\pi)}{\pi^2}$

Příklady: počet dárců neznajících svou krevní skupinu, které musíte testovat proto, abyste našli 4 dárce s krevní skupinou 0, počet cestujících, které musí revizor zkontrolovat do chvíle, než najde 10 černých pasažérů, ...



Dle <http://ksicht.natur.cuni.cz/serialy/detektivni-chemie/3> je pravděpodobnost výskytu krevní skupiny A+ 35%. V polní nemocnici nutně potřebují najít 3 dárce krve s touto krevní skupinou. Potenciálních dárců je dostatek, nikdo z nich však nezná svou krevní skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+, budeme muset postupně vyšetřit více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců?

Řešení:

X ... počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+
 $X \sim NB(k = 3; \pi = 0,35)$

$$P(7 < X < 12) = \sum_{n=8}^{11} \binom{n-1}{2} 0,35^3 \cdot 0,65^{n-3} \cong 0,332$$

Pro výpočet lze použít [applet Vybraná rozdělení pravděpodobnosti](#).

POZOR!!!



V případě negativně binomické náhodné veličiny není definice ustálená. Někteří statistici (popř. statistický software) ji definují jako **počet neúspěchů před k . úspěchem.**



Jak se to projeví v praktickém výpočtu
pravděpodobnostní funkce?

Geometrické rozdělení

- Geometrické rozdělení je speciálním typem negativně binomického rozdělení pro $k = 1$.

X ... počet Bernoulliho pokusů do **prvního** výskytu události (úspěchu), včetně.

$$X \sim Ge(\pi)$$



pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \pi(1 - \pi)^{n-1}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{(1-\pi)}{\pi^2}$

Geometrické rozdělení

- Geometrické rozdělení je speciálním typem negativně binomického rozdělení pro $k = 1$.

X ... počet Bernoulliho pokusů do **prvního** výskytu události (úspěchu), včetně.

$$X \sim Ge(\pi)$$



pravděpodobnost úspěchu

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = n) = \pi(1 - \pi)^{n-1}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\pi}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{(1-\pi)}{\pi^2}$

Příklady: počet volání nutných k tomu, abychom se dovolali do televizní soutěže, počet řidičů, kteří podstoupí test na obsah alkoholu v krvi do doby, než bude nalezen první podnapilý řidič, ...

Poissonův proces

Bodový proces

- Sledujeme chod procesu, v němž čas od času dochází k nějaké význačné události.



- Registrujeme počet události $N(s; t)$ v časovém intervalu $\langle s; s + t \rangle$

Jako **Poissonův proces** označujeme proces, který je:

- **ordinární** – tj. pravděpodobnost výskytu více než jedné události v limitně krátkém časovém intervalu ($t \rightarrow 0$) je nulová. (tzv. **řídke jevy**),
- **stacionární** – tj. rychlost výskytu událostí λ je konstantní v průběhu celého sledovaného intervalu,
- **beznásledný** – tj. pravděpodobnost výskytu události není závislá na čase, který uplynul od minulé události.

Poissonův proces

- Rychlost výskytu události λ je parametrem Poissonova procesu.
- Poissonův proces lze obdobně jako v časovém intervalu definovat na libovolné uzavřené prostorové oblasti (na ploše, v objemu).

Poissonovo rozdělení

- Definujme si náhodný pokus jako Poissonův proces (nezávislé události probíhající v čase t , s rychlostí výskytu λ ; popř. nezávislé události objevující se na ploše t , resp. v objemu t s hustotou výskytu λ). Pak

X ... počet výskytu události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)

$$X \sim Po(\lambda t)$$

Pravděpodobnostní funkce: $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

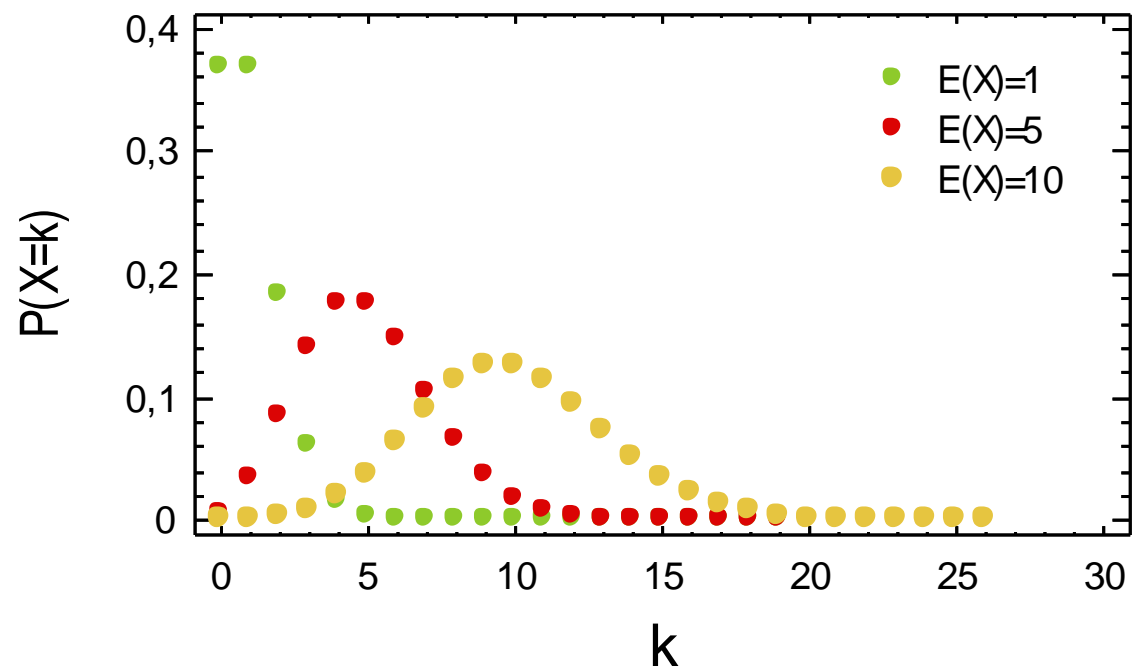
Střední hodnota, rozptyl: $E(X) = D(X) = \lambda t$

Příklady: počet pacientů ošetřených během dopoledních ordinačních hodin,
počet mikrodefektů na zadaném vzorku materiálu, počet mikroorganismů v 1 dl vody, ...

Poissonovo rozdělení - $Po(\lambda t)$

X ... počet výskytu události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)

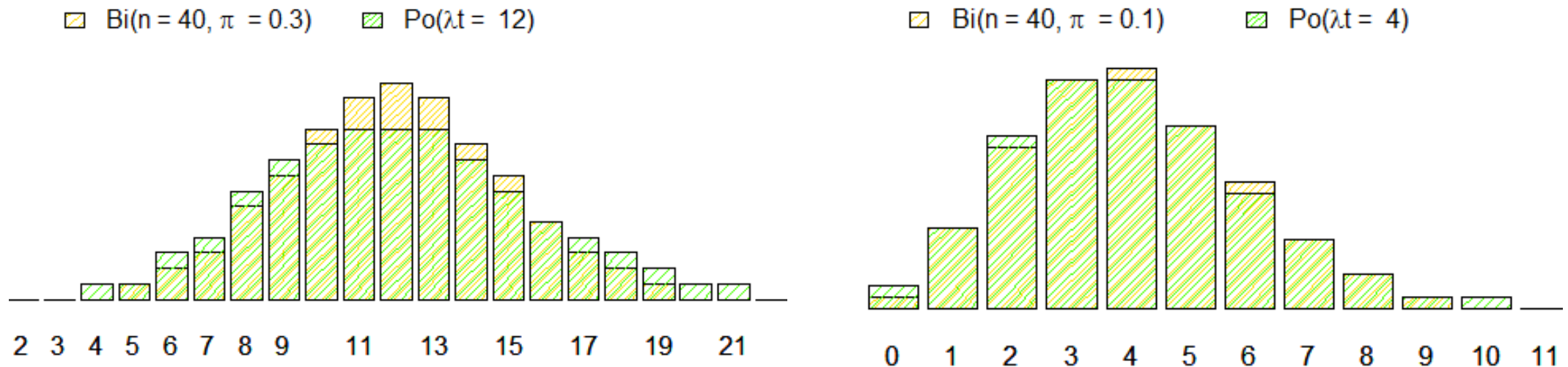
$$X \sim Po(\lambda t)$$



Aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým

Poissonovým rozdělením lze velmi dobře aproximovat binomické rozdělení pro případ, že počet pokusů n je dostatečně velký ($n > 30$) a pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) je dostatečně malá ($\pi < 0,1$). V takovém případě je $\lambda t = n\pi$.

$$(n > 30 \wedge \pi < 0,1) \Rightarrow Bi(n, \pi) \approx Po(n\pi)$$





Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut zapojí ústředna

- a) právě jeden hovor?
- b) alespoň dva hovory?

Další příklad – video:

http://am-nas.vsb.cz/lit40/PRASTA/Videa/DNV_poisson/index.html

Vybraná rozdělení diskrétní náhodné veličiny - přehled

Popis	Podmínky		Název náhodné veličiny - symbolický zápis
počet úspěchů v n pokusech	nezávislé pokusy	$k = 1$	Alternativní - $A(\pi)$
			Binomická - $Bi(n, \pi)$
	závislé pokusy		Hypergeometrická - $H(N, M, n)$
počet pokusů do k . úspěchu (včetně)	nezávislé pokusy	$k = 1$	Geometrická - $Ge(\pi)$
			Negativně binomická (Pascalova) - $NB(k, \pi)$
počet události v uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu)	ordinarita, stacionarita, beznáslednost procesu		Poissonova - $Po(\lambda t)$

DĚKUJI ZA POZORNOST!

