

NÁHODNÁ VELIČINA – PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1. Pro distribuční funkci náhodné veličiny X platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0,00 & x \leq 100 \\ 0,15 & 100 \leq x < 200 \\ 0,45 & 200 \leq x < 300 \\ 0,80 & 300 \leq x < 500 \\ 1,00 & x > 500 \end{cases}$$

- a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X , její střední hodnotu a směrodatnou odchylku.
b) Náhodná veličina $Y = \frac{100-X}{100}$, určete $F_Y(y)$, $P_Y(y)$, $E(Y)$ a $D(Y)$.
c) Náhodná veličina $W = Y^2$, určete $F_W(w)$, $P_W(w)$, $E(W)$ a $D(W)$.
2. Na skládce leží 20 solárních panelů. 5 z nich má skrytou vadu.
a) Popište rozdělení náhodné veličiny X , kde X je počet panelů se skrytou vadou ze 4 náhodně vybraných. (pravděpodobnostní funkce, distribuční funkce, střední hodnota, směrodatná odchylka)
b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi 4-mi náhodně vybranými panely budou méně než 3 panely se skrytou vadou?
3. Předpokládejme, že X má diskrétní rozdělení takové, že platí $P(X = k) = ck^2$ pro $k = 1; 2; 3$ a $P(X = k) = 0$ jinak. Určete:
a) hodnotu c ,
b) distribuční funkci náhodné veličiny X ,
c) střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient náhodné veličiny X ,
d) $P(X < 2)$, $P(X \in \{1; 3\})$.
4. V krabici je pět bílých a tři modré koule.
a) Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X , popisující počet pokusů nutných k vytažení modré koule.
b) Určete střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient počtu pokusů nutných k vytažení modré koule.
5. Nezávislé náhodné veličiny X a Y mají následující střední hodnotu a rozptyl: $E(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 9$. Definujme náhodné veličiny Z a Q jako $Z = 4X - 2Y + 12$ a $Q = -2X + Y - 7$. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin Z a Q .
6. Náhodná veličina X je charakterizována hustotou pravděpodobnosti ve tvaru:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & x \in (0; 2) \\ 0 & x \notin (0; 2) \end{cases}$$

Určete:

- a) hodnotu c ,
b) distribuční funkci náhodné veličiny X ,
c) střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient náhodné veličiny X ,
d) dolní kvartil náhodné veličiny X ,
e) $P(X = 1)$, $P(X < 3)$, $P(X > 0,5)$.
7. Náhodná veličina Y je definována jako $Y = 3X + 1$, kde X je náhodná veličina z předcházejícího příkladu. Určete:
a) distribuční funkci náhodné veličiny Y ,
b) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y ,
c) střední hodnotu, modus, směrodatnou odchylku a variační koeficient náhodné veličiny Y ,
d) 30% kvantil náhodné veličiny Y .

8. Doba životnosti X_A přístroje A (dána v rocích) má rozdělení s hustotou:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+2)^2} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

zatímco doba životnosti X_B přístroje B (dána v rocích) má rozdělení s hustotou:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{128}{(x+8)^3} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Předpokládejme, že kritérium pro výběr přístroje je pravděpodobnost, že přístroj přežije funkční dobu T . V kterém případě, tj. pro jakou délku funkční doby T , je lepší zakoupit přístroj A a v kterém případě přístroj B?

9. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Určete její:

- hustotu pravděpodobnosti,
- modus,
- median,
- střední hodnotu a rozptyl,
- $P(0,5 < X < 1,5)$.

10. Náhodná veličina má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0,1e^{-0,1x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.