

ÚVOD DO TEORIE ODHADU

Martina Litschmannová, Adéla Vrtková



Obsah

- **Výběrové charakteristiky**
 - parametry populace vs. výběrové charakteristiky
- **Úvod do teorie odhadu**
 - bodové odhady vs. intervalové odhady
 - intervalové odhady
 - jednovýběrové
 - rozdílů, resp. podílů, parametrů dvou populací

Výběrové charakteristiky vs. parametry populace

- **Parametry populace** (obvykle pro jejich značení používáme symboly řecké abecedy) jsou **konstanty**.
- **Charakteristiky výběru** (obvykle značíme latinkou) jsou obvykle různé – v závislosti na pořazeném výběru. Jsou to **náhodné veličiny**.

Základní soubor (populace)	střední hodnota μ	medián $x_{0,5}$	rozptyl σ^2	směr. odchylka σ	pravděpodobnost π
Výběrový soubor (výběr)	průměr $\bar{X}$	výběrový medián $\tilde{X}_{0,5}$	výběrový rozptyl S^2	výběrová směr. odchylka S	rel. četnost $\hat{\pi}$

Poznámka: $\bar{X}, \hat{\mu}$... průměr (obecně, tj. průměr nějakého výběru, náhodná veličina),
 $\bar{x}$... průměr (konkrétní realizace, tj. průměr daného výběru, jedno číslo),
 p ... relativní četnost (konkrétní realizace zjištěna z daného výběru)

Úvod do teorie odhadu



Lze určit střední hodnotu životnosti el. součástek?

Lze určit účinnost léku?



Lze určit, který výrobce vyrábí kvalitněji?

Neznáme-li rozdělení náhodné veličiny X , pak

parametry náhodné veličiny X nelze většinou přesně určit, lze je jen odhadnout.

Jak odhadnout parametry populace?

- **Bodový odhad** - parametr základního souboru aproximujeme jediným číslem
- **Intervalový odhad** – parametr populace aproximujeme intervalem, v němž s velkou pravděpodobností příslušný populační parametr leží.

Bodový odhad

Mějme náhodný výběr $X_1, X_2, \dots, X_n$ z určitého rozdělení, které závisí na neznámém parametru θ . Odhadem T parametru θ je pak výběrová charakteristika $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, která nabývá hodnot „blízkých“ neznámému parametru θ .

Vybrané populační parametry a jejich bodové odhady:

konstanty

obecně značíme θ

Základní soubor (populace)	střední hodnota μ	medián $x_{0,5}$	rozptyl σ^2	směr. odchylka σ	pravděpodobnost π
Výběrový soubor (výběr)	průměr $\bar{X}$	výběrový medián $\tilde{X}_{0,5}$	výběrový rozptyl S^2	výběrová směr. odchylka S	rel. četnost $\hat{\pi}$

náhodné
veličiny

obecně značíme $T(X)$

Interval spolehlivosti vs. intervalový odhad

Interval spolehlivosti (konfidenční interval) pro parametr θ se spolehlivostí $1 - \alpha$, kde $\alpha \in \langle 0; 1 \rangle$, je taková dvojice statistik (T_D, T_H) , že

$$P(T_D \leq \theta \leq T_H) = 1 - \alpha.$$

Intervalový odhad $\langle t_D, t_H \rangle$ je jednou z realizací intervalu spolehlivosti.

V čem spočívá výhoda intervalových odhadů vůči bodovým odhadům?



Přinášejí informaci o nejistotě (nepřesnosti) odhadu.



Co je co v terminologii intervalových odhadů?

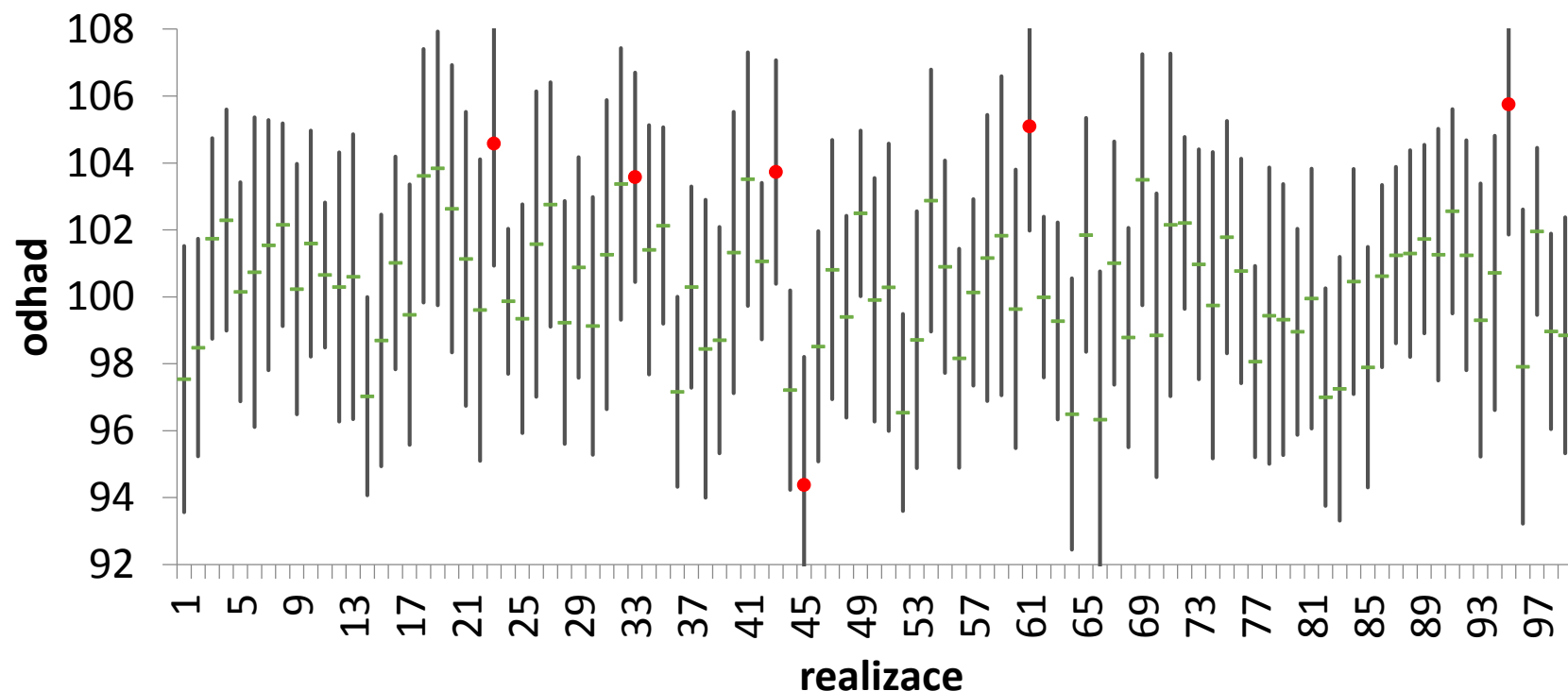
$$P(T_D \leq \theta \leq T_H) = 1 - \alpha$$

hledaný parametr
(konstanta, kterou nejsme
schopni přesně určit)

spolehlivost odhadu,
tj. pravděpodobnost s níž
hledaný parametr θ leží
v intervalu $\langle T_D; T_H \rangle$

meze intervalu spolehlivosti
(náhodné veličiny)

Co to znamená, že spolehlivost odhadu je $1-\alpha$?



*Simulace intervalových odhadů střední hodnoty (spolehlivost 0,95) získaných na základě opakovaných výběrů o rozsahu 30 z populace se střední hodnotou 100.
6 intervalů ze 100 neobsahuje skutečnou střední hodnotou.*

Jaké máme požadavky na interval spolehlivosti?

$$P(T_D \leq \theta \leq T_H) = 1 - \alpha \leftarrow \text{hladina významnosti}$$

- Co největší spolehlivost odhadu.
- Co nejmenší šířka intervalu spolehlivosti. (S rostoucí šířkou intervalového odhadu klesá významnost získané informace.)

Závěr:

- S rostoucí spolehlivostí se zvětšuje šířka intervalového odhadu a tím klesá významnost takto získané informace. $\Rightarrow$

Nutnost kompromisu ($\alpha = 0,05$, resp. $0,01$ nebo $0,10$)

- S rostoucím rozsahem výběru se šířka intervalového odhadu snižuje.

Jaké jsou typy intervalů spolehlivosti?

- **oboustranné**

$$P(\theta < T_D) = P(\theta > T_H) = \frac{\alpha}{2}$$

Tyto dvě podmínky zaručují, že $P(T_D \leq \theta \leq T_H) = 1 - \alpha$.

- **jednostranné** (odhadujeme-li například délku života nějakého zařízení, je pro nás důležitá pouze dolní mez)
 - **levostranné**: $P(\theta \geq T_D^*) = 1 - \alpha$
 - **pravostranné**: $P(\theta \leq T_H^*) = 1 - \alpha$

Odhadovaný parametr		Předpoklady	Meze oboustranného intervalového odhadu		Dolní mez jednostranného intervalového odhadu	Horní mez jednostranného intervalového odhadu
			T_D	T_H	T_D	T_H
Míra polohy	μ	normalita, známe σ	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$	$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$
		normalita, neznáme σ	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}$	$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}$
Míry variability	σ^2	normalita	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}}$	$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}}$
	σ	normalita	$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}}$	$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}}$	$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha}}}$	$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}}}$
Relativní četnost	π	$n > 30,$ $\frac{n}{N} < 0,05,$ 9 $n > \frac{9}{p(1-p)}$	$p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p - z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Typ proměnné	Požadovaný typ analýzy	Předpoklady	Testy, resp. intervalové odhady
Spojitá proměnná	Ověření variability	Normalita	Test o rozptylu (test o směr. odchylce)
			Intervalový odhad rozptylu (směr. odchylky)
	Ověření polohy	Normalita	Studentův t -test, (test o střední hodnotě)
			Intervalový odhad střední hodnoty
		Výběr většího rozsahu	Znaménkový test (test o mediánu)
		Symetrické rozdělení	Wilcoxonův test (test o mediánu)
Dichotomická proměnná (0-1)	Ověření shody relativní četnosti s očekávanou pravděpodobností	$n > \frac{9}{p(1-p)}$	Test o parametru π binomického rozdělení
			Intervalový odhad parametru π binomického rozdělení

Odhadovaný vztah mezi parametry	Předpoklady	Oboustranný intervalový odhad	Poznámka
$\mu_1 - \mu_2$	normalita obou populací, známe σ_1, σ_2	$\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}; \right. \\ \left. (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$	
	normalita obou populací, neznáme σ_1^2, σ_2^2 , $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}; \right. \\ \left. (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$	t_p je 100p% kvantil Studentova rozdělení s $n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti
	normalita obou populací, neznáme σ_1^2, σ_2^2 , $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}; \right. \\ \left. (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right)$	t_p je 100p% kvantil Studentova rozdělení s $\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{n_1+1} + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \frac{1}{n_2+1}} - 2$ stupni volnosti
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	normalita obou populací	$\left\langle \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{s_1^2}{s_2^2}; \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{s_1^2}{s_2^2} \right\rangle$	f_p označují 100p% kvantily Fisher-Snedecorova rozdělení s $n_1 - 1$ stupni volnosti pro čitatele a $n_2 - 1$ stupni volnosti pro jmenovatele.
$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	normalita obou populací	$\left\langle \sqrt{\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{s_1^2}{s_2^2}}; \sqrt{\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{s_1^2}{s_2^2}} \right\rangle$	
$\pi_1 - \pi_2$	$\forall i \in \{1,2\}$: $n_i > 30$, $\frac{n_i}{N_i} < 0,05$, $n_i > \frac{9}{p_i(1-p_i)}$	$\left((p_1 - p_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}; \right. \\ \left. (p_1 - p_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \right)$	$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

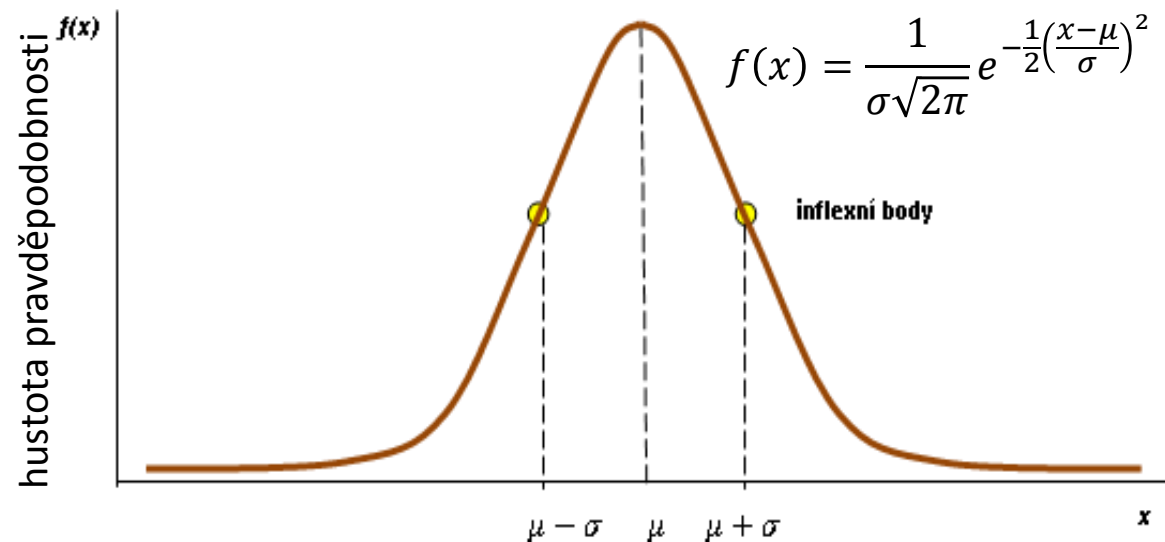
Typ proměnné	Požadovaný typ analýzy	Předpoklady		Testy, resp. intervalové odhady
Dvě nezávislé spojité proměnné	Ověření shody rozptylů (homoskedasticity)	Normalita		F -test (test shody rozptylů)
				Intervalový odhad <i>poměru</i> rozptylů, resp. směr. odchylek
		—		Leveneův test
	Ověření shody měr polohy (středních hodnot, resp. mediánů)	Normalita	Shoda rozptylů (homoskedasticita)	Dvouvýběrový Studentův t -test (test shody stř. hodnot)
				Intervalový odhad rozdílu stř.hodnot
			Různé rozptyly (heteroskedasticita)	Aspinové-Welchův test (test shody stř. hodnot)
				Intervalový odhad rozdílu stř.hodnot
		stejné rozdělení p-sti		Mannův-Whitneyův test test shody mediánů
Párová (spojitá) data	Ověření shody úrovně párových dat	Normalita		Párový studentův t -test
				Intervalový odhad střední hodnoty rozdílů
		Výběry většího rozsahu		Párový znaménkový test
		Symetrické rozdělení		Wilcoxonův párový test
Dvě dichotomické proměnné	Ověření shody pravděpodobností	$n_i > \frac{9}{p_i(1-p_i)}, i = 1, 2$		Test homogeneity dvou binomických rozdělení
				Intervalový odhad rozdílu parametru binomických rozdělení

Normalita dat – častý předpoklad pro metody stat. indukce

- Normální rozdělení bývá vhodné k popisu náhodných veličin, které lze interpretovat jako aditivní výsledek mnoha nepatrných a vzájemně nezávislých faktorů (např. **výška člověka, IQ, délky končetin ...**).
- Norm. rozdělení popisuje náhodné veličiny, jejichž hodnoty se symetricky shlukují kolem střední hodnoty a vytvářejí tak charakteristický tvar hustoty pravděpodobnosti známý pod názvem Gaussova křivka.

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$$

↑ ↑
střední hodnota rozptyl

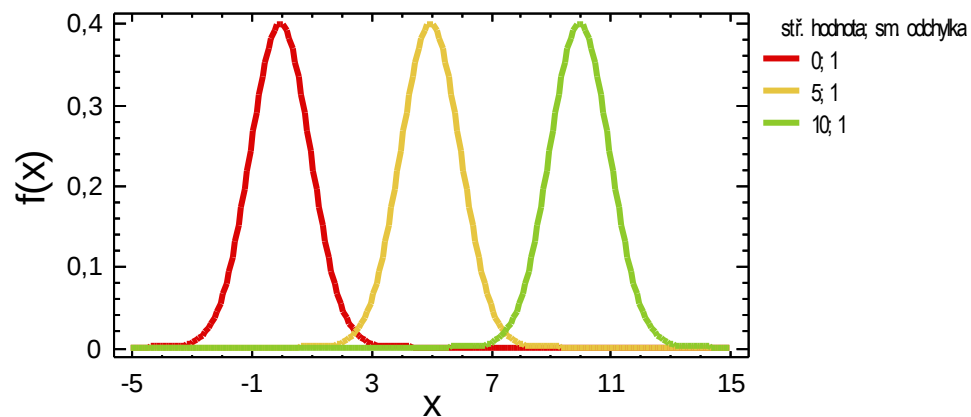


Normalita dat – častý předpoklad pro metody stat. indukce

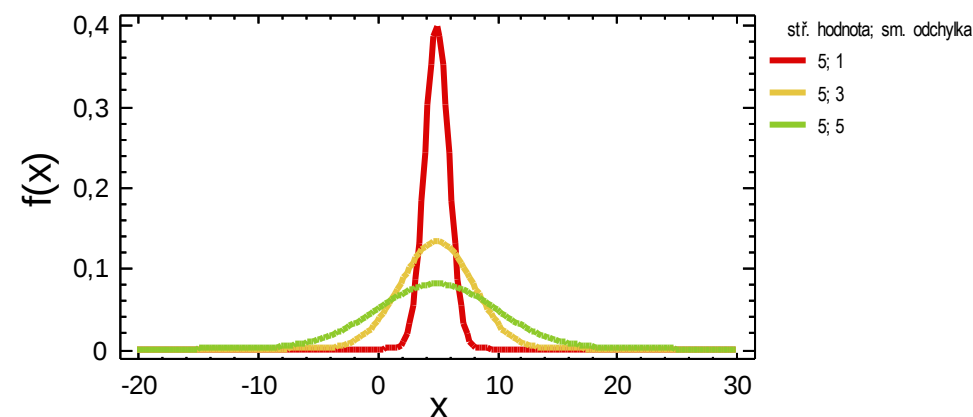
$$X \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

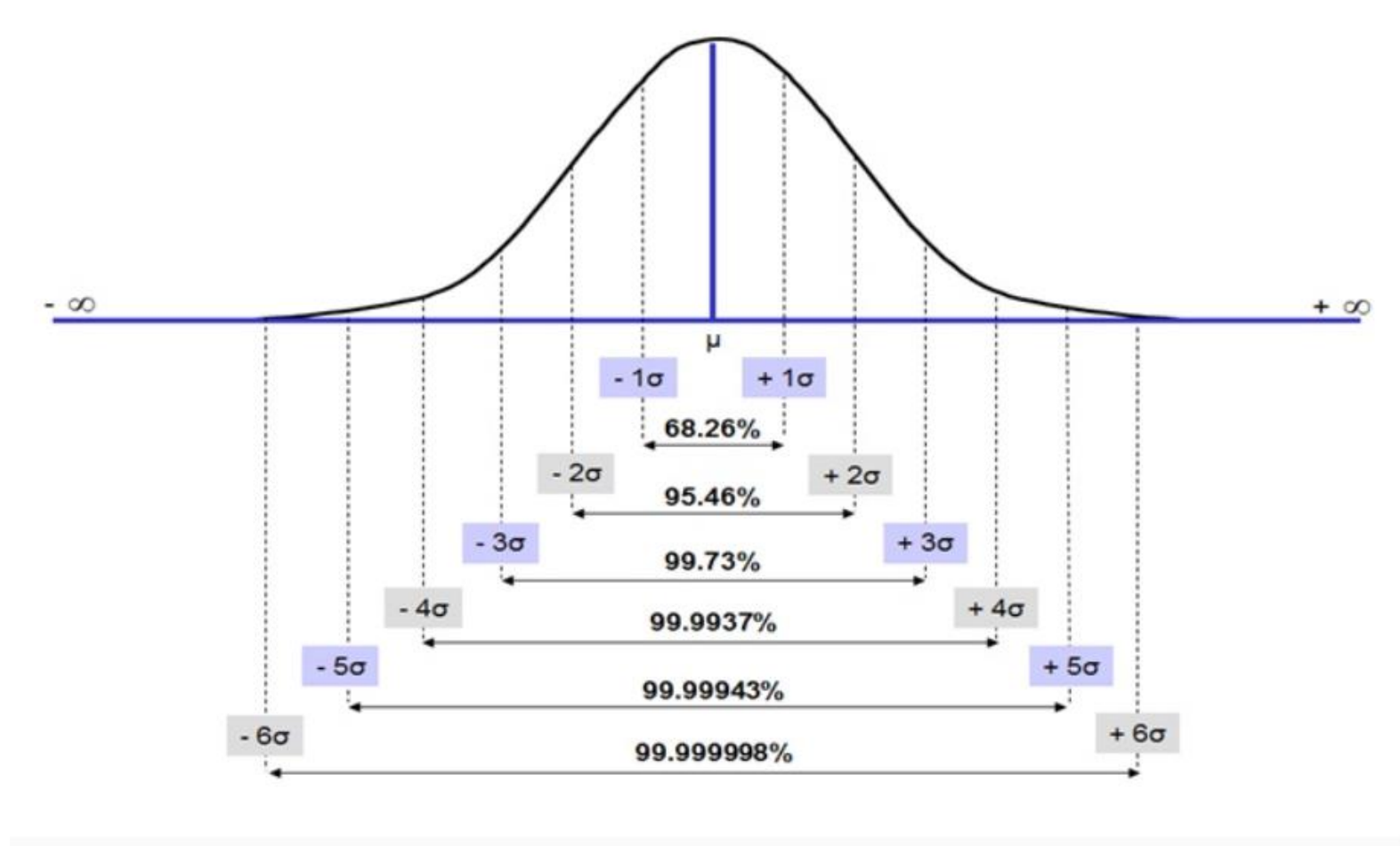
Vliv střední hodnoty (μ) na pozici Gaussovy křivky



Vliv směrodatné odchylky (σ) na tvar Gaussovy křivky



Pravidlo 3 σ



Posouzení normality dat na základě explorační analýzy

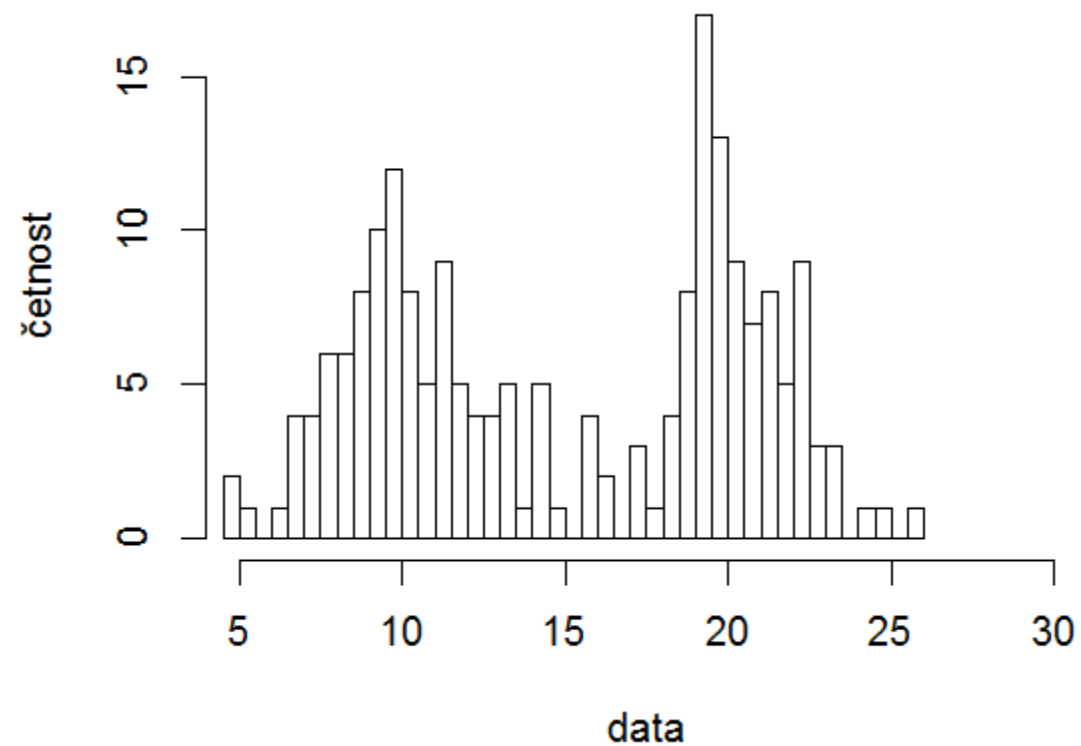
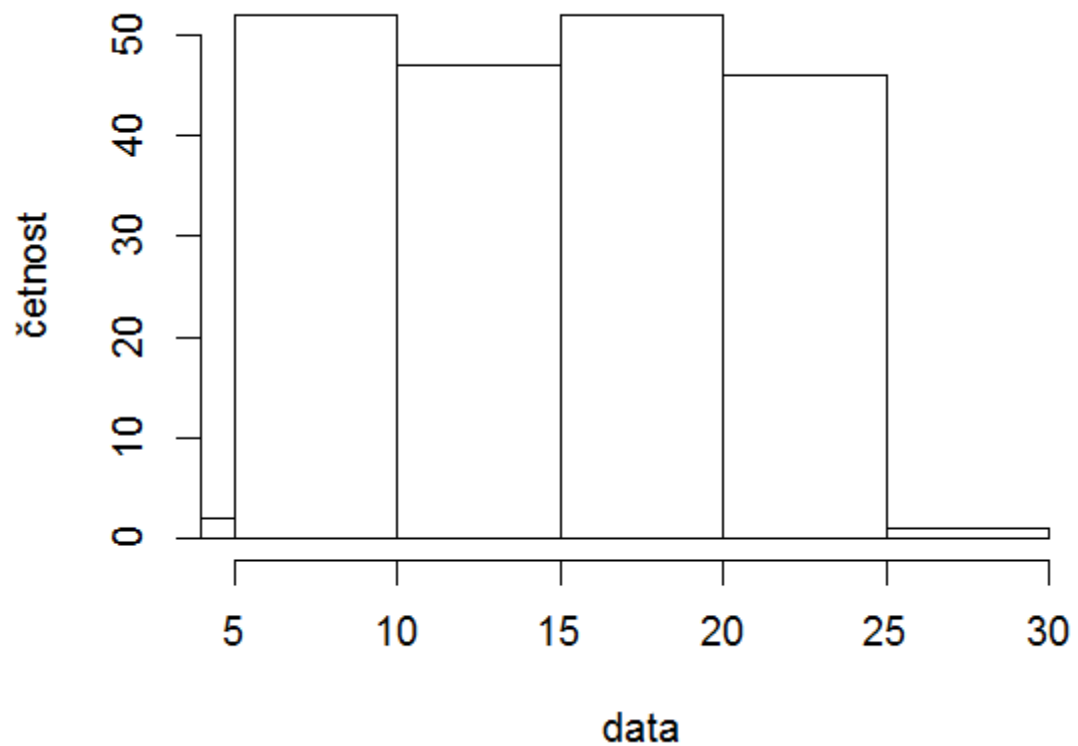
Posouzení na základě číselných charakteristik

- Výběrová šikmost i špičatost blízká nule (v praxi – leží v intervalu $(-2; 2)$)

Posouzení na základě grafických výstupů

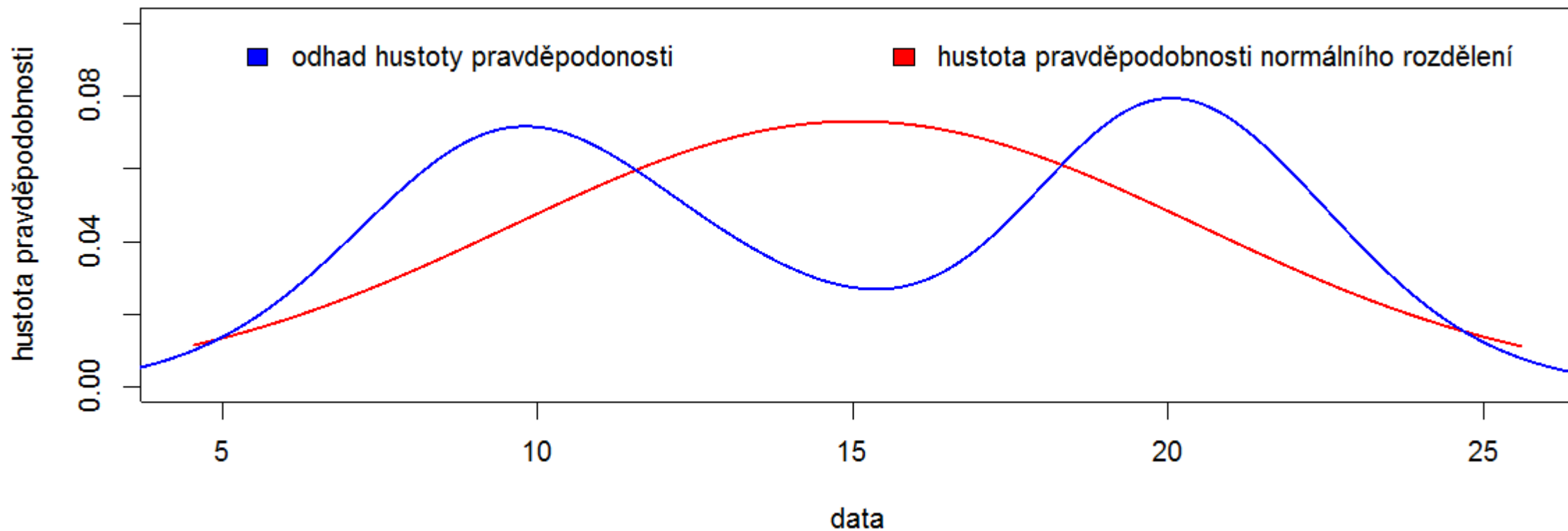
- Histogram
- Odhad hustoty pravděpodobnosti
- Odhad distribuční funkce (empirická distribuční funkce)
- Q-Q graf

Histogram

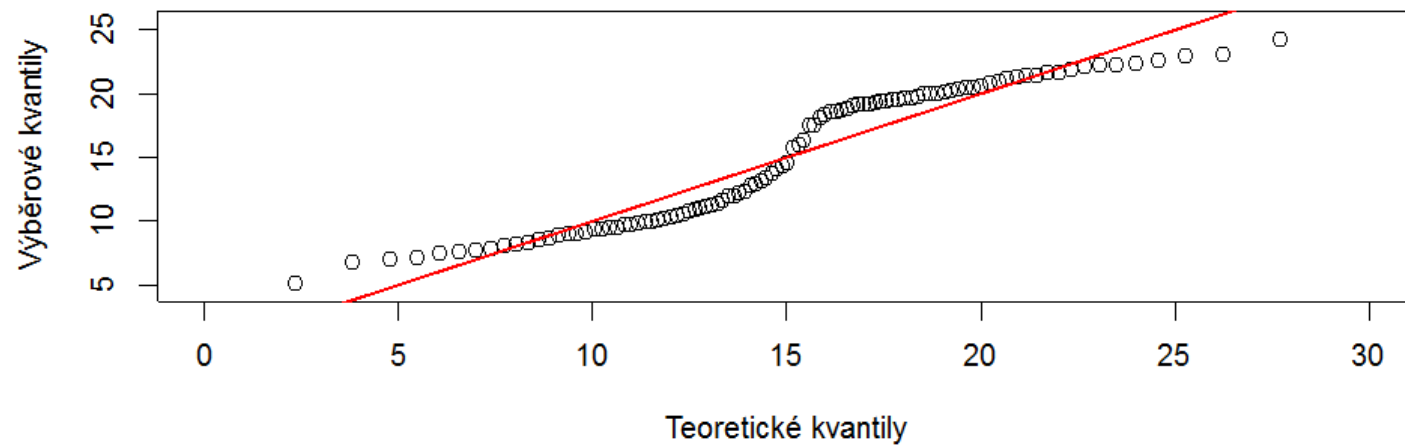


Pozor na zvolené členění - počet tříd!

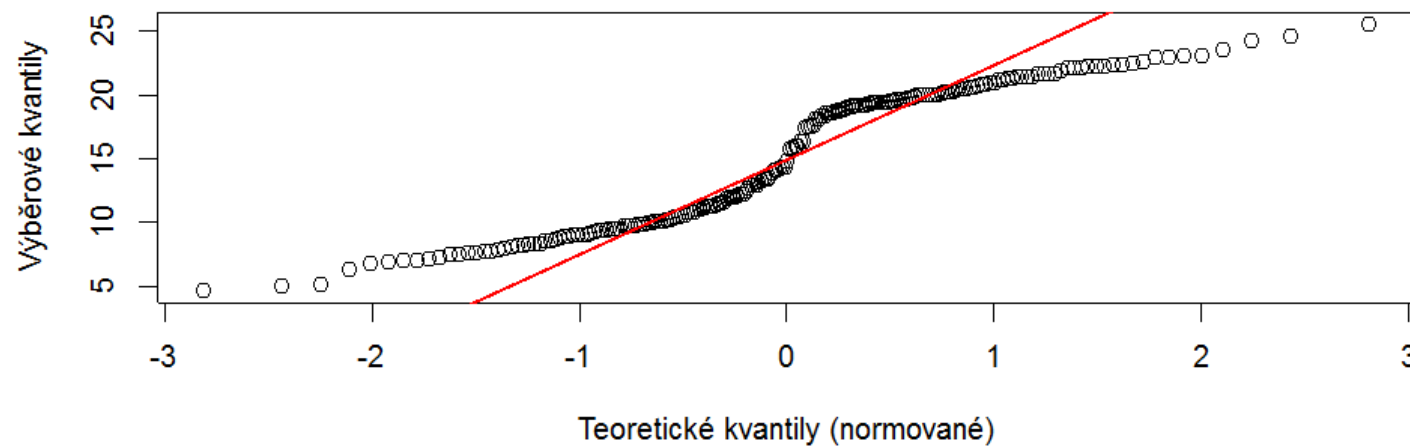
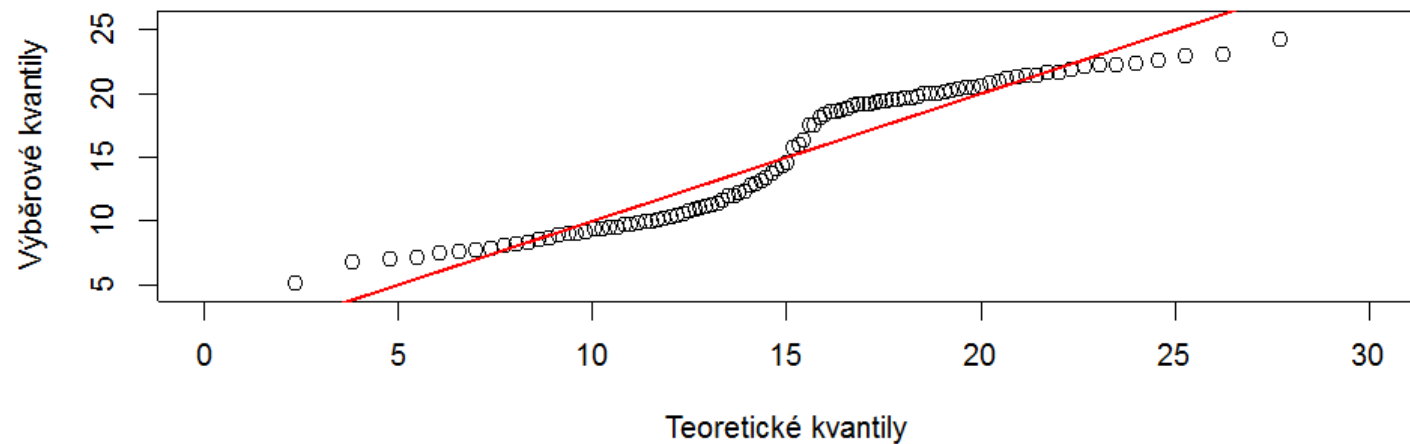
Odhad hustoty pravděpodobnosti



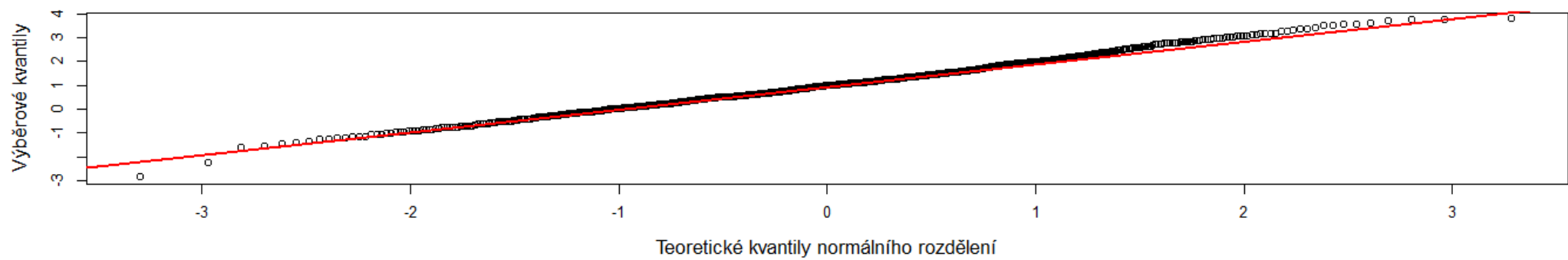
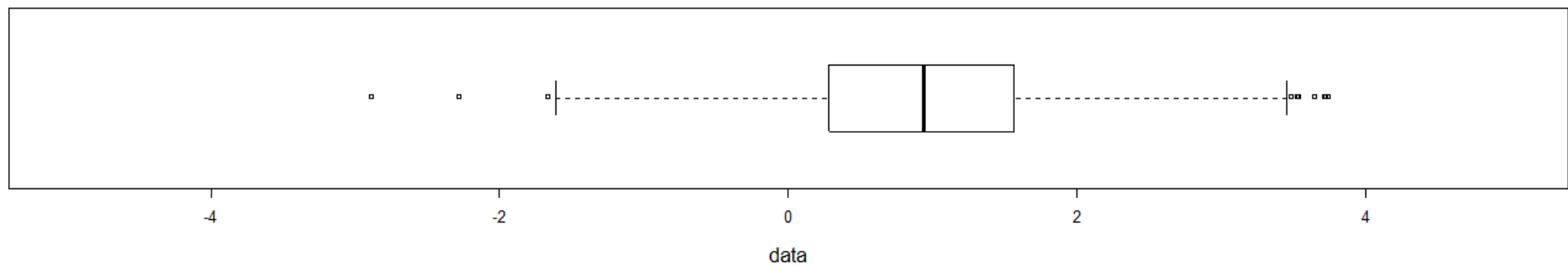
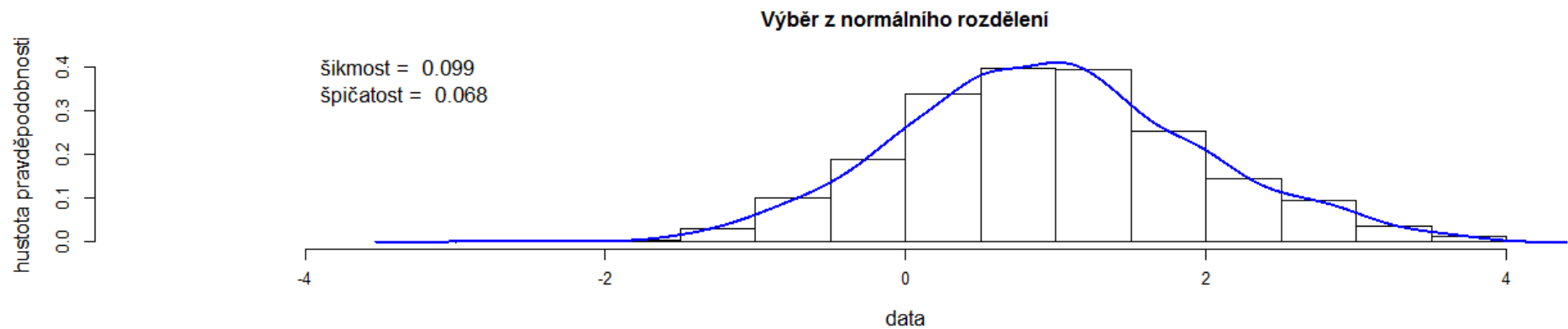
Q-Q graf



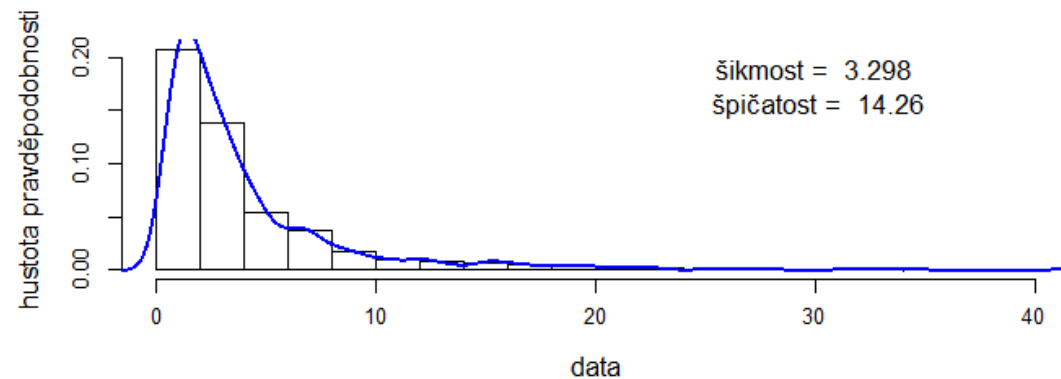
Q-Q graf



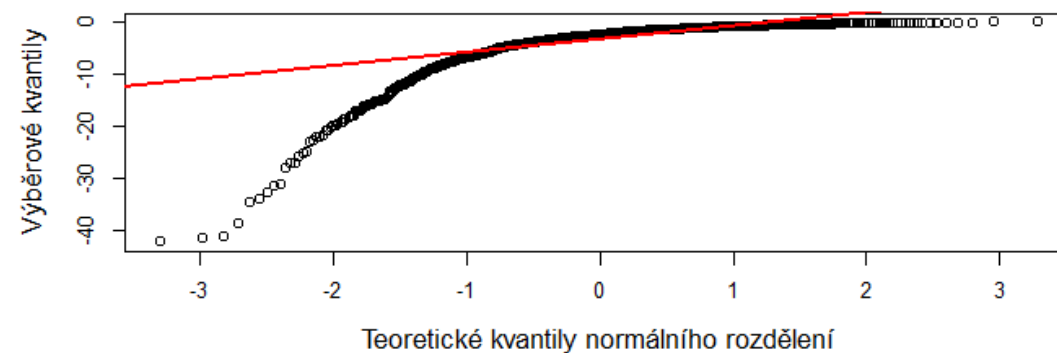
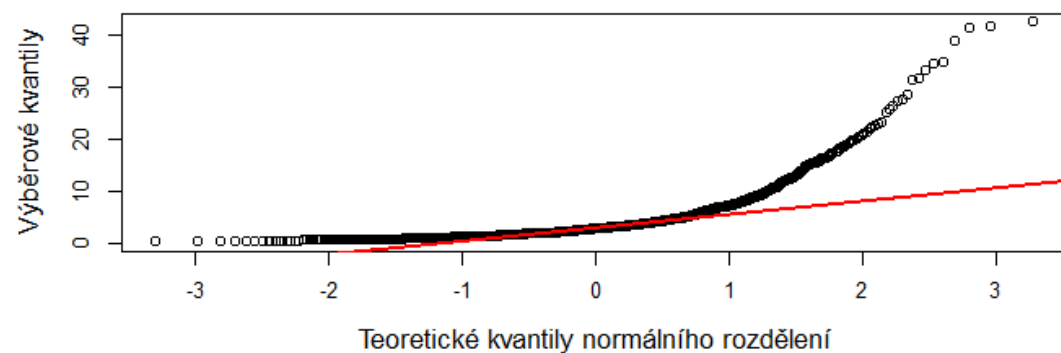
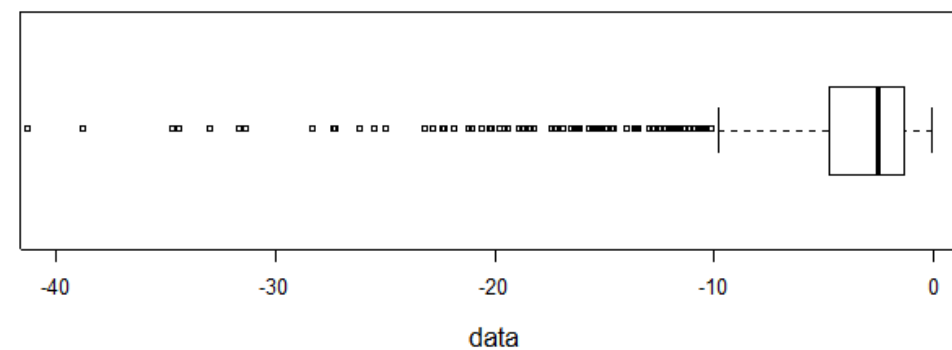
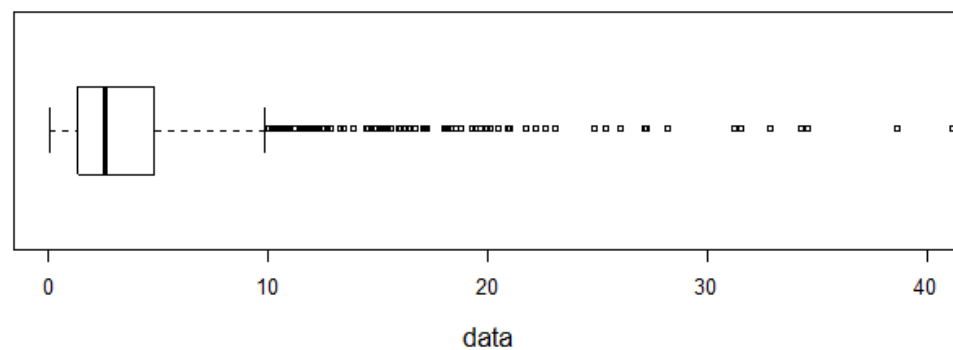
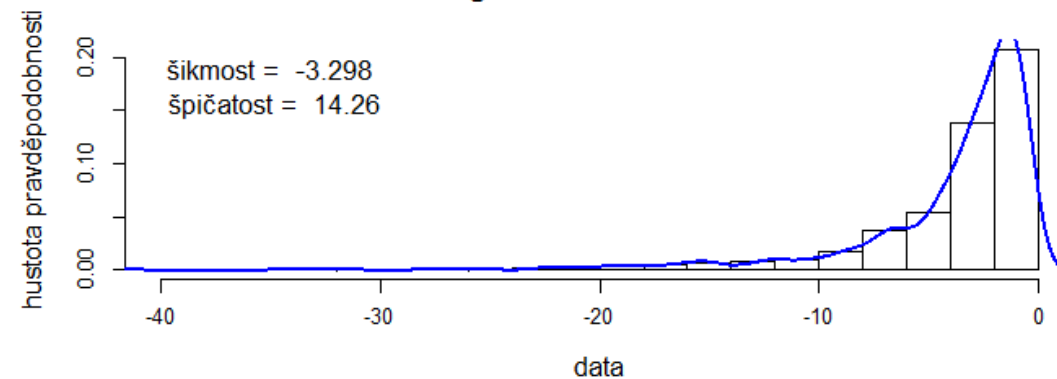
Posuzování normality
na základě explorační analýzy
pro vybrané typy výběrových souborů



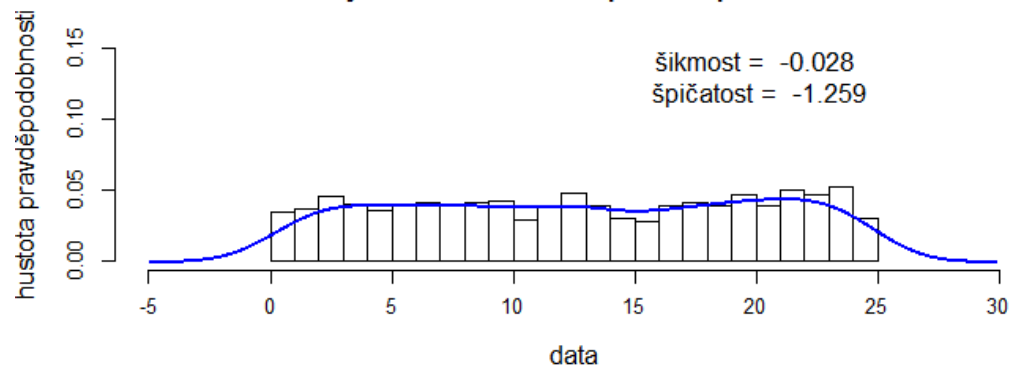
Pozitivně zešikmená data



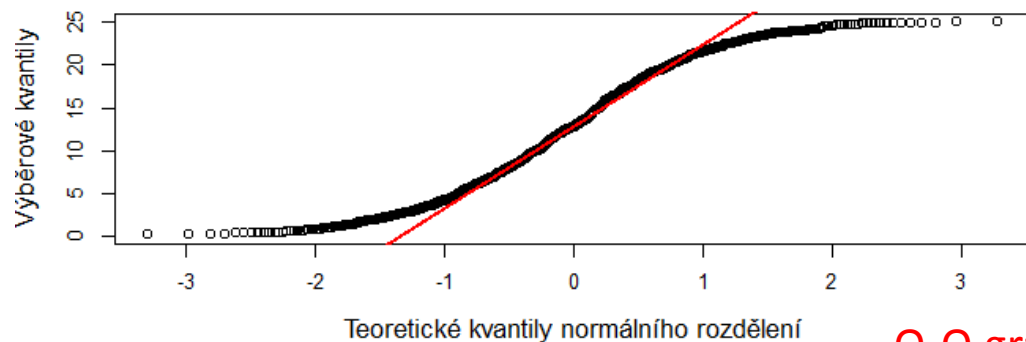
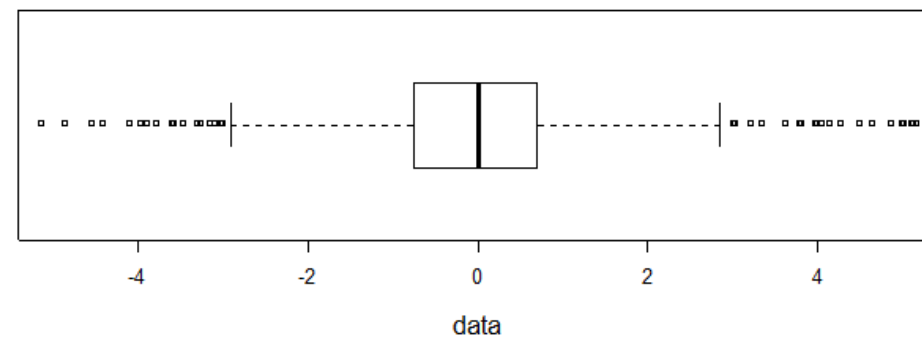
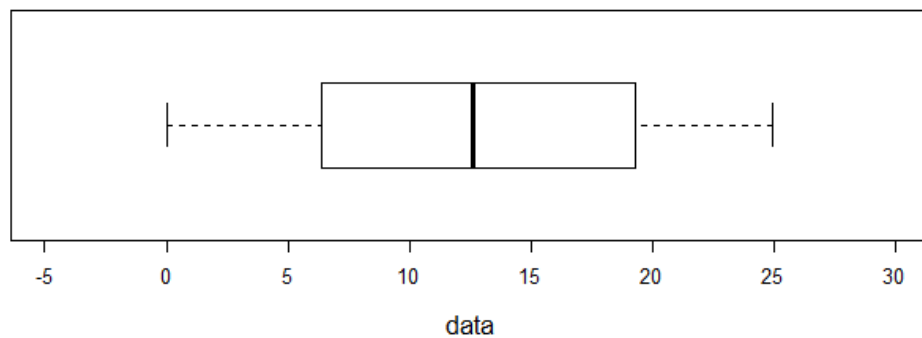
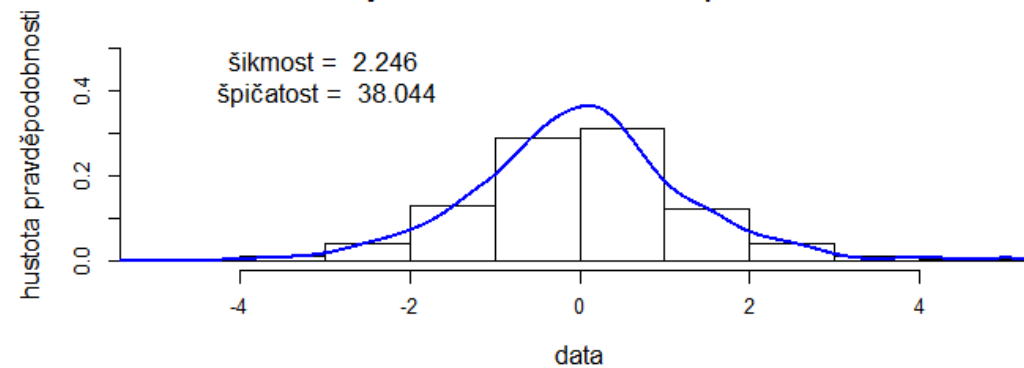
Negativně zešikmená data



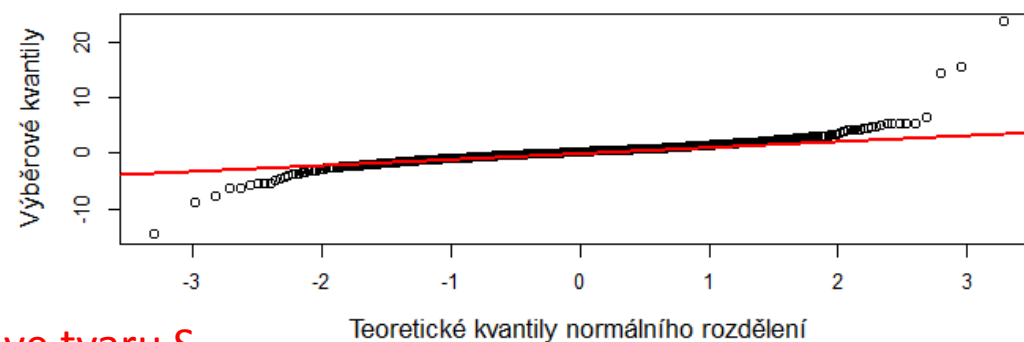
Výběr z rozdělení se zápornou špičatostí



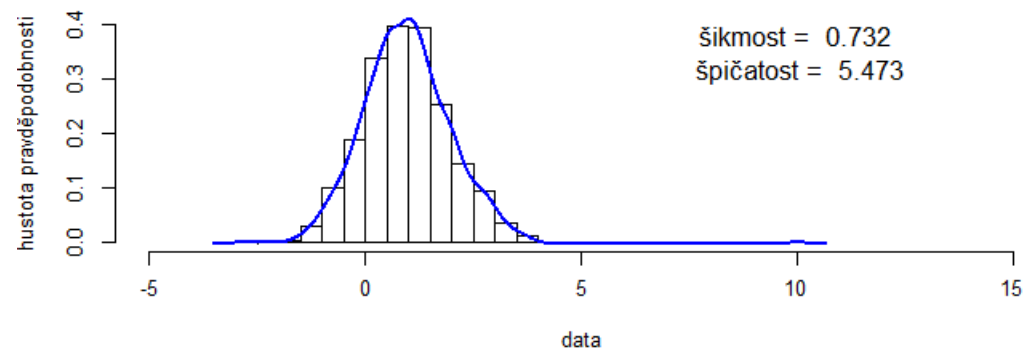
Výběr z rozdělení s kladnou špičatostí



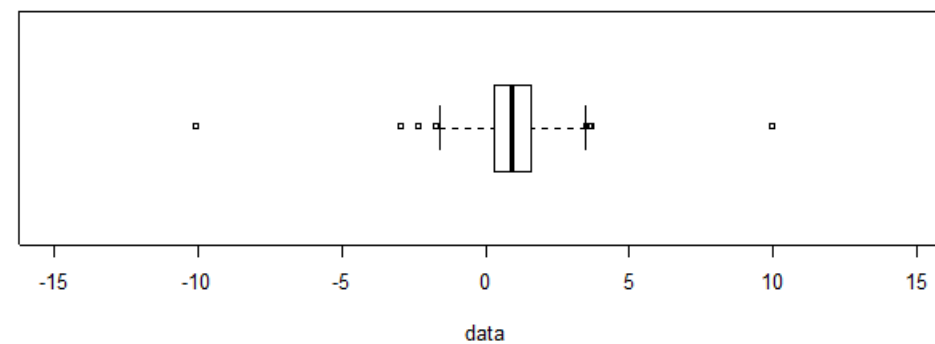
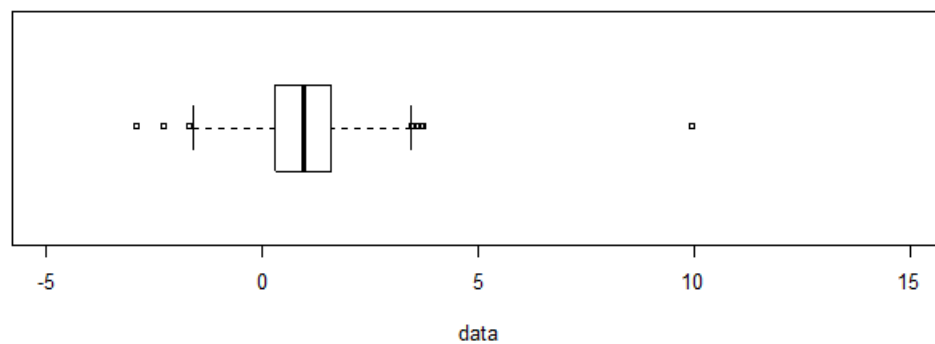
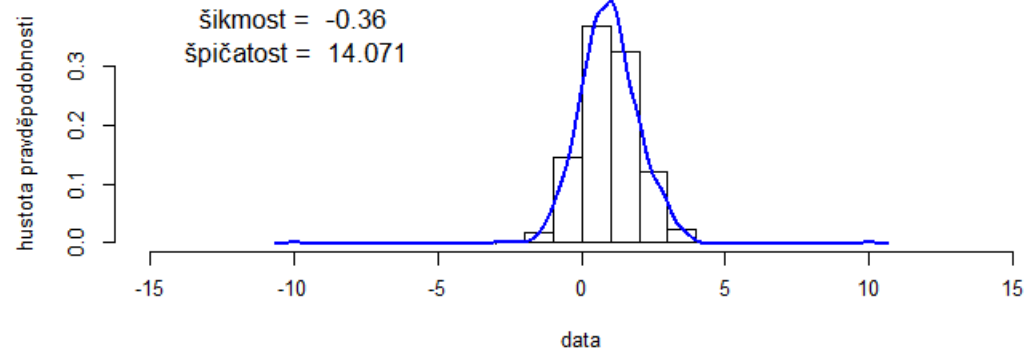
Q-Q graf ve tvaru S



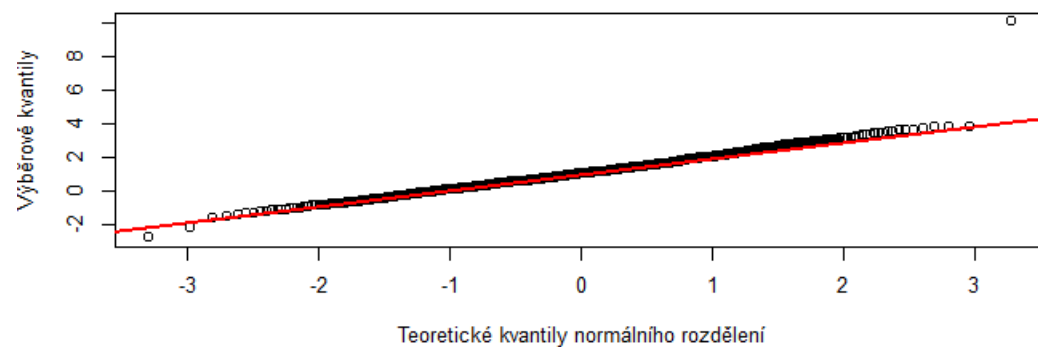
Symetrická data s odlehlými hodnotami



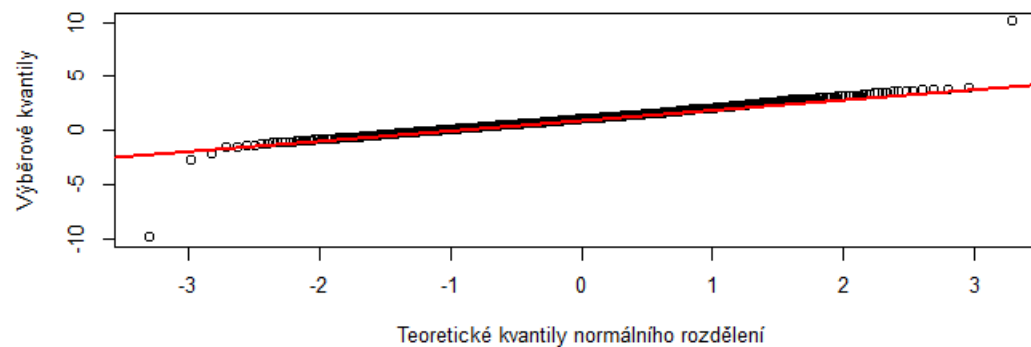
Symetrická data s odlehlými hodnotami



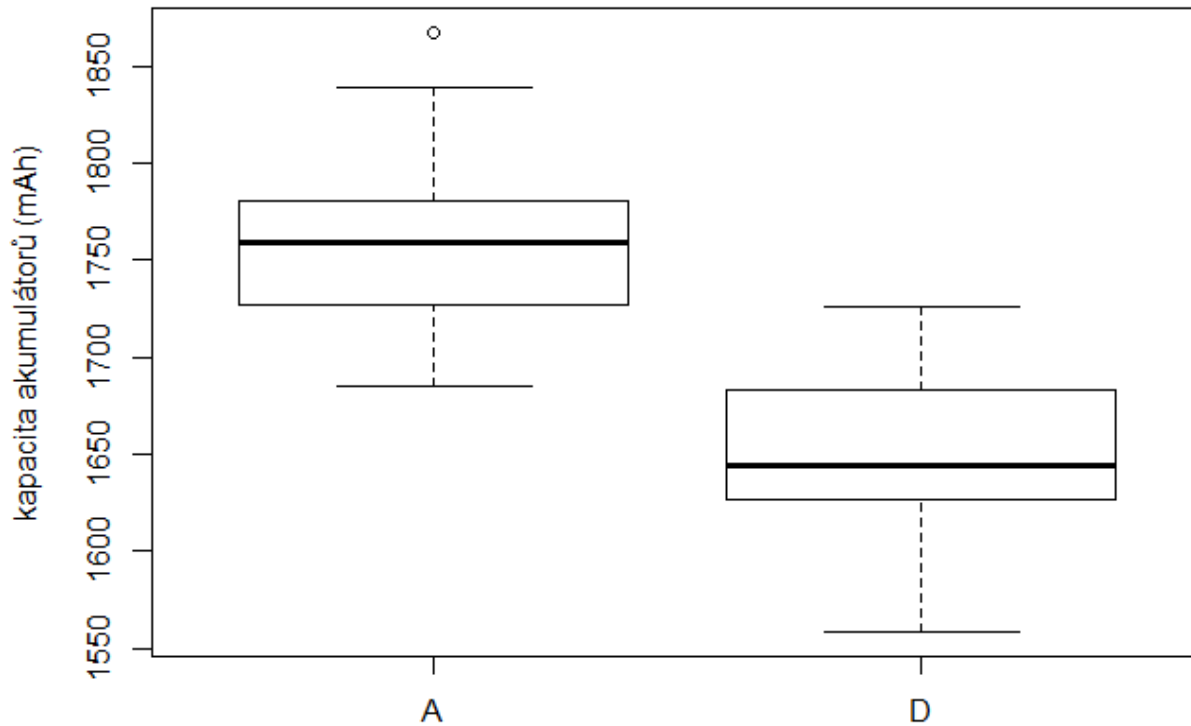
Normal Q-Q Plot



Normal Q-Q Plot



Jak ověřit shodu rozptylů dvou populací na základě explorační analýzy?



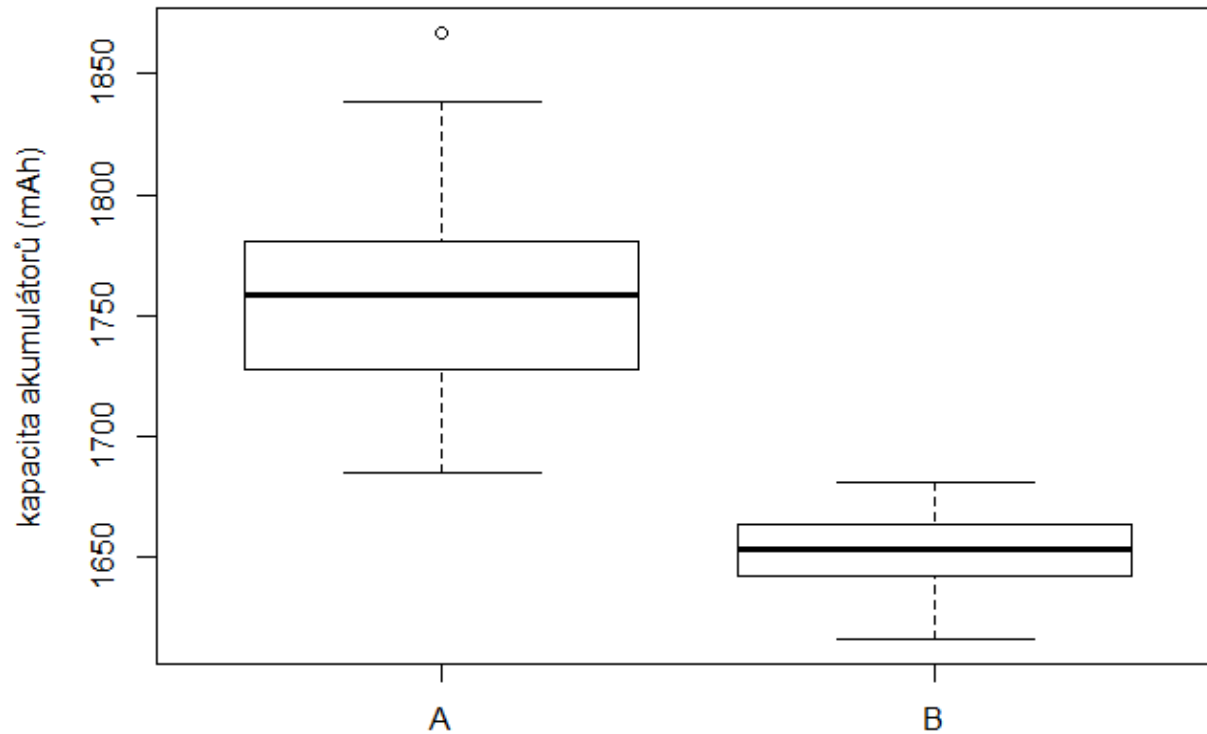
$$s_A = 36 \text{ mAh}$$

$$s_D = 38 \text{ mAh}$$

$$\frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2} \cong \frac{38^2}{36^2} \cong 1,12 < 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ nepředpokládáme, že výběry
pocházejí z populací s různými rozptyly

Jak ověřit shodu rozptylů dvou populací na základě explorační analýzy?



$$s_A = 36 \text{ mAh}$$

$$s_B = 15 \text{ mAh}$$

$$\frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2} \cong \frac{38^2}{15^2} \cong 5,76 > 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ předpokládáme, že výběry
pocházejí z populací s různými rozptyly

DĚKUJI ZA POZORNOST!

