CHAOS KOLEM NÁS

Marek Lampart

Katedra aplikované matematiky & IT4Innovations
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava

17. ledna 2018

Význam slova „Chaos“

chaos, -u m ⟨ ř ⟩

1. velký zmatek, nepořádek, neuspořádanost, změť: *ch. v dopravě; způsobit, vyvolat ch.*
2. *filoz., náb., mytol.* (podle starověkých představ) pův. prázdný prostor, znějící průrva, později neuspořádaná změť živlů před vznikem kosmu ve smyslu uspořádaného světa

V. Petráčková, J. Kraus za kolektiv, *Akademický slovník cizích slov*. Academia, Praha 1998

Co může způsobit mávnutí motýlích křídel?

Co může způsobit mávnutí motýlích křídel?

Může "toto", způsobit "tohle"?

Motýlí hurikán, nebo hurikán motýlů?

Co může způsobit mávnutí motýlích křídel?

AMERICAN ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE, 139th MEETING

Subject........................	Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?
Author...........................	Edward N. Lorenz, Sc.D. Professor of Meteorology
Address..........................	Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Mass. 02139
Time.............................	10:00 a.m., December 29, 1972
Place............................	Sheraton Park Hotel, Wilmington Room
Program..........................	AAAS Section on Environmental Sciences New Approaches to Global Weather: GARP (The Global Atmospheric Research Program)
Convention Address...............	Sheraton Park Hotel

RELEASE TIME
10:00 a.m., December 29

Aplikace dynamických systémů

- V oblastech
  - akademická
  - výzkumná
  - inženýrství
- Vědní disciplíny
  - filozofie
  - umění
  - genetika
  - teologie
  - fyzika
  - chemie
- biologie
- ekonomie
- politologie
- ekologie
- mechanika
- elektrotechnika
- geoinformatika
- lingvistika
- medicína

⋮

Aplikace dynamických systémů

- V oblastech
  - akademická
  - výzkumná
  - inženýrství
- Vědní disciplíny
  - filozofie
  - umění
  - genetika
  - teologie
  - fyzika
  - chemie

- biologie
- ekonomie
- politologie
- ekologie
- mechanika
- elektrotechnika
- geoinformatika
- lingvistika
- medicína

⋮

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^nP_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0\\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0\\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0\\
&\vdots\\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)

Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0 \\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0 \\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)

Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0 \\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0 \\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)

Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
&P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0\\
&P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0\\
&P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0\\
&\vdots\\
&P_n = (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Diferenční rovnice a iterace

Proces, ve kterém jeho předchozí stav ovlivňuje následující, se popisuje pomocí diferenčních rovnic:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tato rovnice popisuje, jak se nějaká operace provádí opakovaně po sobě. Tomu budeme říkat *iterace*.

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{kráte}}(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f}_{n-\text{kráte}}(x)) \cdots)$$

se nazývá *n*-**tá iterace bodu** x **zobrazením** f, kde $n \in \mathbb{N}$.

Diferenční rovnice a iterace

Proces, ve kterém jeho předchozí stav ovlivňuje následující, se popisuje pomocí diferenčních rovnic:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tato rovnice popisuje, jak se nějaká operace provádí opakovaně po sobě. Tomu budeme říkat *iterace*.

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{kráte}}(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f}_{n-\text{kráte}}(x)) \cdots)$$

se nazývá n**-tá iterace bodu** x **zobrazením** f, kde $n \in \mathbb{N}$.

Diferenční rovnice a iterace

Proces, ve kterém jeho předchozí stav ovlivňuje následující, se popisuje pomocí diferenčních rovnic:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tato rovnice popisuje, jak se nějaká operace provádí opakovaně po sobě. Tomu budeme říkat *iterace*.

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{kráte}}(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f}_{n-\text{kráte}}(x))\cdots)$$

se nazývá *n*-**tá iterace bodu** x **zobrazením** f, kde $n \in \mathbb{N}$.

Dynamický systém

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak uspořádaná dvojice

$$(X, f)$$

se nazývá **(diskrétní) dynamický systém.**

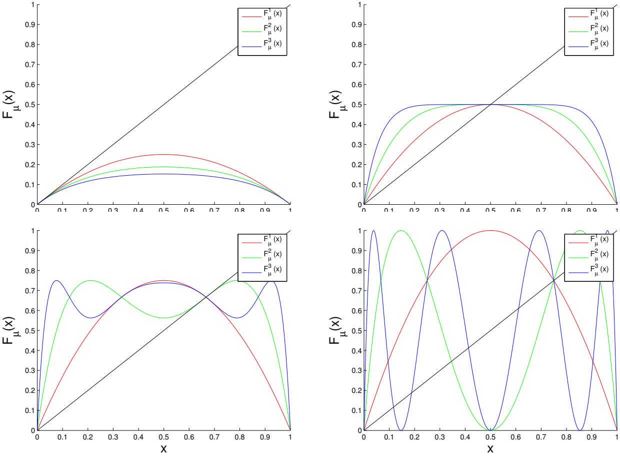
Generický příklad - Systém logistických zobrazení

$$F_\mu(x) : [0,1] \to [0,1] \qquad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$

R.M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261**(1976) s. 459–467.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

$$F_\mu(x) : [0,1] \to [0,1] \qquad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$



Periodicita

Definice

Buď (X, f) dynamický systém. Bod $x \in X$ se nazývá **pevný**, jestliže

$$f(x) = x.$$

Bod $x \in X$ se nazývá **periodický s periodou** n, jestliže

$$f^n(x) = x$$

a $f^m(x) \neq x$ pro každé $0 < m < n$.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

Věta

Pro $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ definované na $[0,1]$ platí:

1. $F_\mu(0) = 0$ a $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, kde $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$,
2. pokud je $1 < \mu \leq 4$, pak $0 < p_\mu < 1$,
3. pokud je $\mu = 1$, pak $\mathrm{Fix}(F_1) = \{0\}$,
4. pokud je $0 < \mu < 1$, pak $p_\mu \notin [0,1]$.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

Věta

Pro $0 < \mu < 1$ a každé $x \in [0,1]$ platí: $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = 0$.

Věta

Buď $\mu > 1$, pak

1. je-li $x < 0$, pak $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$,
2. je-li $x > 1$, pak $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$.

Věta

Buď $1 < \mu < 3$ a $0 < x < 1$, pak $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Periodicita

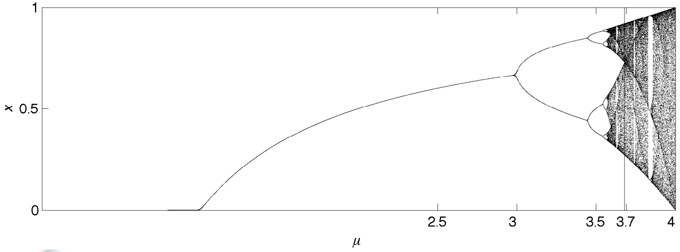
Věta

Buď $([0,1], f)$ dynamický systém mající 3-periodický bod. Potom f má periodické body period všech řádů.

A.N. Šarkovskij. *O ciklach i strukture nepreryvnogo preobrazovanija*. Ukrain. Mat. Žurnal 17.3 (1965), s. 104–111.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

Bifurkační diagram



Chaos ve smyslu Devaneyho

Definice

Dynamický systém (X, f) je **citlivý na počáteční podmínky**, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ a okolí $B(x, \epsilon)$ najdeme $y \in B(x, \epsilon)$ a $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Chaos ve smyslu Devaneyho

Definice

Necht' (X, f) je dynamický systém. Řekneme, že f je **chaotické ve smyslu Devaneyho**, jestliže:

1. f je topologicky tranzitivní, tj. f má orbitu, která je v X hustá;
2. f má na X citlivou závislost na počátečních podmínkách;
3. periodické body zobrazení f jsou v X husté.

R.L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd.Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1989.

Chaos ve smyslu Liho a Yorka

Definice

Nechť (X, f) je dynamický systém. Řekneme, že f je **chaotické ve smyslu Liho a Yorka**, jestliže existuje nespočetná podmnožina $S \subset X$ (z anglického „scrambled" set, tj. promíchaná) taková, že pro všechna $x, y \in S$ od sebe různá (tj. $x \neq y$) jsou splněny následující dvě podmínky:

1. $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$.
2. $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

T.-Y. Li a J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), s. 985–992.

Chaos ve smyslu Liho a Yorka

Věta

Buď $([0,1], f)$ dynamický systém mající 3-periodický bod. Potom je f chaotické ve smyslu Liho a Yorka.

T.-Y. Li a J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), s. 985–992.

Děkuji ti jutjůbe

Děkuji za pozornost