

Pythagorova věty, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

ŠKOMAM 2018, 16. ledna

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky, FEI
VŠB-TU Ostrava

web: <http://homel.vsb.cz/~luk76>
email: dalibor.lukas@vsb.cz



Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- Přibližné řešení diferenciálních rovnic
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

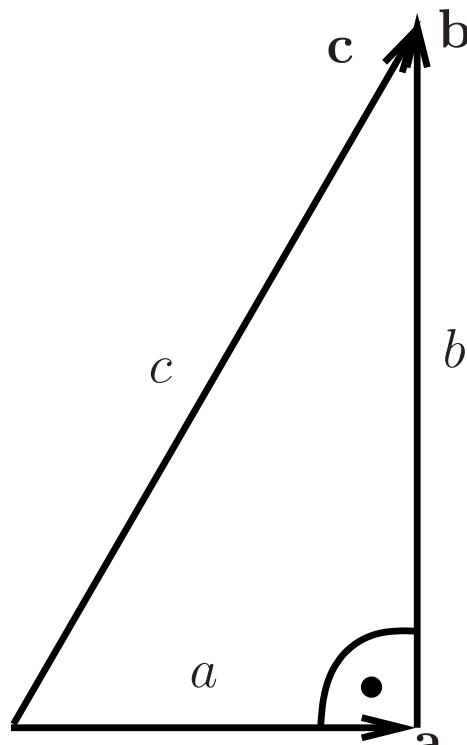
- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- Přibližné řešení diferenciálních rovnic
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Pythagorova věta, Kosinová věta

Kolmé (ortogonální) vektory

Pythagorova věta

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Vektorový počet

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} := \begin{pmatrix} a+0 \\ 0+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Velikost (norma) vektoru

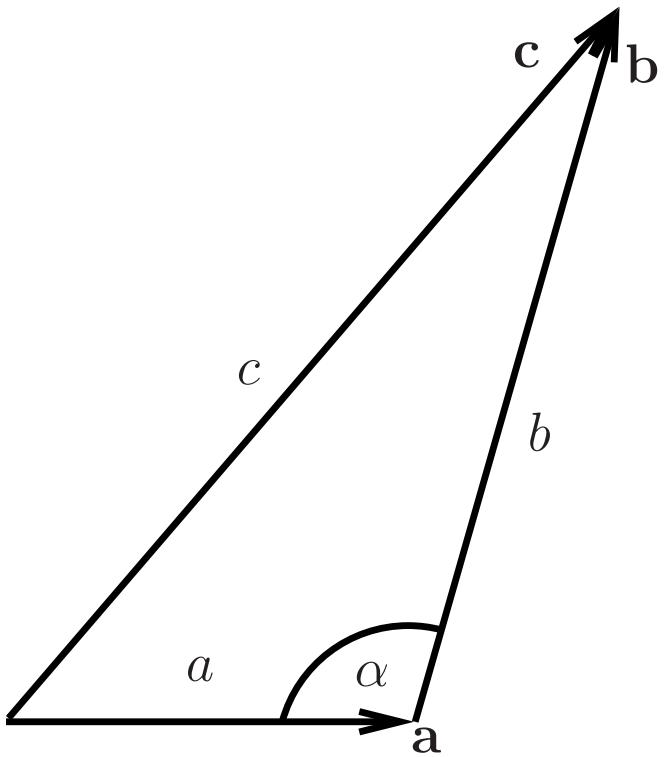
$$c := \|\mathbf{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pythagorova věta, Kosinová věta

Nekolmé vektory

Vektorový počet

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$



Kvadrát velikosti vektoru, Kosinová věta

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\mathbf{c}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \\ &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = \\ &= \underbrace{(a_1)^2 + (a_2)^2}_{=\|\mathbf{a}\|^2} + \underbrace{(b_1)^2 + (b_2)^2}_{=\|\mathbf{b}\|^2} + 2 \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}_{=: \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos(\alpha) \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \\ &= a^2 + b^2 + 2 \cos(\alpha) a b \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0: \text{Pythagorova} \equiv \text{Kosinová věta}$$

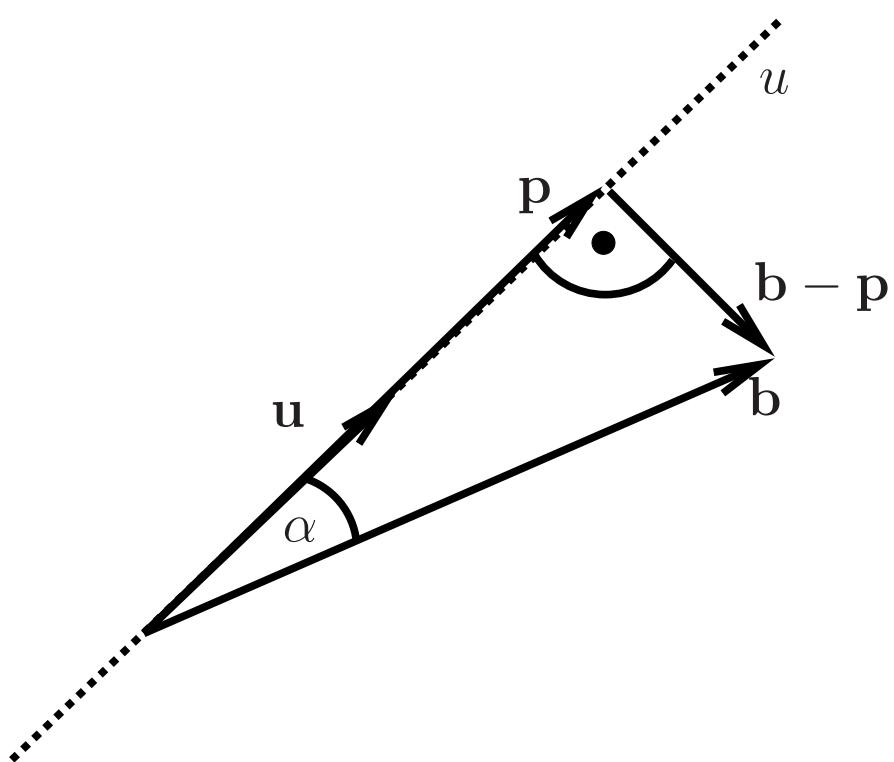
Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- Přibližné řešení diferenciálních rovnic
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Projekce bodu na přímku, rovinu, met. nejm. čtverců

Projekce (ortogonální) bodu na přímku



Dáno: přímka u se směrem \mathbf{u} a bod \mathbf{b} .

Úloha:

Hledáme $\mathbf{p} := x\mathbf{u}$: $\mathbf{u} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$

Tj.

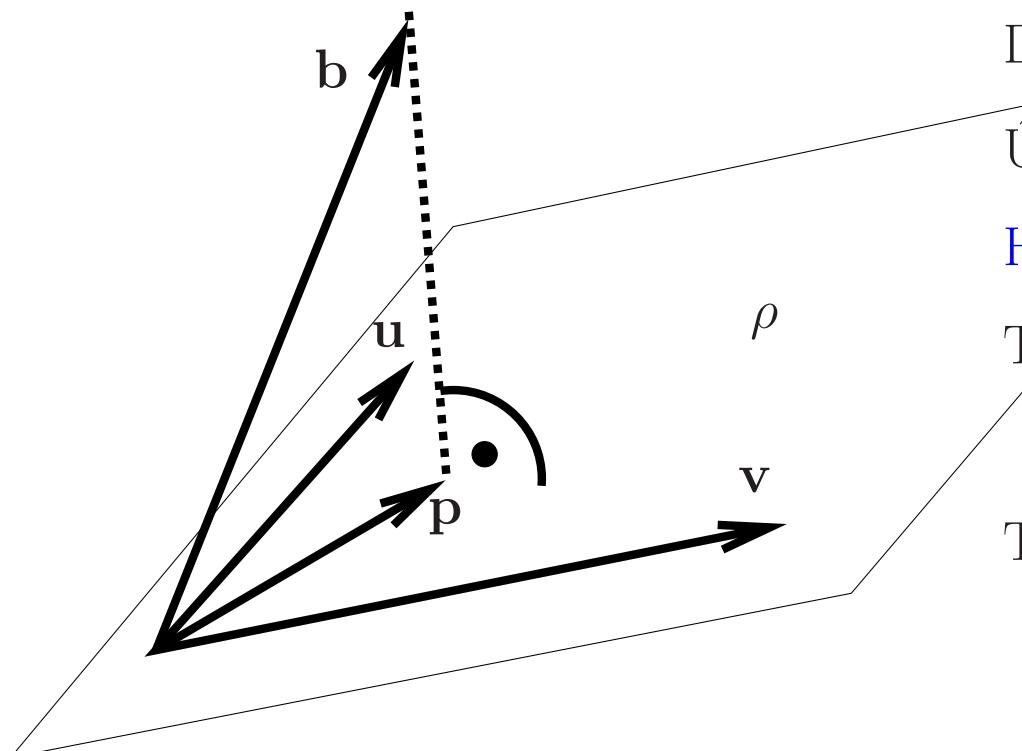
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \cos(\alpha) \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{u}\|},$$

což není překvapivé:

$$\|\mathbf{p}\| = \|x\mathbf{u}\| = \left\| \cos(\alpha) \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \right\| = \cos(\alpha) \|\mathbf{b}\|.$$

Projekce bodu na přímku, rovinu, met. nejm. čtverců

Projekce (ortogonální) bodu na rovinu



Dáno: rovina ρ se směry \mathbf{u}, \mathbf{v} a bod \mathbf{b} .

Úloha:

Hledáme $\mathbf{p} := x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$ a $\mathbf{v} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$

Tj.

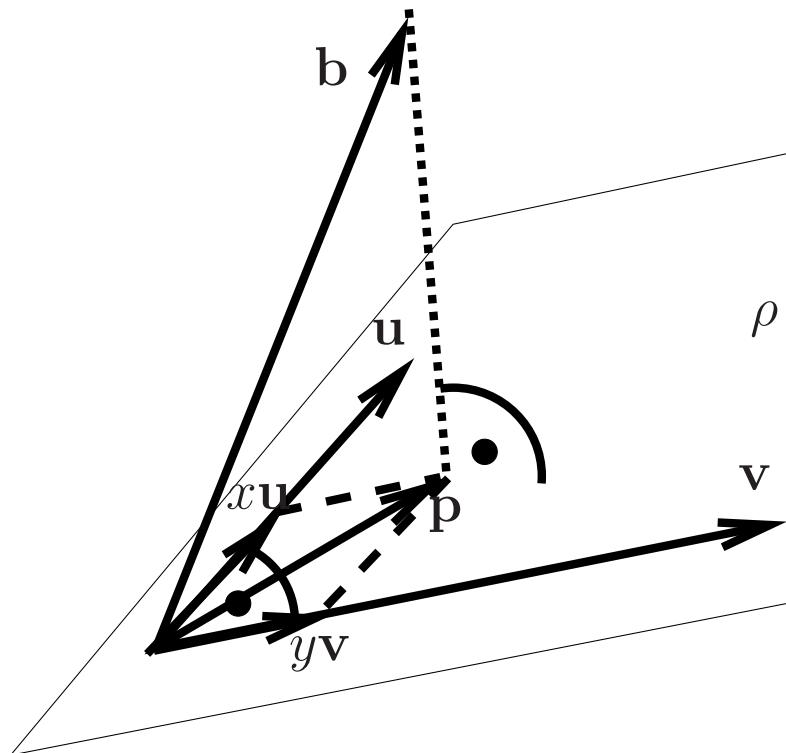
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0 \text{ a } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0.$$

To je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých:

$$x \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Projekce bodu na přímku, rovinu, met. nejm. čtverců

Projekce (ortogonální) bodu na rovinu



Dáno: rovina ρ se směry \mathbf{u}, \mathbf{v} a bod \mathbf{b} .

Úloha:

Hledáme $\mathbf{p} := x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$ a $\mathbf{v} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$

Tj.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0 \text{ a } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0.$$

To je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých:

$$x \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$: Projekce na ρ je součtem projekcí na u a v ,

$$\mathbf{p} = \underbrace{\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}}_{=x} \mathbf{u} + \underbrace{\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}_{=y} \mathbf{v}.$$

Řešení x, y minimalizuje funkci $\|\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}\|^2 \equiv$ metoda nejmenších čtverců.

Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- Přibližné řešení diferenciálních rovnic
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese

Fourierova řada

Funkce $(\cos(kt))_{k=0}^{\infty}$, $(\sin(kt))_{k=1}^{\infty}$ jsou navzájem kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f \cdot g := \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt \approx \sum_{j=1}^N f\left(\frac{2\pi}{N}j\right) g\left(\frac{2\pi}{N}j\right) \frac{2\pi}{N}$$

Rozumnou funkci $b(t)$ můžeme nahradit částečným součtem Fourierovy řady

$$b(t) \approx b_n(t) := \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kt) \cdot b(t)}{\|\cos(kt)\|^2} \cos(kt) + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt) \cdot b(t)}{\|\sin(kt)\|^2} \sin(kt).$$

Jedná se o projekci $b(t)$ do podprostoru (roviny) harmonických funkcí.

MP3-komprese

Dáno: signál $b(t)$ a práh $\varepsilon \in (0, 1)$.

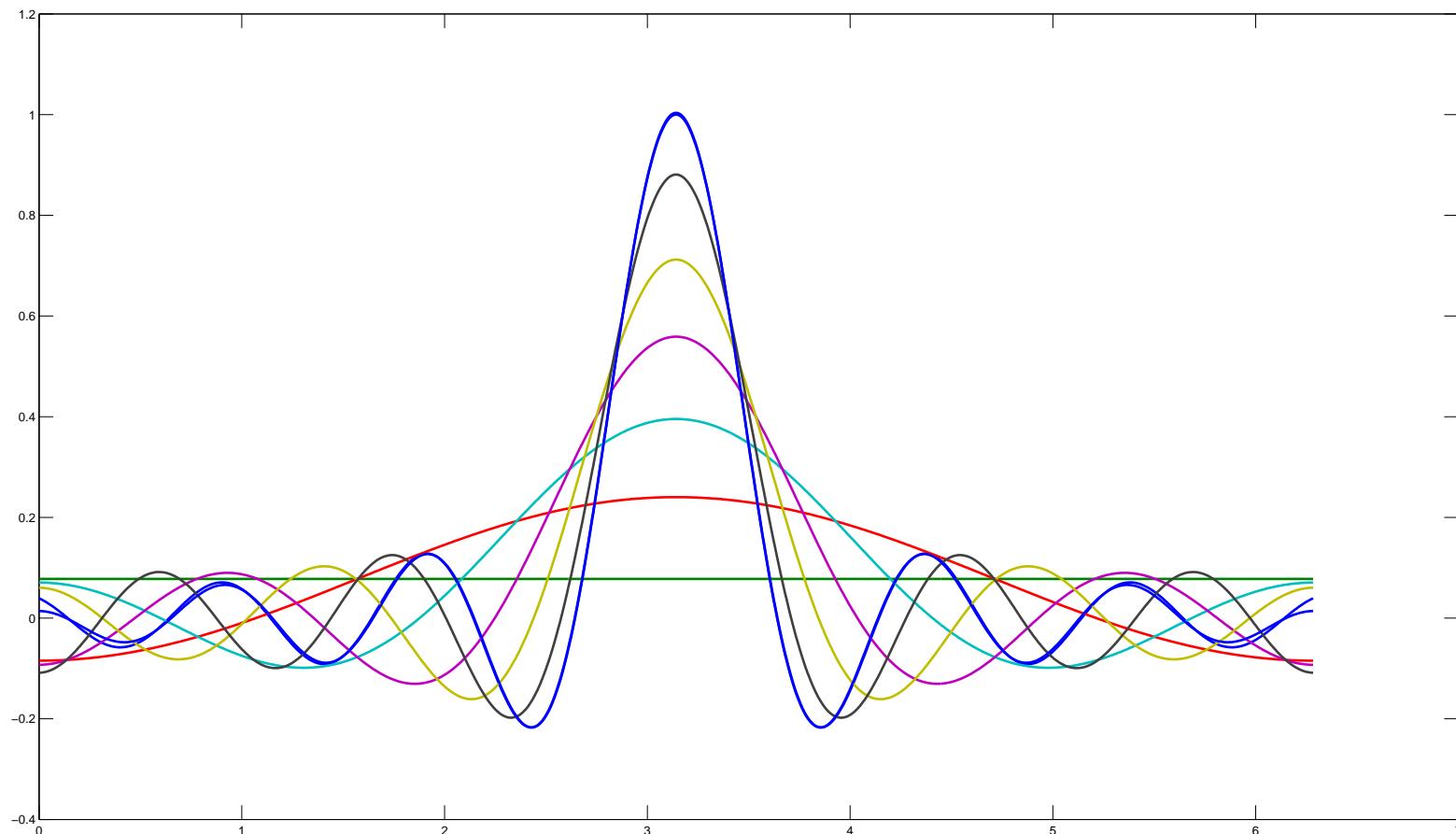
Úloha:

Hledáme nejmenší $n \in \mathbb{N}$ a $b_n(t) : \|b(t) - b_n(t)\| \leq \varepsilon \|b(t)\|$.

Kolmost báze + strom. hierarchie $\Rightarrow n \log n$ aritm. instukcí (vers. n^3)

Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese

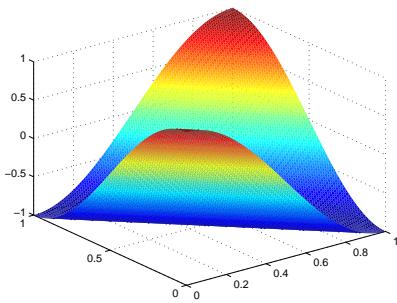
MP3-komprese: $b(t) := \text{sinc}(2\pi(t - 1)) \approx b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t), b_5(t)$



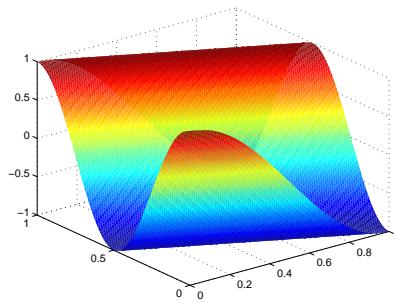
Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese

JPEG-komprese: Fourierova báze $f_{jk}(x, y) := e^{\omega(jx+ky)}$

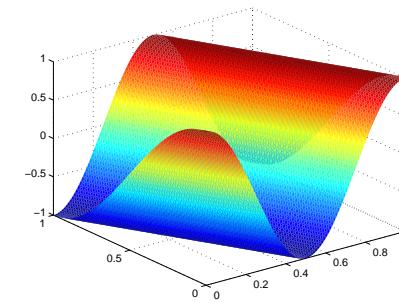
$\text{Re } f_{11}(x, y)$



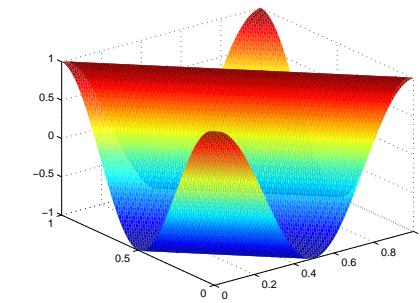
$\text{Re } f_{12}(x, y)$



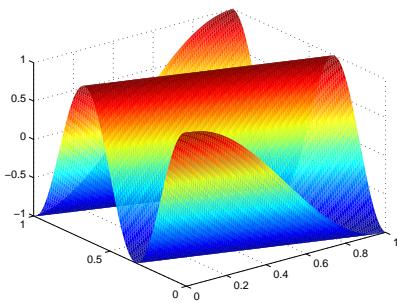
$\text{Re } f_{21}(x, y)$



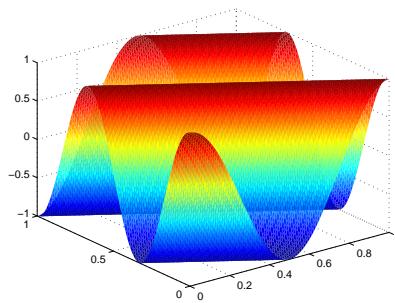
$\text{Re } f_{22}(x, y)$



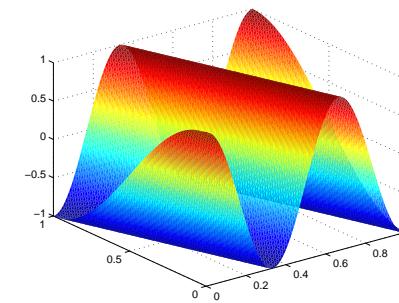
$\text{Re } f_{13}(x, y)$



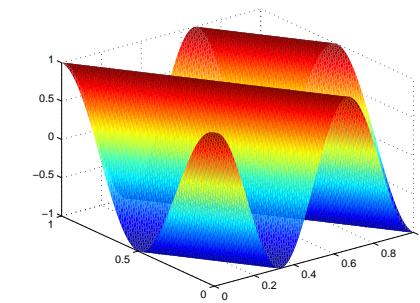
$\text{Re } f_{23}(x, y)$



$\text{Re } f_{31}(x, y)$



$\text{Re } f_{32}(x, y)$



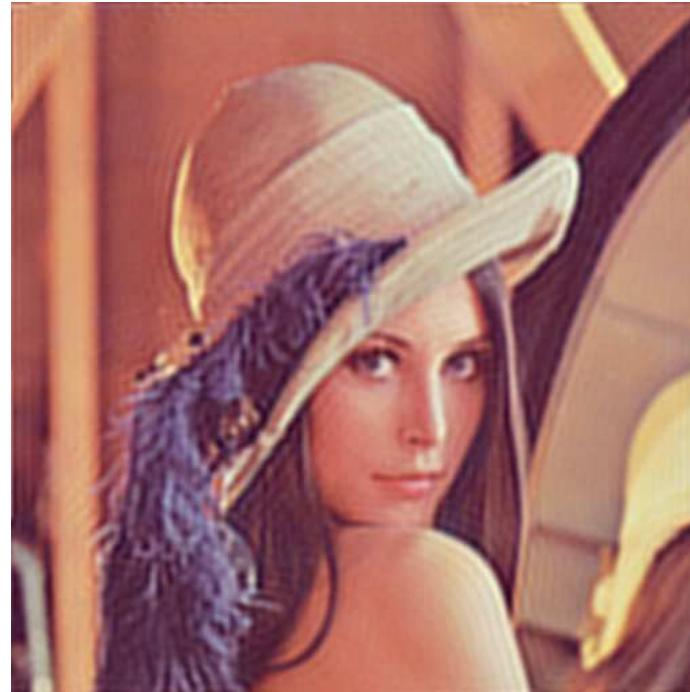
Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese

JPEG-komprese \equiv projekce do (hyper)roviny

bitmapa



5%-komprese Fourierovou bází

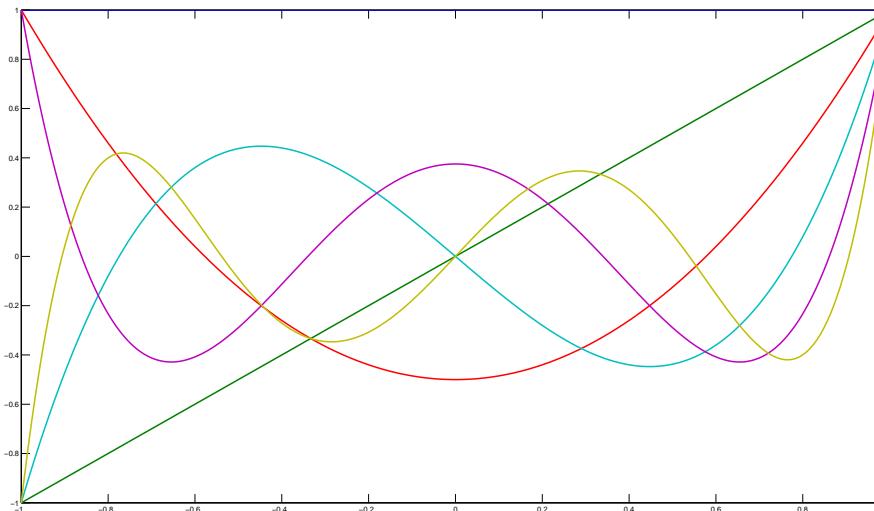


Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese

Legendreovy polynomy

$$L_0(t) := 1, \ L_1(t) := t, \ L_{k+1}(t) := \frac{2k+1}{k+1} t L_k(t) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(t) \text{ pro } k > 1,$$

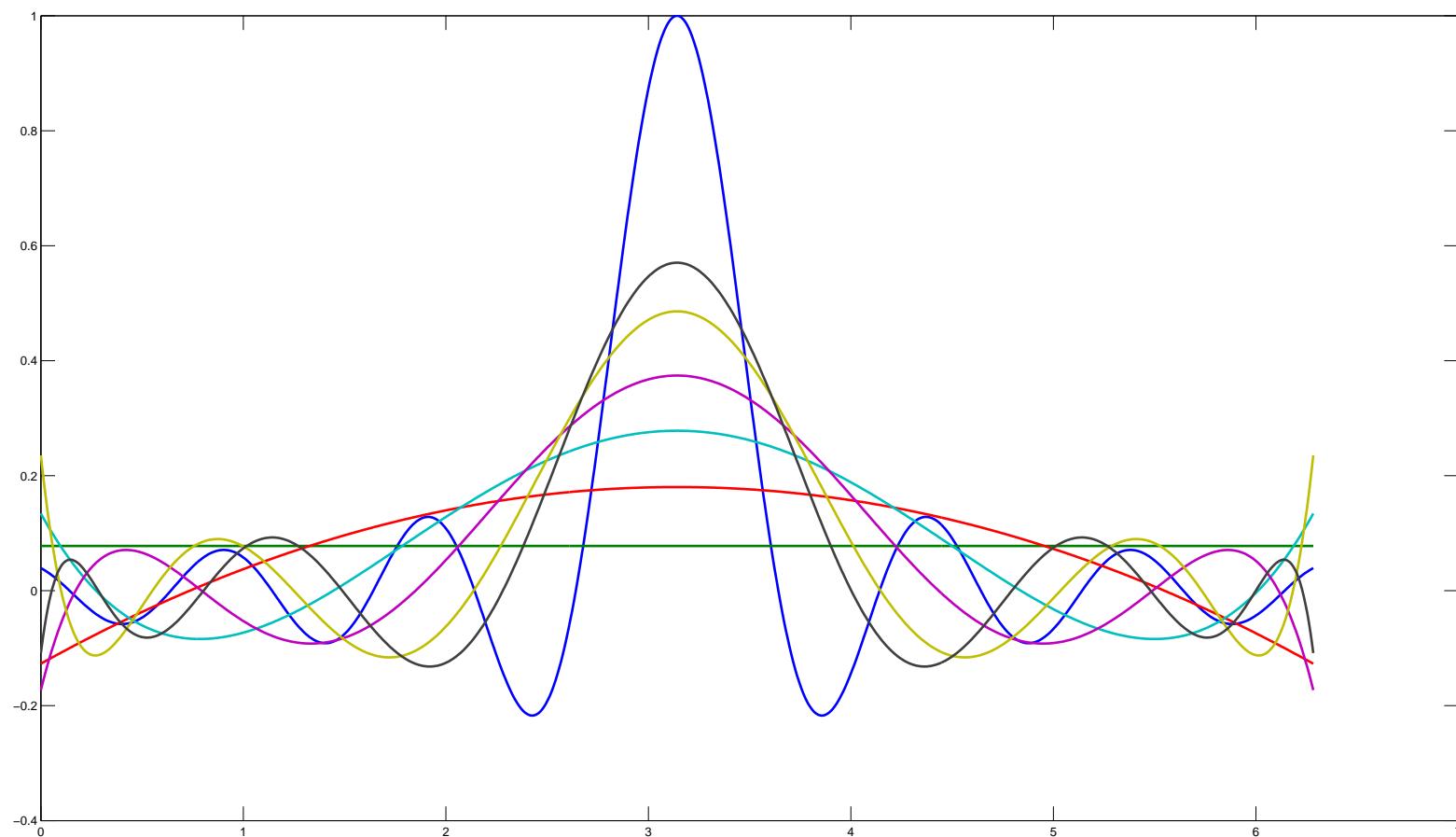
jsou kolmé vzhledem ke skal. součinu $f \cdot g := \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$.



Polynomiální regrese: $b(t) \approx b_n(t) := \sum_{k=0}^n \frac{L_k \cdot b}{\|L_k\|^2} L_k(t)$

Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese

Polynomiální regrese: $b(t) \approx b_0(t), b_2(t), b_4(t), b_6(t), b_8(t), b_{10}(t)$



Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- Přibližné řešení diferenciálních rovnic
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- ~~Přibližné řešení diferenciálních rovnic~~
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

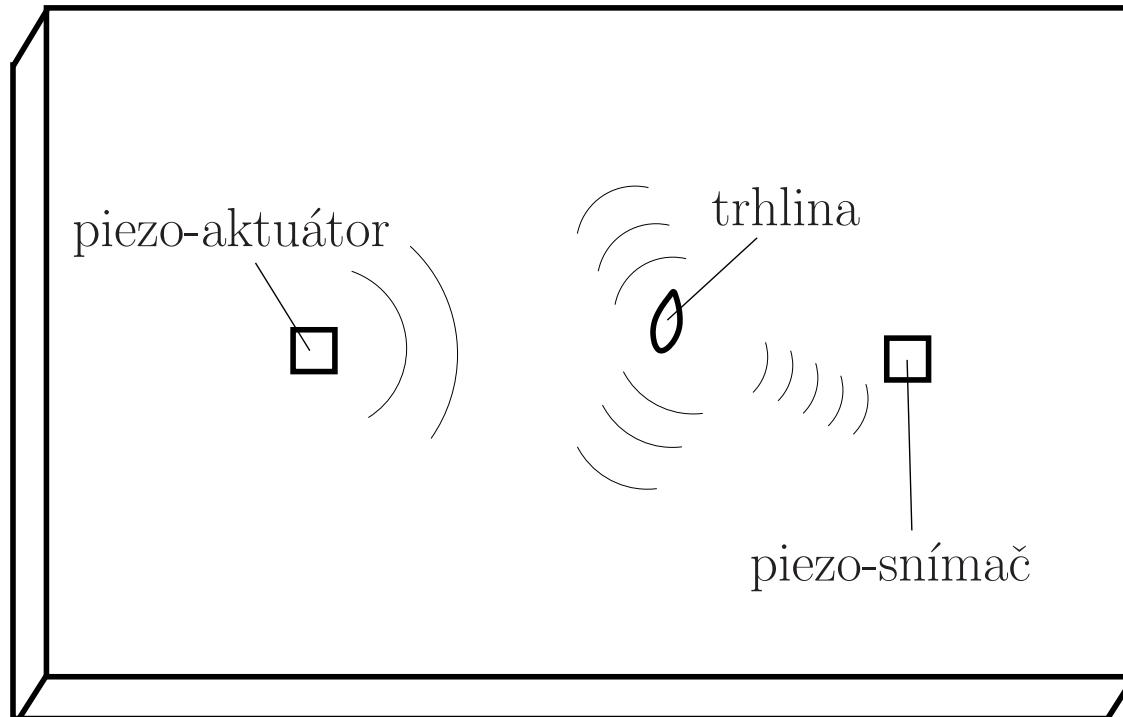
Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- ~~Přibližné řešení diferenciálních rovnic~~
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Ultrazvuková defektoskopie draku (trup, ...) letadla

Spolupráce s Honeywell Brno



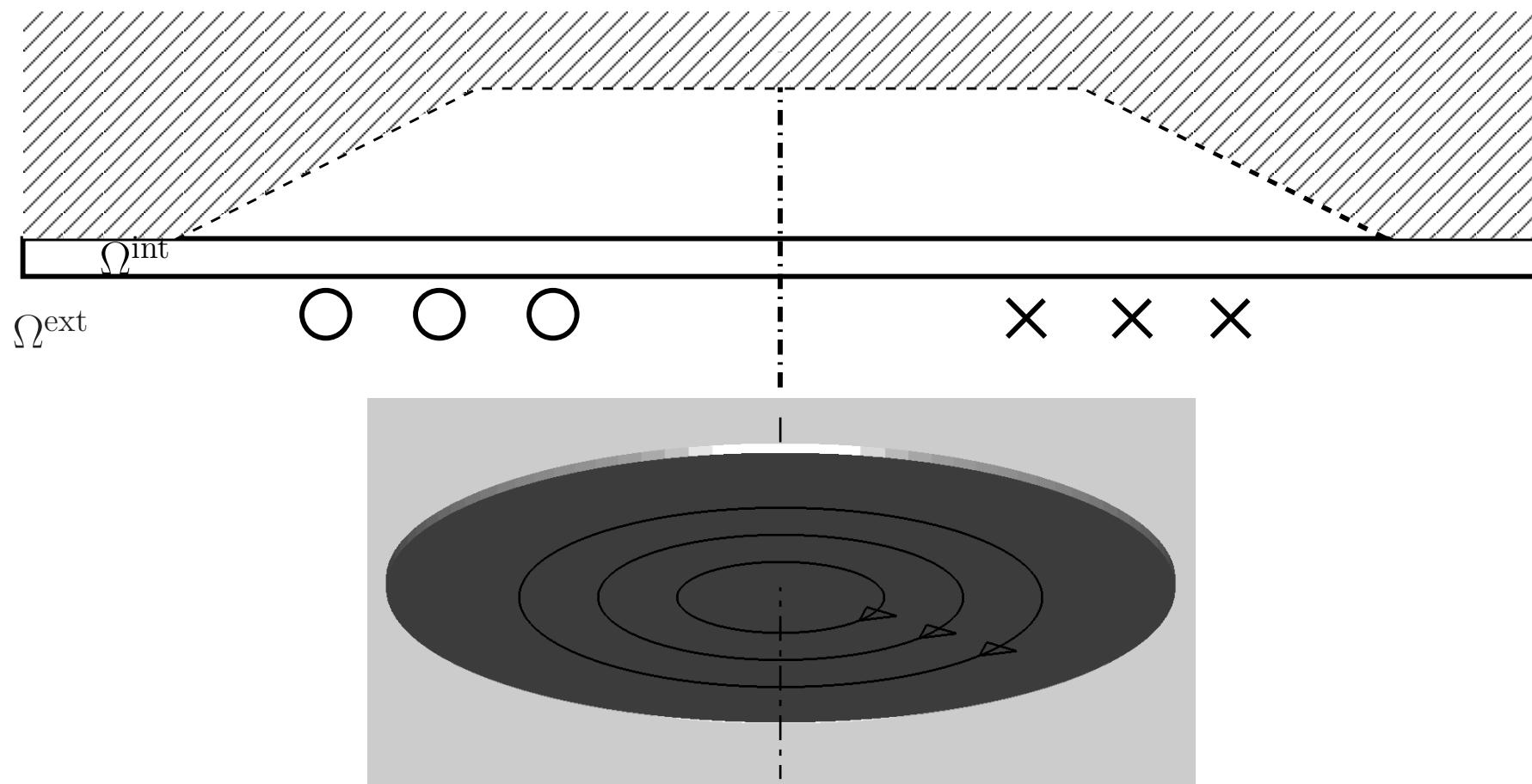
Elektromagnetické tváření plechů

Spolupráce s Fraunhofer Chemnitz

cívka (Ω^{ext}): 3 závity,

budicí proud: amplituda 100 kA, půl perioda sinu, frekvence 8.33 kHz,

vodič (Ω^{int}): hliníkový plech, tl. 2 mm thin, 2 mm nad cívkou



Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Osnova

- Pythagorova věta, Kosinová věta
- Projekce bodu na přímku, rovinu, metoda nejmenších čtverců
- Fourierova řada, MP3, JPEG, polynomiální regrese
- ~~Přibližné řešení diferenciálních rovnic~~
- Dynamika soustavy tyčí, ultrazvuková diagnostika letadel, . . .
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Příklad do ŠKOMAM CUPu

Řešení soustavy Cramer. pravidlem s řádk. rozvojem determinantů

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1((-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) - \dots = -4,$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = -1,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -6,$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = -9,$$

$$x_1 = |\mathbf{A}_1|/|\mathbf{A}| = 1/4, \quad x_2 = |\mathbf{A}_2|/|\mathbf{A}| = 3/2, \quad x_3 = |\mathbf{A}_3|/|\mathbf{A}| = 9/4,$$

Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Příklad do ŠKOMAM CUPu

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz www.top500.org, počítač na světě, čínský Sunway TaihuLight, Kramerovým pravidlem s řádkovým rozvojem determinantů, uvažujeme-li pouze instrukce násobení, kterých provede $93 \cdot 10^{15}$ za sekundu?

Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Příklad do ŠKOMAM CUPu

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz www.top500.org, počítač na světě, čínský Sunway TaihuLight, Kramerovým pravidlem s řádkovým rozvojem determinantů, uvažujeme-li pouze instrukce násobení, kterých provede $93 \cdot 10^{15}$ za sekundu?

Závěr

Na problém lze nahlížet z mnoha pohledů. Matematika nám pomáhá najít ten správný.

Pythagorova věta, ~~vyšší matematika~~ a diagnostika letadel

Příklad do ŠKOMAM CUPu

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz www.top500.org, počítač na světě, čínský Sunway TaihuLight, Kramerovým pravidlem s řádkovým rozvojem determinantů, uvažujeme-li pouze instrukce násobení, kterých provede $93 \cdot 10^{15}$ za sekundu?

Závěr

Na problém lze nahlížet z mnoha pohledů. Matematika nám pomáhá najít ten správný.

Obor Výpočetní a aplik. matematika, FEI VŠB-TUO:

Od (elektro)technického problému k řešení.