

Skoro racionální čísla

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

ŠKOMAM, Ostrava, 17.01.2018

Dva zdroje:

Dva zdroje:

- Dmitry Fuchs, Sergej Tabachnikov: *Mathematical Omnibus*, American Math. Society, 2007.

Dva zdroje:

- Dmitry Fuchs, Sergej Tabachnikov: *Mathematical Omnibus*, American Math. Society, 2007.
- Vít Musil (osobní sdělení)

Dva zdroje:

- Dmitry Fuchs, Sergej Tabachnikov: *Mathematical Omnibus*, American Math. Society, 2007.
- Vít Musil (osobní sdělení)



Dva zdroje:

- Dmitry Fuchs, Sergej Tabachnikov: *Mathematical Omnibus*, American Math. Society, 2007.
- Vít Musil (osobní sdělení)



Tento obrázek nemá nic společného s tématem přednášky

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Jirka:

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš:

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky,

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej,

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku,

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2,

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2, pak $\sqrt{}$,

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2, pak $\sqrt{}$, dostanu

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2, pak $\sqrt{}$, dostanu

1.414214562,

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknou 2, pak $\sqrt{}$, dostanu

1.414214562,

a hned vidím, že je to iracionální.

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2, pak $\sqrt{}$, dostanu

1.414214562,

a hned vidím, že je to iracionální.

Jirka:

Fiktivní rozhovor s kamarádem Jirkou z Ostravy

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2, pak $\sqrt{}$, dostanu

1.414214562,

a hned vidím, že je to iracionální.

Jirka: Co je to za nesmyslné kecy?

Jirka: Hele, my tady umíme dokázat, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Luboš: To umíme v Karlíně taky, podívej, vezmu kalkulačku, zmáčknu 2, pak $\sqrt{}$, dostanu

1.414214562,

a hned vidím, že je to iracionální.

Jirka: Co je to za nesmyslné kecy? Jak bys z tohohle mohl poznat, že je to iracionální?

Fiktivní rozhovor - pokračování

Luboš:

Luboš: No snadno.

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek,

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$,

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

a hned vidím, že ten je racionální.

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

a hned vidím, že ten je racionální. Srovnáme si oba výsledky:

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

a hned vidím, že ten je racionální. Srovnáme si oba výsledky:

1.414214562,

1.470588235.

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

a hned vidím, že ten je racionální. Srovnáme si oba výsledky:

1.414214562,

1.470588235.

Vidíš ten rozdíl?

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

a hned vidím, že ten je racionální. Srovnáme si oba výsledky:

1.414214562,

1.470588235.

Vidíš ten rozdíl?

Jirka:

Luboš: No snadno. Koukej, pro srovnání zkusíme zlomek, třeba $\frac{25}{17}$, dostaneme

1.470588235,

a hned vidím, že ten je racionální. Srovnáme si oba výsledky:

1.414214562,

1.470588235.

Vidíš ten rozdíl?

Jirka: Péto, zapiš někam, ať tohle blbce už nikdy nezveme na OSMU.

Otázka: Kdo má pravdu?

Otázka: Kdo má pravdu?

Je zřejmé, že pravdu má Jirka.

Otázka: Kdo má pravdu?

Je zřejmé, že pravdu má Jirka. Známe-li několik jen čísel desetinného rozvoje nějakého čísla, nemůžeme říci, zda je racionální, či není.

Otázka: Kdo má pravdu?

Je zřejmé, že pravdu má Jirka. Známe-li několik jen čísel desetinného rozvoje nějakého čísla, nemůžeme říci, zda je racionální, či není.

A přesto se obě čísla uvedená v rozhovoru čímsi zásadně liší.

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

1.414214562,
1.470588235.

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

$$\begin{aligned} &1.414214562, \\ &1.470588235. \end{aligned}$$

Druhé číslo je blízko zlomku $\frac{25}{17}$ a jejich rozdíl činí asi 3×10^{-10} .

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

$$\begin{aligned} &1.414214562, \\ &1.470588235. \end{aligned}$$

Druhé číslo je blízko zlomku $\frac{25}{17}$ a jejich rozdíl činí asi 3×10^{-10} .

K prvnímu číslu ale tak blízký zlomek *s dvouciferným jmenovatelem* neexistuje.

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

$$\begin{aligned} 1.414214562, \\ 1.470588235. \end{aligned}$$

Druhé číslo je blízko zlomku $\frac{25}{17}$ a jejich rozdíl činí asi 3×10^{-10} .

K prvnímu číslu ale tak blízký zlomek *s dvouciferným jmenovatelem* neexistuje. Nejbližší je $\frac{99}{70}$,

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

$$\begin{aligned} &1.414214562, \\ &1.470588235. \end{aligned}$$

Druhé číslo je blízko zlomku $\frac{25}{17}$ a jejich rozdíl činí asi 3×10^{-10} .

K prvnímu číslu ale tak blízký zlomek *s dvouciferným jmenovatelem* neexistuje. Nejblíže je $\frac{99}{70}$, a to s chybou asi 7×10^{-5} .

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

$$\begin{aligned} 1.414214562, \\ 1.470588235. \end{aligned}$$

Druhé číslo je blízko zlomku $\frac{25}{17}$ a jejich rozdíl činí asi 3×10^{-10} .

K prvnímu číslu ale tak blízký zlomek *s dvouciferným jmenovatelem* neexistuje. Nejbližší je $\frac{99}{70}$, a to s chybou asi 7×10^{-5} .

Naproti tomu nejjednodušší zlomek se srovnatelnou chybou 3×10^{-10} je $\frac{47321}{33461}$.

Podívejme se ještě jednou na oba příklady:

$$1.414214562,$$
$$1.470588235.$$

Druhé číslo je blízko zlomku $\frac{25}{17}$ a jejich rozdíl činí asi 3×10^{-10} .

K prvnímu číslu ale tak blízký zlomek *s dvouciferným jmenovatelem* neexistuje. Nejblíže je $\frac{99}{70}$, a to s chybou asi 7×10^{-5} .

Naproti tomu nejjednodušší zlomek se srovnatelnou chybou 3×10^{-10} je $\frac{47321}{33461}$.

Tuto vlastnost okem nerozpoznatelnou lze odhalit jednoduchými výpočty na kalkulačce.

Budeme potřebovat kalkulačku, která umí sčítat, odčítat, násobit a dělit.

Budeme potřebovat kalkulačku, která umí sčítat, odčítat, násobit a dělit. Někdo nám dá dvě čísla, například

Budeme potřebovat kalkulačku, která umí sčítat, odčítat, násobit a dělit. Někdo nám dá dvě čísla, například

0.635149023 a 0.728101457.

Budeme potřebovat kalkulačku, která umí sčítat, odčítat, násobit a dělit. Někdo nám dá dvě čísla, například

0.635149023 a 0.728101457.

Jedno z nich by mělo vzniknout jako zlomek se jmenovatelem menším než 1000, druhé náhodně.

Budeme potřebovat kalkulačku, která umí sčítat, odčítat, násobit a dělit. Někdo nám dá dvě čísla, například

0.635149023 a 0.728101457.

Jedno z nich by mělo vzniknout jako zlomek se jmenovatelem menším než 1000, druhé náhodně.

Tvrdíme, že během jedné minuty na kalkulačce zjistíme, které z obou čísel je oním podílem, a dokonce určíme příslušný zlomek.

Jak na to?

Podstata triku spočívá v *matematickém pozadí* problému.

Podstata triku spočívá v *matematickém pozadí* problému.

Jednoduše řečeno, jedno z čísel je *skoro racionální*, zatímco druhé nikoli (ať už toto sdělení znamená cokoli).

Dobrá aproximace

Nechť α je iracionální.

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Dobrá aproximace

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Chceme, aby:

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Chceme, aby:

- *chyba* $|\alpha - \frac{p}{q}|$ *byla malá*,

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Chceme, aby:

- *chyba $|\alpha - \frac{p}{q}|$ byla malá,*
- *čísla p, q nebyla moc velká.*

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Chceme, aby:

- *chyba $|\alpha - \frac{p}{q}|$ byla malá,*
- *čísla p, q nebyla moc velká.*

Čitatel p závisí na α , ale ne na chybě aproximace.

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Chceme, aby:

- *chyba $|\alpha - \frac{p}{q}|$ byla malá,*
- *čísla p, q nebyla moc velká.*

Čitatel p závisí na α , ale ne na chybě aproximace.

Tedy chceme:

Nechť α je iracionální.

Co znamená, že zlomek $\frac{p}{q}$ je *dobrou aproximací* čísla α ?

Chceme, aby:

- *chyba $|\alpha - \frac{p}{q}|$ byla malá,*
- *čísla p, q nebyla moc velká.*

Čísel p závisí na α , ale ne na chybě aproximace.

Tedy chceme: *minimizovat q a $|\alpha - \frac{p}{q}|$.*

Ukazatel kvality aproximace

Ukazatelem kvality aproximace nazveme hodnotu

Ukazatelem kvality aproximace nazveme hodnotu

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Ukazatelem kvality aproximace nazveme hodnotu

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Aproximaci prohlásíme za *dobrou*, bude-li její ukazatel kvality malý.

Bohužel platí následující

Bohužel platí následující

Věta 1.

Bohužel platí následující

Věta 1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Bohužel platí následující

Věta 1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, všechna čísla jsou stejně dobrá.

Bohužel platí následující

Věta 1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, všechna čísla jsou stejně dobrá.

Co s tím?

Bohužel platí následující

Věta 1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, všechna čísla jsou stejně dobrá.

Co s tím? *Změníme ukazatel!*

Bohužel platí následující

Věta 1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, všechna čísla jsou stejně dobrá.

Co s tím? *Změníme ukazatel!*

Jak?

Bohužel platí následující

Věta 1. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, všechna čísla jsou stejně dobrá.

Co s tím? *Změníme ukazatel!*

Jak? Položíme větší váhu na *velikost jmenovatele q* .

Nový ukazatel kvality aproximace

Nový ukazatel kvality aproximace

Vytuněným ukazatelem kvality aproximace nazveme hodnotu

Vytuněným ukazatelem kvality aproximace nazveme hodnotu

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Vytuněným ukazatelem kvality aproximace nazveme hodnotu

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Aproximaci prohlásíme za *dobrou*, bude-li její vytuněný ukazatel kvality malý.

Tato volba již je opodstatněná.

Tato volba již je opodstatněná.

Věta 2.

Tato volba již je opodstatněná.

Věta 2. (a) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tato volba již je opodstatněná.

Věta 2. (a) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) Existuje iracionální číslo α takové, že pro každé $\lambda > \sqrt{5}$ existuje jen konečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda}.$$

Tato volba již je opodstatněná.

Věta 2. (a) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) Existuje iracionální číslo α takové, že pro každé $\lambda > \sqrt{5}$ existuje jen konečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda}.$$

Číslo α nazveme *nejiracionálnějším číslem*.

Tato volba již je opodstatněná.

Věta 2. (a) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) Existuje iracionální číslo α takové, že pro každé $\lambda > \sqrt{5}$ existuje jen konečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda}.$$

Číslo α nazveme *nejiracionálnějším číslem*. Tipněte si, které to je.

Tato volba již je opodstatněná.

Věta 2. (a) Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) Existuje iracionální číslo α takové, že pro každé $\lambda > \sqrt{5}$ existuje jen konečně mnoho zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda}.$$

Číslo α nazveme *nejiracionálnějším číslem*. Tipněte si, které to je.

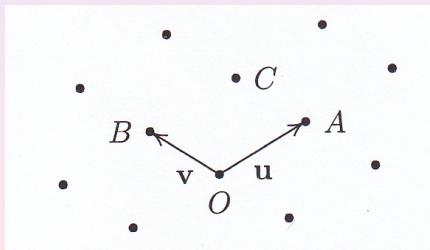
Nejiracionálnější číslo je $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (tzv. *zlatý řez*).

Mřížkou generovanou dvěma vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazveme množinu všech bodů

$$a\vec{u} + b\vec{v}, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Mřížkou generovanou dvěma vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazveme množinu všech bodů

$$a\vec{u} + b\vec{v}, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{Z}.$$



Zvolme $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$.

Zvolme $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$.

Pak pro p, q celá leží body

$$p(-1, 0) + q(\alpha, 1) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q)$$

na mřížce.

Zvolme $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$.

Pak pro p, q celá leží body

$$p(-1, 0) + q(\alpha, 1) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q)$$

na mřížce.

Ukazatel kvality je roven *vzdálenosti mřížkového bodu od osy y*.

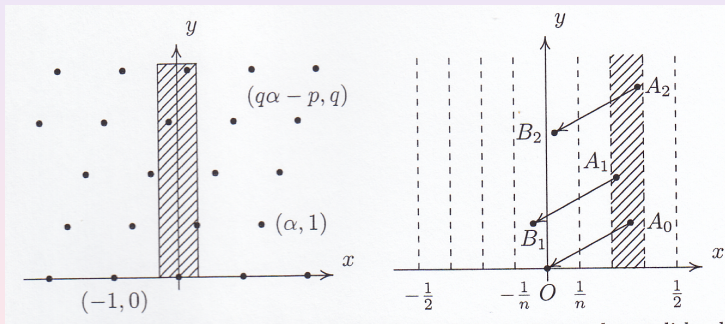
Geometrický důkaz Věty 1

Geometrický důkaz Věty 1

Musíme najít nekonečně mnoho bodů mřížky libovolně blízko ose y .

Geometrický důkaz Věty 1

Musíme najít nekonečně mnoho bodů mřížky libovolně blízko ose y .



Tvrzení 3. Buď $KLMN$ rovnoběžník tvořený mřížkovými body a s je obsah základního rovnoběžníku $OACB$.

Tvrzení 3. Buď $KLMN$ rovnoběžník tvořený mřížkovými body a s je obsah základního rovnoběžníku $OACB$.

(a) Obsah $KLMN$ je roven ns pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

Tvrzení 3. Buď $KLMN$ rovnoběžník tvořený mřížkovými body a s je obsah základního rovnoběžníku $OACB$.

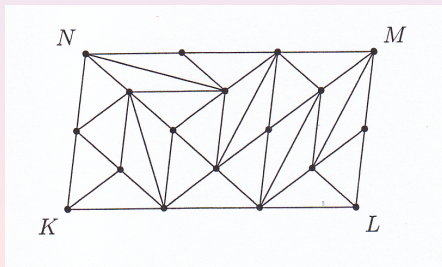
(a) Obsah $KLMN$ je roven ns pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

(b) Jestliže rovnoběžník $KLMN$ neobsahuje mřížkové body uvnitř ani na hranici, pak je jeho obsah roven s .

Tvrzení 3. Buď $KLMN$ rovnoběžník tvořený mřížkovými body a s je obsah základního rovnoběžníku $OACB$.

(a) Obsah $KLMN$ je roven ns pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

(b) Jestliže rovnoběžník $KLMN$ neobsahuje mřížkové body uvnitř ani na hranici, pak je jeho obsah roven s .



Konečným řetězovým zlomkem rozumíme výraz tvaru

Konečným řetězovým zlomkem rozumíme výraz tvaru

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

Konečným řetězovým zlomkem rozumíme výraz tvaru

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

kde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ jsou kladná, $a_n > 1$.

Konstrukce racionálních čísel

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak jej lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku.

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak jej lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku.

Čísla $a_0, \dots, a_n$ vypočítáme ze vzorců

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak jej lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku.

Čísla $a_0, \dots, a_n$ vypočítáme ze vzorců

$$a_0 = [r], \quad a_1 = \left[\frac{1}{r - a_0} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{r - a_0} - a_1} \right], \dots$$

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak jej lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku.

Čísla $a_0, \dots, a_n$ vypočítáme ze vzorců

$$a_0 = [r], \quad a_1 = \left[\frac{1}{r - a_0} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{r - a_0} - a_1} \right], \dots$$

Důležité pozorování:

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak jej lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku.

Čísla $a_0, \dots, a_n$ vypočítáme ze vzorců

$$a_0 = [r], \quad a_1 = \left[\frac{1}{r - a_0} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{r - a_0} - a_1} \right], \dots$$

Důležité pozorování: Nic nám nebrání použít tento algoritmus i pro iracionální číslo.

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, pak jej lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku.

Čísla $a_0, \dots, a_n$ vypočítáme ze vzorců

$$a_0 = [r], \quad a_1 = \left[\frac{1}{r - a_0} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{r - a_0} - a_1} \right], \dots$$

Důležité pozorování: Nic nám nebrání použít tento algoritmus i pro iracionální číslo. Akorát jich holt pak nebude konečně mnoho
...

Konstrukce iracionálních čísel

Nechť $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pak jej lze zapsat ve tvaru *nekonečného* řetězového zlomku.

Nechť $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pak jej lze zapsat ve tvaru *nekonečného* řetězového zlomku.

Formálně píšeme

Konstrukce iracionálních čísel

Nechť $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pak jej lze zapsat ve tvaru *nekonečného* řetězového zlomku.

Formálně píšeme

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Nechť $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pak jej lze zapsat ve tvaru *nekonečného* řetězového zlomku.

Formálně píšeme

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots$ nazýváme *neúplnými podíly* čísla α .

Aproximanty iracionálního čísla

Aproximanty iracionálního čísla

n-tým aproximantem čísla α nazveme číslo

Aproximanty iracionálního čísla

n-tým aproximantem čísla α nazveme číslo

$$r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Aproximanty iracionálního čísla

n-tým aproximantem čísla α nazveme číslo

$$r_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Zřejmě platí

$$r_0 < r_2 < r_4 \cdots < \alpha < \cdots < r_5 < r_3 < r_1.$$

Rekurentní vztahy

Shrňme si poznatky.

Shrňme si poznatky.

Tvrzení 4. Platí

Shrňme si poznatky.

Tvrzení 4. Platí

- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2,$

Shrňme si poznatky.

Tvrzení 4. Platí

- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2,$
- $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2,$

Shrňme si poznatky.

Tvrzení 4. Platí

- $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2,$
- $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2,$
- $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \quad n \geq 1.$

Značení. Nekonečný řetězový zlomek s neúplnými podíly $a_0, a_1, a_2, \dots$ budeme značit symbolem

$$[a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Značení. Nekonečný řetězový zlomek s neúplnými podíly $a_0, a_1, a_2, \dots$ budeme značit symbolem

$$[a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Konečný řetězový zlomek s neúplnými podíly $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ budeme značit symbolem

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické.

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky racionálních čísel jsou *vždy* konečné.

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky racionálních čísel jsou *vždy* konečné.

Příklady. Je-li $\alpha = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ a $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, \dots]$, pak

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky racionálních čísel jsou *vždy* konečné.

Příklady. Je-li $\alpha = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ a $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, \dots]$, pak

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta = 2 + \frac{1}{\beta},$$

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky racionálních čísel jsou *vždy* konečné.

Příklady. Je-li $\alpha = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ a $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, \dots]$, pak

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta = 2 + \frac{1}{\beta},$$

takže

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky racionálních čísel jsou *vždy* konečné.

Příklady. Je-li $\alpha = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ a $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, \dots]$, pak

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta = 2 + \frac{1}{\beta},$$

takže

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = 1 + \sqrt{2}.$$

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje

Otázka. Proč jsou řetězové zlomky lepší než desetinné rozvoje?

Desetinné rozvoje racionálních čísel jsou buď konečné nebo periodické. Desetinné rozvoje čísel e , π , nebo $\sqrt{2}$ jsou zcela chaotické.

Řetězové zlomky racionálních čísel jsou **vždy** konečné.

Příklady. Je-li $\alpha = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ a $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, \dots]$, pak

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta = 2 + \frac{1}{\beta},$$

takže

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = 1 + \sqrt{2}.$$

Tedy $\beta - 1 = \sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$

Řetězové zlomky versus desetinné rozvoje - pokračování

Otázka. Proč jsou desetinné rozvoje lepší než řetězové zlomky?

Otázka. Proč jsou desetinné rozvoje lepší než řetězové zlomky?

Pro desetinné rozvoje lze použít řadu příhodných algoritmů (sčítání, odčítání, násobení, dělení, odmocniny atd.).

Otázka. Proč jsou desetinné rozvoje lepší než řetězové zlomky?

Pro desetinné rozvoje lze použít řadu příhodných algoritmů (sčítání, odčítání, násobení, dělení, odmocniny atd.). Pro řetězové zlomky téměř žádné algoritmy neexistují.

Otázka. Proč jsou desetinné rozvoje lepší než řetězové zlomky?

Pro desetinné rozvoje lze použít řadu příhodných algoritmů (sčítání, odčítání, násobení, dělení, odmocniny atd.). Pro řetězové zlomky téměř žádné algoritmy neexistují.

Ale něco přece jen máme.

Eukleidův algoritmus

Eukleidův algoritmus

Nechť M, N jsou přirozená čísla, $N > M$.

Eukleidův algoritmus

Nechť M, N jsou přirozená čísla, $N > M$.

$$N = a_0M + b_0$$

$$M = a_1b_0 + b_1$$

$$b_0 = a_2b_1 + b_2$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2} = a_nb_{n-1},$$

Nechť M, N jsou přirozená čísla, $N > M$.

$$N = a_0M + b_0$$

$$M = a_1b_0 + b_1$$

$$b_0 = a_2b_1 + b_2$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2} = a_nb_{n-1},$$

kde $0 < b_{n-1} < b_{n-2} < \cdots < b_0 < M$.

Eukleidův algoritmus

Nechť M, N jsou přirozená čísla, $N > M$.

$$N = a_0M + b_0$$

$$M = a_1b_0 + b_1$$

$$b_0 = a_2b_1 + b_2$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2} = a_nb_{n-1},$$

kde $0 < b_{n-1} < b_{n-2} < \cdots < b_0 < M$.

Pak b_{n-1} je největší společný dělitel M, N .

Eukleidův algoritmus a aproximanty

Tvrzení 5.

Tvrzení 5. (a) Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou neúplné podíly čísla $\frac{N}{M}$,

Tvrzení 5. (a) Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou neúplné podíly čísla $\frac{N}{M}$,

$$\frac{N}{M} = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

Tvrzení 5. (a) Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou neúplné podíly čísla $\frac{N}{M}$,

$$\frac{N}{M} = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

(b) Pro i -tý aproximant $\frac{p_i}{q_i}$ platí

Tvrzení 5. (a) Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou neúplné podíly čísla $\frac{N}{M}$,

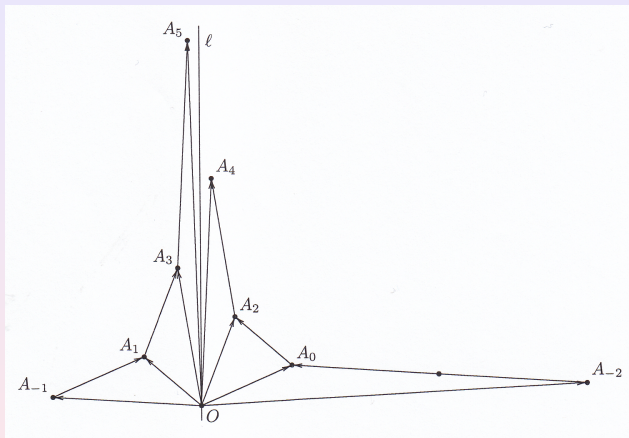
$$\frac{N}{M} = [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

(b) Pro i -tý aproximan $\frac{p_i}{q_i}$ platí

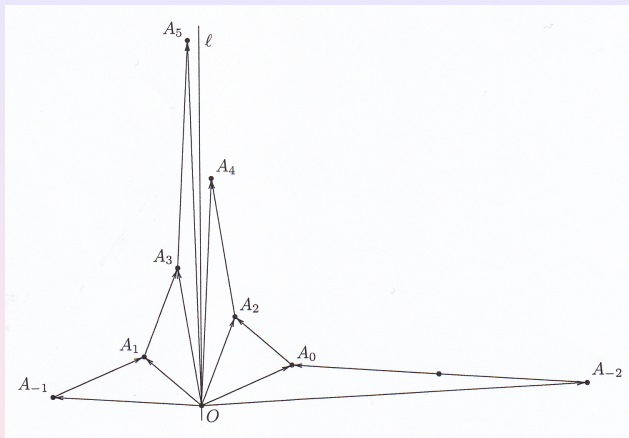
$$b_i = (-1)^i (Nq_i - Mp_i).$$

Geometrická reprezentace Eukleidova algoritmu

Geometrická reprezentace Eukleidova algoritmu



Geometrická reprezentace Eukleidova algoritmu



Tvrzení 6. Mezi lomenými čarami $A_{-2}A_0A_2A_4\dots$ a $A_{-1}A_1A_3A_5\dots$ neleží žádný mřížkový bod.

Nejlepší racionální aproximace

Nejlepší racionální aproximace

Nechť opět $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$,

Nejlepší racionální aproximace

Nechť opět $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$, tedy

$$p(-1, 0) + q(\alpha, 1) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q).$$

Nejlepší racionální aproximace

Nechť opět $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$, tedy

$$p(-1, 0) + q(\alpha, 1) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q).$$

Vytuněný ukazatel kvality $q^2|\alpha - \frac{p}{q}|$ je roven $|xy|$.

Nejlepší racionální aproximace

Nechť opět $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$, tedy

$$p(-1, 0) + q(\alpha, 1) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q).$$

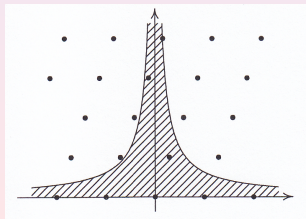
Vytuněný ukazatel kvality $q^2|\alpha - \frac{p}{q}|$ je roven $|xy|$. Tedy počet aproximací s ukazatelem $< \varepsilon$ je počet mřížkových bodů v sektoru $|xy| < \varepsilon$.

Nejlepší racionální aproximace

Nechť opět $\vec{u} = (-1, 0)$ a $\vec{v} = (\alpha, 1)$, tedy

$$p(-1, 0) + q(\alpha, 1) = (q(\alpha - \frac{p}{q}), q).$$

Vytuněný ukazatel kvality $q^2|\alpha - \frac{p}{q}|$ je roven $|xy|$. Tedy počet aproximací s ukazatelem $< \varepsilon$ je počet mřížkových bodů v sektoru $|xy| < \varepsilon$.



Trocha matematiky

Obdrželi jsme následující poznatky.

Obdrželi jsme následující poznatky.

Věta 7. Aplikujeme-li Eukleidův algoritmus pro $A_2 = (\alpha, 1)$ a $A_{-1} = (-1, 0)$, dostaneme pro $n \geq 0$ body $A_n = (q_n\alpha - p_n, q_n)$, kde p_n a q_n jsou (nesoudělné) čitatele a jmenovatele n -tých aproximantů čísla α .

Obdrželi jsme následující poznatky.

Věta 7. Aplikujeme-li Eukleidův algoritmus pro $A_2 = (\alpha, 1)$ a $A_{-1} = (-1, 0)$, dostaneme pro $n \geq 0$ body $A_n = (q_n\alpha - p_n, q_n)$, kde p_n a q_n jsou (nesoudělné) čitatele a jmenovatele n -tých aproximantů čísla α .

Věta 7 a Tvzení 6 říkají, že právě aproximanty A_n jsou prvky nejlepší aproximace.

Obdrželi jsme následující poznatky.

Věta 7. Aplikujeme-li Eukleidův algoritmus pro $A_2 = (\alpha, 1)$ a $A_{-1} = (-1, 0)$, dostaneme pro $n \geq 0$ body $A_n = (q_n\alpha - p_n, q_n)$, kde p_n a q_n jsou (nesoudělné) čitatele a jmenovatele n -tých aproximantů čísla α .

Věta 7 a Tvzení 6 říkají, že právě aproximanty A_n jsou prvky nejlepší aproximace. Nic lepšího již nenajdeme.

Shrňme uvedený poznatek do následující věty.

Shrňme uvedený poznatek do následující věty.

Věta 8. Necht' $\varepsilon > 0$.

Shrňme uvedený poznatek do následující věty.

Věta 8. Necht' $\varepsilon > 0$. Jestliže existuje jen konečně mnoho zlomků $\frac{p_n}{q_n}$ takových, že $q^2|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \varepsilon$, pak je množina všech zlomků $\frac{p}{q}$ splňujících $q^2|\alpha - \frac{p}{q}| < \varepsilon$ konečná.

Pár poznámek

Samotný tvar vytuněného ukazatele kvality není podstatný.

Samotný tvar vytuněného ukazatele kvality není podstatný.

Podstatné ke, že *aproximanty skýtají nejlepší aproximaci*.

Samotný tvar vytuněného ukazatele kvality není podstatný.

Podstatné ke, že *aproximanty skýtají nejlepší aproximaci*.

Příklady. Pro *zlatý řez* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ máme aproximanty

Samotný tvar vytuněného ukazatele kvality není podstatný.

Podstatné ke, že *aproximanty skýtají nejlepší aproximaci*.

Příklady. Pro *zlatý řez* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ máme aproximanty

$$1, [1; 1] = \frac{2}{1}, [1; 1, 1] = \frac{3}{2}, [1; 1, 1, 1] = \frac{8}{5}, \dots$$

Samotný tvar vytuněného ukazatele kvality není podstatný.

Podstatné ke, že *aproximanty skýtají nejlepší aproximaci*.

Příklady. Pro *zlatý řez* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ máme aproximanty

$$1, [1; 1] = \frac{2}{1}, [1; 1, 1] = \frac{3}{2}, [1; 1, 1, 1] = \frac{8}{5}, \dots$$

Má to něco společného s králíky?

A více příkladů

Příklady. Pro *odmocninu ze dvou* $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ máme aproximanty

A více příkladů

Příklady. Pro *odmocninu ze dvou* $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ máme aproximanty

$$1, [1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12},$$

Příklady. Pro *odmocninu ze dvou* $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ máme aproximanty

$$1, [1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12},$$

$$[1; 2, 2, 2, 2] = \frac{41}{29}, [1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70},$$

Příklady. Pro *odmocninu ze dvou* $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ máme aproximanty

$$1, [1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12},$$

$$[1; 2, 2, 2, 2] = \frac{41}{29}, [1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70},$$

$$[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{47321}{33461}, \dots$$

Příklady. Pro *odmocninu ze dvou* $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$ máme aproximanty

$$1, [1; 2] = \frac{3}{2}, [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12},$$

$$[1; 2, 2, 2, 2] = \frac{41}{29}, [1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70},$$

$$[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{47321}{33461}, \dots$$

Neviděli jsme poslední dva zlomky už někde?

Odhad chyby

Již víme, které zlomky jsou číslu α nejbližší.

Již víme, které zlomky jsou číslu α nejbližší.

Nyní se zaměříme na odhad chyby.

Již víme, které zlomky jsou číslu α nejbližší.

Nyní se zaměříme na odhad chyby.

Šokující sdělení: pro vytuněný ukazatel kvality aproximantů existuje nádherný vzorec.

Již víme, které zlomky jsou číslu α nejbližší.

Nyní se zaměříme na odhad chyby.

Šokující sdělení: pro vytuněný ukazatel kvality aproximantů existuje nádherný vzorec.

Věta 9. Necht' $\frac{p_n}{q_n}$ je n -tý aproximant reálného čísla $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Pak

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n},$$

Již víme, které zlomky jsou číslu α nejbližší.

Nyní se zaměříme na odhad chyby.

Šokující sdělení: pro vytuněný ukazatel kvality aproximantů existuje nádherný vzorec.

Věta 9. Necht' $\frac{p_n}{q_n}$ je n -tý aproximant reálného čísla $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Pak

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n},$$

kde

$$\lambda_n = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \frac{1}{\ddots}}} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_1}}}.$$

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů.

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů. To znamená, že má několik slušných racionálních aproximací.

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů. To znamená, že má několik slušných racionálních aproximací. Číslo 15 odpovídá zlomek $[3; 7] = \frac{22}{7}$ (s chybou 3×10^{-3}) a číslu 293 zlomek $[3; 1, 15, 1] = \frac{355}{113}$ (s chybou $2 \times 7 \times 10^{-7}$).

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů. To znamená, že má několik slušných racionálních aproximací. Číslo 15 odpovídá zlomek $[3; 7] = \frac{22}{7}$ (s chybou 3×10^{-3}) a číslu 293 zlomek $[3; 1, 15, 1] = \frac{355}{113}$ (s chybou $2 \times 7 \times 10^{-7}$).

První z nich znal Archimédes.

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů. To znamená, že má několik slušných racionálních aproximací. Číslo 15 odpovídá zlomek $[3; 7] = \frac{22}{7}$ (s chybou 3×10^{-3}) a číslu 293 zlomek $[3; 1, 15, 1] = \frac{355}{113}$ (s chybou $2 \times 7 \times 10^{-7}$).

První z nich znal Archimédes.

Druhý odhalil Adriaen Metius v roce 1585.

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů. To znamená, že má několik slušných racionálních aproximací. Číslo 15 odpovídá zlomek $[3; 7] = \frac{22}{7}$ (s chybou 3×10^{-3}) a číslu 293 zlomek $[3; 1, 15, 1] = \frac{355}{113}$ (s chybou $2 \times 7 \times 10^{-7}$).

První z nich znal Archimédes.

Druhý odhalil Adriaen Metius v roce 1585.

Číslo e žádnou srovnatelně dobrou aproximaci nemá.

Příkladů není nikdy dost

Příklady. Pro *nejznámější dvě iracionální čísla* platí

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, 8, \dots], \quad e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots].$$

Vidíme, že na rozdíl od e má číslo π pár velkých neúplných podílů. To znamená, že má několik slušných racionálních aproximací. Číslo 15 odpovídá zlomek $[3; 7] = \frac{22}{7}$ (s chybou 3×10^{-3}) a číslu 293 zlomek $[3; 1, 15, 1] = \frac{355}{113}$ (s chybou $2 \times 7 \times 10^{-7}$).

První z nich znal Archimédes.

Druhý odhalil Adriaen Metius v roce 1585.

Číslo e žádnou srovnatelně dobrou aproximaci nemá. Nejlepší jsou $\frac{19}{7}$ (s chybou 4×10^{-3}) a $\frac{199}{71}$ (s chybou $2 \times 8 \times 10^{-5}$).

Máme dvě devíticiferná čísla, a to

Máme dvě devíticiferná čísla, a to

0.635149023 a 0.728101457.

Máme dvě devíticiferná čísla, a to

0.635149023 a 0.728101457.

Jedno z nich vzniklo jako zlomek se jmenovatelem menším než 1000, druhé náhodně.

Máme dvě devíticiferná čísla, a to

0.635149023 a 0.728101457.

Jedno z nich vzniklo jako zlomek se jmenovatelem menším než 1000, druhé náhodně.

Je-li číslo α *devíticifernou aproximací* čísla $\frac{p}{q}$ s tříciferným jmenovatelem, pak

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1000(1000)^2} < \frac{1}{1000q^2}.$$

Máme dvě devíticiferná čísla, a to

0.635149023 a 0.728101457.

Jedno z nich vzniklo jako zlomek se jmenovatelem menším než 1000, druhé náhodně.

Je-li číslo α *devíticifernou aproximací* čísla $\frac{p}{q}$ s tříciferným jmenovatelem, pak

$$q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1000(1000)^2} < \frac{1}{1000q^2}.$$

Tedy alespoň jedno z čísel λ_n je větší než 1000.

Rozuzlení se blíží

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka.

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka. Jak velké může být n ?

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka. Jak velké může být n ? (Tj. kolik aproximantů musíme prozkoumat?)

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka. Jak velké může být n ? (Tj. kolik aproximantů musíme prozkoumat?)

Odpověď.

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka. Jak velké může být n ? (Tj. kolik aproximantů musíme prozkoumat?)

Odpověď.

- Platí $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka. Jak velké může být n ? (Tj. kolik aproximantů musíme prozkoumat?)

Odpověď.

- Platí $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.
- Tedy čísla q_n rostou alespoň jako Fibonacciova čísla F_n .

Triviálně platí $a_{n+1} < \lambda_n < a_{n+1} + 2$, takže $a_{n+1} > 1000$ a odpovídající $q_n < 1000$.

Otázka. Jak velké může být n ? (Tj. kolik aproximantů musíme prozkoumat?)

Odpověď.

- Platí $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.
- Tedy čísla q_n rostou alespoň jako Fibonacciova čísla F_n .
- Protože $F_{15} = 987$, může být n **nejvýše 15**.

Co tedy máme udělat?

Co tedy máme udělat?

Převédeme zadaná čísla na řetězové zlomky a prozkoumáme (nejvýše) prvních patnáct aproximantů.

Co tedy máme udělat?

Převédeme zadaná čísla na řetězové zlomky a prozkoumáme (nejvýše) prvních patnáct aproximantů.

$$0.635149023 = [0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13, \textcolor{red}{1204}, 1, \dots]$$

$$0.728101457 = [0; 1, 2, 1, 2, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 15, 1, 59, 7, 1, 39, \dots]$$

Co tedy máme udělat?

Převédeme zadaná čísla na řetězové zlomky a prozkoumáme (nejvýše) prvních patnáct aproximantů.

$$0.635149023 = [0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13, \textcolor{red}{1204}, 1, \dots]$$

$$0.728101457 = [0; 1, 2, 1, 2, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 15, 1, 59, 7, 1, 39, \dots]$$

Je zřejmé, že první číslo má dobrou racionální aproximaci, a to číslem $[0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13]$, tedy zlomkem $\frac{618}{973}$.

Co tedy máme udělat?

Převedeme zadaná čísla na řetězové zlomky a prozkoumáme (nejvýše) prvních patnáct aproximantů.

$$0.635149023 = [0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13, \textcolor{red}{1204}, 1, \dots]$$

$$0.728101457 = [0; 1, 2, 1, 2, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 15, 1, 59, 7, 1, 39, \dots]$$

Je zřejmé, že první číslo má dobrou racionální aproximaci, a to číslem $[0; 1, 1, 1, 2, 1, 6, 13]$, tedy zlomkem $\frac{618}{973}$.

Druhé číslo dobrou racionální aproximaci nemá.

The last slide

The last slide





**Díky za pozornost, mějte se krásně a žijte
skoro racionálně!**