O polynomiální regresi

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

Katedra aplikované matematiky

Ostrava, 15.1. 2018

(ŠKOMAM 2018)

Minimalizace kvadratické funkce

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ *je výraz*

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální?

Minimalizace kvadratické funkce

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je výraz

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální? $\left[a = \frac{3}{2}\right]$

Minimalizace kvadratické funkce

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ *je výraz*

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální? $\left[a = \frac{3}{2}\right]$

Příklad (Kvadratická funkce dvou proměnných)

Pro kterou dvojici $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *je výraz*

$$2a^2 + 21b^2 + 12ab - 20a - 72b + 11$$

minimální?

Minimalizace kvadratické funkce

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ *je výraz*

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální? $\left[a = \frac{3}{2}\right]$

Příklad (Kvadratická funkce dvou proměnných)

Pro kterou dvojici $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *je výraz*

$$2a^2 + 21b^2 + 12ab - 20a - 72b + 11$$

minimální? $[a = -1,\ b = 2]$

Lineární regrese

Uvažujme body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$ v rovině. Těmito body budeme chtít proložit tzv. regresní přímku. To je přímka, která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.

Lineární regrese

Uvažujme body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$ v rovině. Těmito body budeme chtít proložit tzv. regresní přímku. To je přímka, která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.

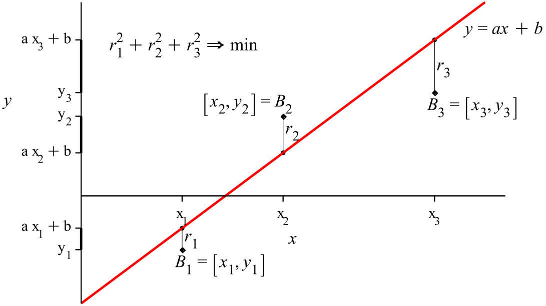
Rovnice takovéto přímky je $y = ax + b$, přičemž koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby výraz $\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i\right)^2$ byl minimální (metoda nejmenších čtverců).

Lineární regrese

Uvažujme body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$ v rovině. Těmito body budeme chtít proložit tzv. regresní přímku. To je přímka, která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.

Rovnice takovéto přímky je $y = ax + b$, přičemž koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby výraz $\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i\right)^2$ byl minimální (metoda nejmenších čtverců).

Pro $n = 3$ je situace znázorněna na následujícím obrázku.



Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímku $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímku $y = ax$ (procházející počátkem), parabolu nebo jinou polynomickou funkci, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímku $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímku $y = ax$ (procházející počátkem), parabolu nebo jinou polynomickou funkci, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

- V případě, že danými body chceme proložit přímku $y = ax$, musíme koeficient a zvolit tak, aby byl výraz $\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i - y_i)^2$ minimální.

Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímku $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímku $y = ax$ (procházející počátkem), parabolu nebo jinou polynomickou funkci, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

- V případě, že danými body chceme proložit přímku $y = ax$, musíme koeficient a zvolit tak, aby byl výraz $\sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2$ minimální.
- Chceme-li našimi body proložit parabolu $y = ax^2 + bx + c$, zvolíme koeficienty a, b, c tak, aby výraz $\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ byl minimální.

Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímku $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímku $y = ax$ (procházející počátkem), parabolu nebo jinou polynomickou funkci, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

- V případě, že danými body chceme proložit přímku $y = ax$, musíme koeficient a zvolit tak, aby byl výraz $\sum_{i=1}^{n}(ax_i - y_i)^2$ minimální.
- Chceme-li našimi body proložit parabolu $y = ax^2 + bx + c$, zvolíme koeficienty a, b, c tak, aby výraz $\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ byl minimální.

Za chvíli si ukážeme, jak danými body proložit přímku a parabolu.
V případě, že bychom chtěli uvažovat polynomy větších stupňů, postupovali bychom velmi podobně.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, 2]$*,* $B_2 = [2, 4]$*,* $B_3 = [4, 5]$*. Najděte regresní přímku procházející počátkem.*

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, 2]$, $B_2 = [2, 4]$, $B_3 = [4, 5]$. *Najděte regresní přímku procházející počátkem.*

Řešení.

Přímka procházející počátkem má rovnici $y = ax$. Podle předchozího hledáme koeficient $a \in \mathbb{R}$ takový, aby výraz

$$\sum_{i=1}^{3} \left(ax_i - y_i\right)^2 = (a-2)^2 + (2a-4)^2 + (4a-5)^2 = 21a^2 - 60a + 45$$

byl minimální.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, 2]$, $B_2 = [2, 4]$, $B_3 = [4, 5]$. Najděte regresní přímku procházející počátkem.

Řešení.

Přímka procházející počátkem má rovnici $y = ax$. Podle předchozího hledáme koeficient $a \in \mathbb{R}$ takový, aby výraz

$$\sum_{i=1}^{3} \left(ax_i - y_i\right)^2 = (a-2)^2 + (2a-4)^2 + (4a-5)^2 = 21a^2 - 60a + 45$$

byl minimální. To je však kvadratická funkce, kterou můžeme upravit na čtverec, tj.

$$21a^2 - 60a + 45 = 21\left(a^2 - \frac{20}{7}a + \frac{15}{7}\right) =$$

$$= 21\left[\left(a - \frac{10}{7}\right)^2 - \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \frac{15}{7}\right] = 21\left(a - \frac{10}{7}\right)^2 + \frac{15}{7}.$$

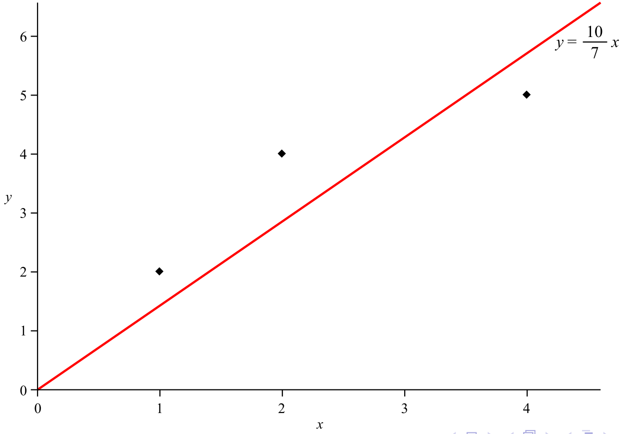
Řešení.

Vidíme tedy, že výraz je minimální pro $a = \frac{10}{7}$ a hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{10}{7}x$. $\square$

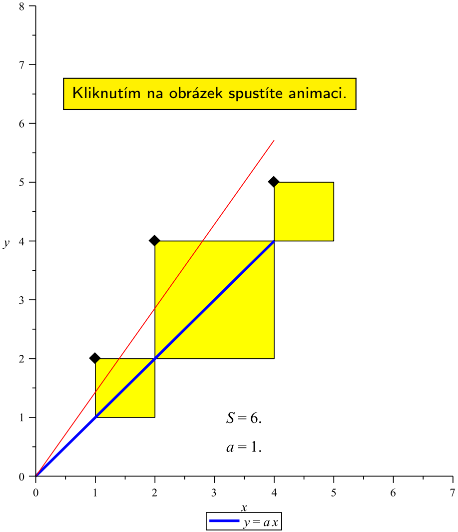
Řešení.

Vidíme tedy, že výraz je minimální pro $a = \frac{10}{7}$ a hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{10}{7}x$. □

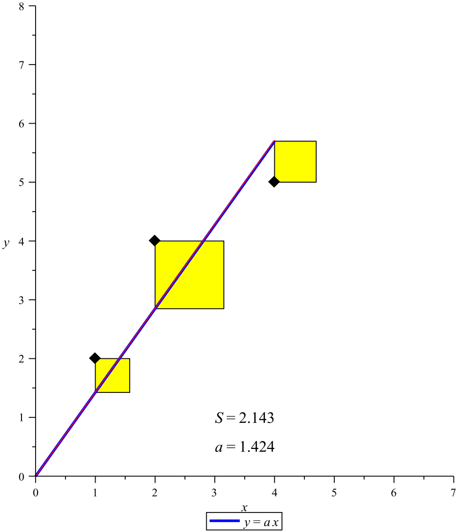
Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Animace



Animace



Poznámka (Zobecnění pro n bodů)

Je-li dáno n bodů $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$, pak regresní přímka procházející počátkem má rovnici

$$y = ax,$$

kde

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, 2]$, $B_2 = [2, 4]$, $B_3 = [4, 5]$ (*stejné jako v předchozím příkladu*). *Najděte regresní přímku* $y = ax + b$.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1,2]$, $B_2 = [2,4]$, $B_3 = [4,5]$ (stejné jako v předchozím příkladu). Najděte regresní přímku $y = ax + b$.

Řešení.

Rovnice hledané přímky je $y = ax + b$. Koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ přitom musíme zvolit tak, aby výraz

$$\sum_{i=1}^{3} \left(ax_i + b - y_i\right)^2 = (a+b-2)^2 + (2a+b-4)^2 + (4a+b-5)^2 =$$

$$= 21a^2 + 14ab + 3b^2 - 60a - 22b + 45 =$$

$$3\left(b + \frac{7}{3}a - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}\left(a - \frac{13}{14}\right)^2 + \frac{9}{14}$$

byl minimální.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, 2]$, $B_2 = [2, 4]$, $B_3 = [4, 5]$ (stejné jako v předchozím příkladu). Najděte regresní přímku $y = ax + b$.

Řešení.

Rovnice hledané přímky je $y = ax + b$. Koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ přitom musíme zvolit tak, aby výraz

$$\sum_{i=1}^{3} \left(ax_i + b - y_i\right)^2 = (a + b - 2)^2 + (2a + b - 4)^2 + (4a + b - 5)^2 =$$

$$= 21a^2 + 14ab + 3b^2 - 60a - 22b + 45 =$$

$$3\left(b + \frac{7}{3}a - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}\left(a - \frac{13}{14}\right)^2 + \frac{9}{14}$$

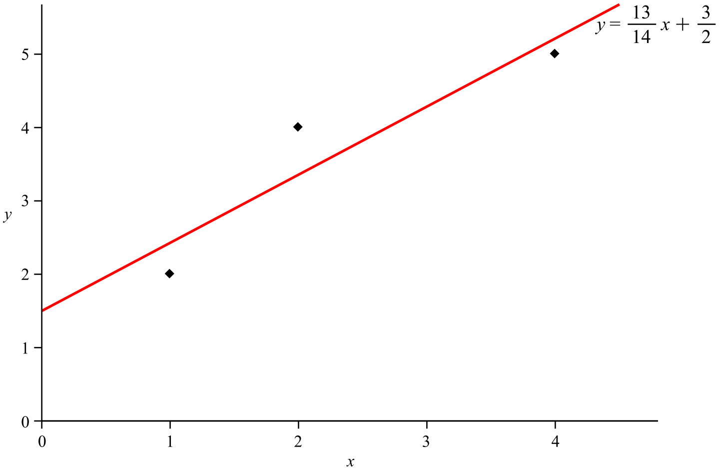
byl minimální.

To nastane v případě, že $a = \frac{13}{14}$ a $b = \frac{3}{2}$.

Hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{13}{14}x + \frac{3}{2}$.

Hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{13}{14}x + \frac{3}{2}$.

Celou situaci opět vystihuje obrázek.



Poznámka (Zobecnění pro n bodů)

Je-li dáno n bodů $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \ldots, B_n = [x_n, y_n]$, pak regresní přímka má rovnici

$$y = ax + b,$$

kde

$$a = \frac{n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

a

$$b = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [0, 0]$, $B_2 = [1, 1]$, $B_3 = [2, 3]$, $B_4 = [3, 8]$. *Proložte těmito body parabolu* $y = ax^2 + bx + c$.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [0,0]$, $B_2 = [1,1]$, $B_3 = [2,3]$, $B_4 = [3,8]$. *Proložte těmito body parabolu* $y = ax^2 + bx + c$.

Řešení.

Rovnice hledané paraboly je $y = ax^2 + bx + c$. Koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ přitom musíme zvolit tak, aby výraz

$$\sum_{i=1}^{4} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2 =$$
$$= c^2 + (a+b+c-1)^2 + (4a+2b+c-3)^2 + (9a+3b+c-8)^2 =$$
$$= 98a^2 + 72ab + 28ac + 14b^2 + 12bc + 4c^2 - 170a - 62b - 24c + 74 =$$
$$4\left(c + \tfrac{3}{2}b + \tfrac{7}{2}a - 3\right)^2 + 5\left(b + 3a - \tfrac{13}{5}\right)^2 + 4(a-1)^2 + \tfrac{1}{5}$$

byl minimální.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [0,0]$, $B_2 = [1,1]$, $B_3 = [2,3]$, $B_4 = [3,8]$. *Proložte těmito body parabolu* $y = ax^2 + bx + c$.

Řešení.

Rovnice hledané paraboly je $y = ax^2 + bx + c$. Koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ přitom musíme zvolit tak, aby výraz

$$\sum_{i=1}^{4} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2 =$$

$$= c^2 + (a+b+c-1)^2 + (4a+2b+c-3)^2 + (9a+3b+c-8)^2 =$$

$$= 98a^2 + 72ab + 28ac + 14b^2 + 12bc + 4c^2 - 170a - 62b - 24c + 74 =$$

$$4\left(c + \tfrac{3}{2}b + \tfrac{7}{2}a - 3\right)^2 + 5\left(b + 3a - \tfrac{13}{5}\right)^2 + 4(a-1)^2 + \tfrac{1}{5}$$

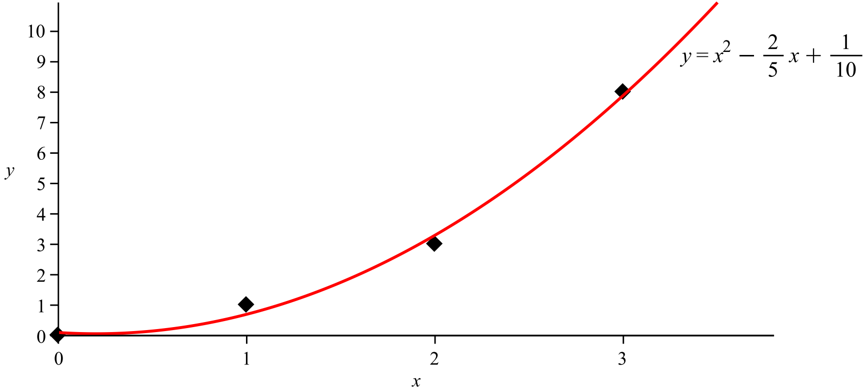
byl minimální.

To nastane v případě, že $a = 1$, $b = -\frac{2}{5}$ a $c = \frac{1}{10}$.

Hledaná parabola má rovnici $y = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}$.

Hledaná parabola má rovnici $y = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}$.

Grafické znázornění:

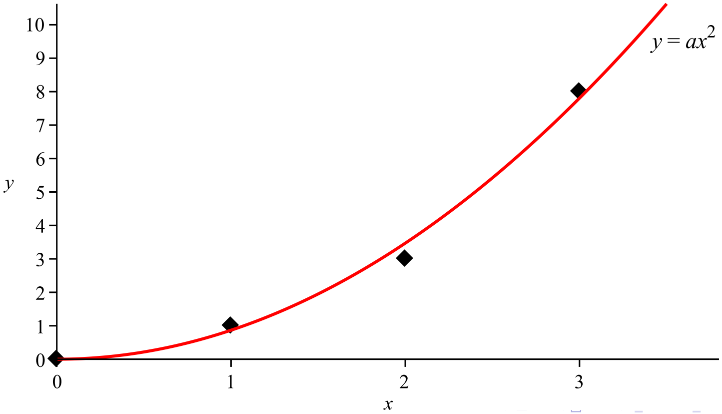


ŠKOMAM CUP

Jsou dány body $B_1 = [0, 0]$, $B_2 = [1, 1]$, $B_3 = [2, 3]$, $B_4 = [3, 8]$. Nalezněte takové číslo $a \in \mathbb{R}$, aby graf funkce $f(x) = ax^2$ co nejlépe „kopíroval“ zadané body.

ŠKOMAM CUP

Jsou dány body $B_1 = [0, 0]$, $B_2 = [1, 1]$, $B_3 = [2, 3]$, $B_4 = [3, 8]$. Nalezněte takové číslo $a \in \mathbb{R}$, aby graf funkce $f(x) = ax^2$ co nejlépe „kopíroval“ zadané body.



Děkuji za pozornost !!!