ŠKOMAM 2019

VŠB - TU Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra aplikované matematiky

30. ledna 2019

ÚLOHY, KTERÉ MÁM RÁD

RNDr. Dag Hrubý, M. M.
PřF UP Olomouc
edukátor transmisivní industriální školy
řešitel grantu: UMMPRTLPSZT

Program přednášky

1. ÚT Úvod do tématu

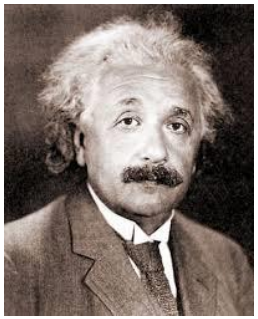
2. ÚT Ústřední téma

3. ÚT Únik od tématu

Internet

Nevěř všemu, co najdeš na internetu.

Archimedes



Československo 1939 - 2019

Emil Hácha

30. listopadu 2018

Karel Hynek Mácha (*1810-†1836)

Prof. PhDr. Karel Engliš
(*1880-†1961)

Hans Knobloch, Franz Drak
1. říjen 1938
7. květen 1939

Co mne zaujalo

7 matematických problémů tisíciletí

V květnu roku 2000 oznámil Clayův matematický ústav (CMI) na zasedání v Paříži, že vypisuje sedm cen po jednom milionu dolarů za vyřešení každého z matematických problémů, které mezinárodní komise matematiků označila za sedm nejdůležitějších a nejtěžších problémů současnosti.

1. **Riemannova hypotéza**
2. Yangova-Millsova teorie a hypotéza hmotnostních rozdílů
3. Problém P versus NP
4. Navierovy-Stokesovy rovnice
5. **Poincarého domněnka**

   (Grigorij Perelman 2002, 2006, odmítl 1 mil. USD)
6. Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka
7. Hodgeova domněnka

G. Perelman (*1966)

H. Poincare (*1854-†1912)

B. Riemann (*1826-†1866)

Riemannova hypotéza je jediný nevyřešený problém z Hilbertova seznamu z roku 1900.

David Hilbert (*1862-†1943)

Clay Mathematics Institute

Nejslavnějších pět čísel na světě

$$\pi, e, i, 1, 0$$

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Simpsonova věta

$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3)$$

O	obsah, objem
v	výška
a_1	délka, obsah dolní (podstavy)
a_2	délka, obsah střední (podstavy)
a_3	délka, obsah horní (podstavy)

O značí
obsah čtverce
obsah obdélníku
obsah lichoběžníku
obsah trojúhelníku
obsah kruhu
objem krychle
objem kvádru
objem jehlanu
objem komolého jehlanu
objem koule

Simpsonova věta

Obsah čtverce

$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} a(a + 4a + a) = \frac{1}{6} a \cdot 6a = a^2$$

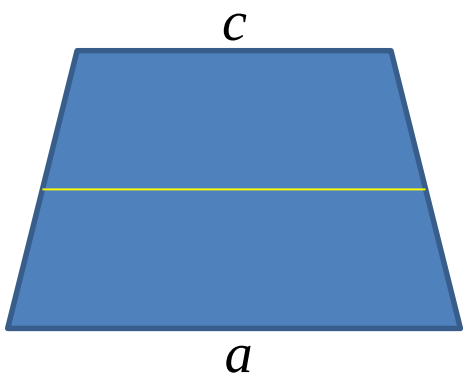
Simpsonova věta

Obsah obdélníku

$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} b(a + 4a + a) = \frac{1}{6} b \cdot 6a = ab$$

Simpsonova věta

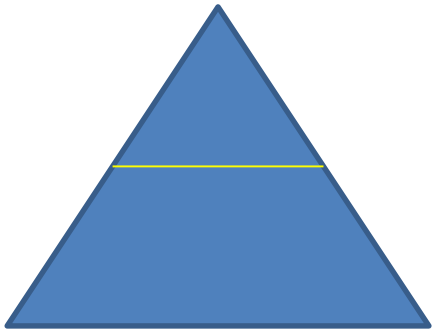
Obsah lichoběžníku



$$O = \frac{1}{6}v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6}v(a + 4\frac{a+c}{2} + c) = \frac{1}{6}v \cdot (3a + 3c) = \frac{1}{2}v(a + c)$$

Simpsonova věta

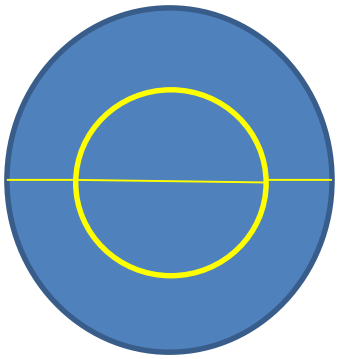
Obsah trojúhelníku



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} v(z + 4\frac{z}{2} + 0) = \frac{1}{6} v \cdot 3z = \frac{1}{2} zv$$

Simpsonova věta

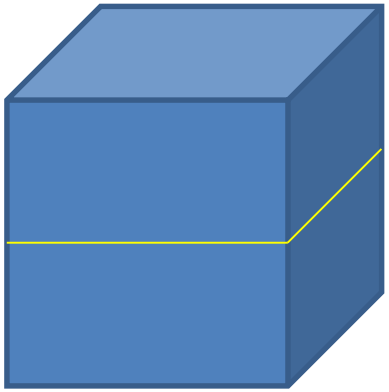
Obsah kruhu



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = 2 \cdot \frac{1}{6} r(0 + 4\pi \frac{r}{2} + \pi r) = \pi r^2$$

Simpsonova věta

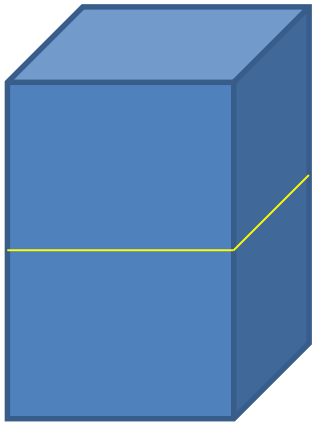
Objem krychle



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} a(a^2 + 4a^2 + a^2) = a^3$$

Simpsonova věta

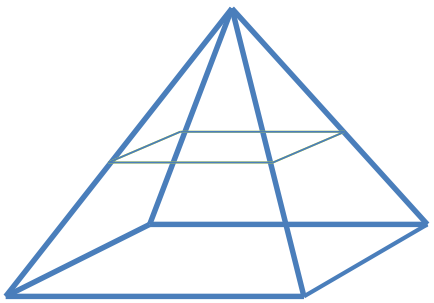
Objem kvádru



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} c(ab + 4ab + ab) = abc$$

Simpsonova věta

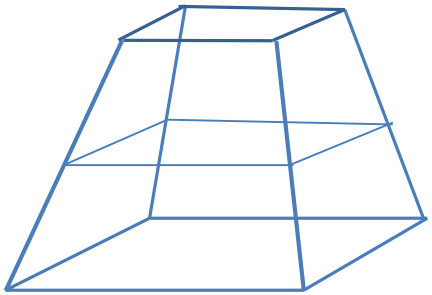
Objem jehlanu



$$O = \frac{1}{6}v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6}v(a^2 + 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 0) = \frac{1}{3}a^2v$$

Simpsonova věta

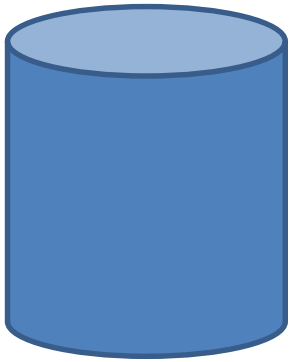
Objem komolého jehlanu



$$O = \frac{1}{6}v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6}v(a^2 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b^2) = \frac{1}{3}v(a^2 + ab + b^2)$$

Simpsonova věta

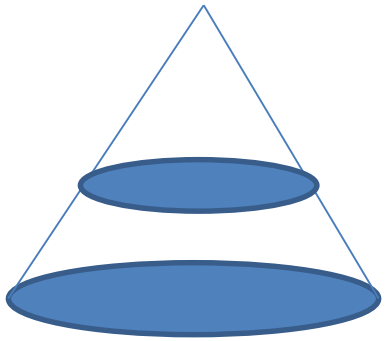
Objem válce



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} v(\pi r^2 + 4\pi r^2 + \pi r^2) = \pi r^2 v$$

Simpsonova věta

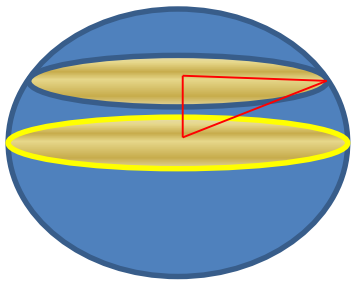
Objem kužele



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = \frac{1}{6} v(\pi r^2 + 4\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 0) = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

Simpsonova věta

Objem koule



$$O = \frac{1}{6} v(a_1 + 4a_2 + a_3) = 2 \cdot \frac{1}{6} r(\pi r^2 + 4\pi x^2 + 0) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4} r^2$$

Čtvrtá odmocnina

Bydžovský, V. & Vojtěch, J. (1924). *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol.* Praha: JČMF.

$$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$a^4+18a^2-88=0$$
$$a^3+3a-14=0$$

$$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} = a+\sqrt{b}$$

$$97+56\sqrt{3} = a^4+4a^3\sqrt{b}+6a^2b+4ab\sqrt{b}+b^2$$

$$97 = a^4+6a^2b+b^2$$

$$56\sqrt{3} = 4a^3\sqrt{b}+4ab\sqrt{b} = (4a^3+4ab)\sqrt{b}$$

Třetí odmocnina

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x=4$$

$$a=20, b=14\sqrt{2}$$

$$x=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}$$

$$x^3=a+b+3\sqrt[3]{(a+b)^2(a-b)}+3\sqrt[3]{(a+b)(a-b)^2}+a-b$$

$$x^3=2a+3\sqrt[3]{(a+b)(a-b)}\left(\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}\right)$$

$$x^3=2a+3x\sqrt[3]{a^2-b^2}$$

$$x^3-6x-40=0$$

$$x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10)$$

Třetí mocniny

$$\frac{5^3+3^3}{5^3+2^3}=\frac{125+27}{125+8}=\frac{152}{133}=\frac{8\cdot 19}{7\cdot 19}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{5^3+3^3}{5^3+2^3}=\frac{5+3}{5+2}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+(a-b))\left(a^2-a(a-b)+(a-b)^2\right)}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{2a-b}$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}=\frac{a+b}{2a-b}$$

$$\frac{25^3+13^3}{25^3+12^3}=\frac{25+13}{25+12}=\frac{38}{37}$$

Třetí mocniny

ÚLOHA

Najděte čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla tak, aby se součet třetích mocnin prvních tří rovnal třetí mocnině čtvrtého.

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$$

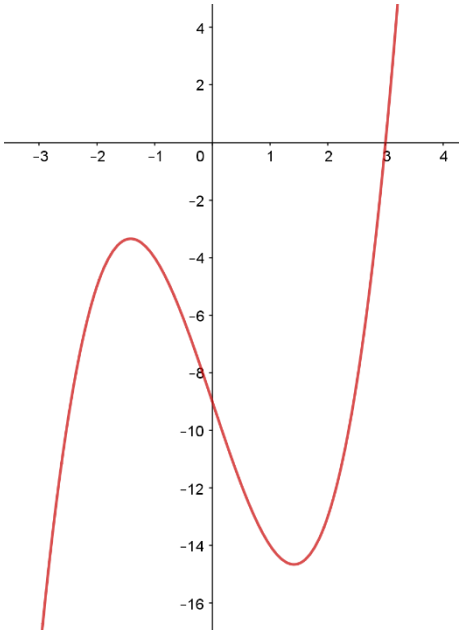
$$2x^3 - 12x - 18 = 0$$

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

$$(x-3)(x^2+3x+3) = 0$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

$$27 + 64 + 125 = 216$$



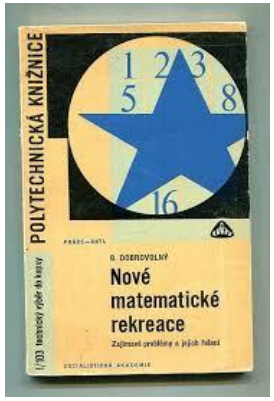
Třetí mocniny

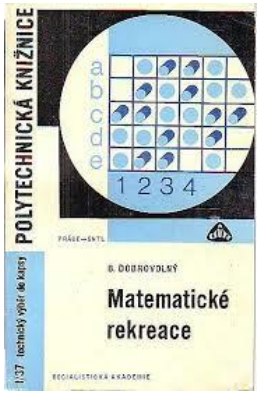
ÚLOHA

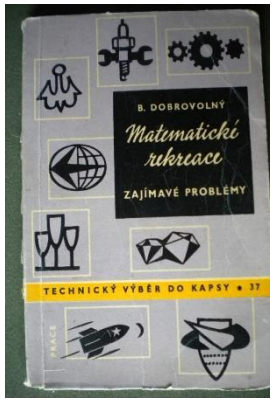
V oboru racionálních čísel řešte rovnici

$$x^3 + y^3 = 6$$

$$\left(\frac{17}{21}\right)^3 + \left(\frac{37}{21}\right)^3 = \frac{4913}{9261} + \frac{50653}{9261} = \frac{55566}{9261} = 6$$







$$(x, y) = \left(\frac{17}{21}, \frac{37}{21}\right)$$

Třetí mocniny

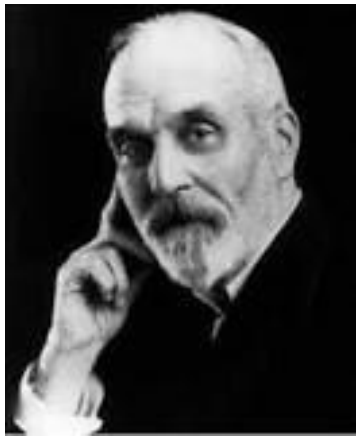
ÚLOHA

V oboru racionálních čísel řešte rovnici pro x, y různé od 1, 2.

$$x^3 + y^3 = 9$$

$$x = \frac{415280564497}{348671682660}$$

$$y = \frac{676702467503}{348671682660}$$



Henry Dudeney
1857-1930

Substituce

$$(x+3)^4 + (x+5)^4 \geq 4$$

$$x^4 + 16x^3 + 102x^2 + 304x + 351 \geq 0$$

$$x + 4 = t$$

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 \geq 4$$

$$t^4 + 6t^2 - 1 \geq 0$$

$$(t^2+3)^2 \geq 10$$

$$|t| \geq \sqrt{\sqrt{10} - 3}$$

$$|x+4| \geq \sqrt{\sqrt{10} - 3}$$

$$x \in \left(-\infty, -4 - \sqrt{\sqrt{10} - 3}\right\rangle \cup \left\langle -4 + \sqrt{\sqrt{10} - 3}, +\infty\right)$$

Polynom, který neexistuje

Dokažte, že neexistuje polynom $f(x)$ s celočíselnými koeficienty pro který platí $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

$$f(11) = a_n 11^n + a_{n-1} 11^{n-1} + \cdots + a_1 11 + a_0$$

$$f(7) = a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \cdots + a_1 7 + a_0$$

$$f(11) - f(7) = a_n(11^n - 7^n) + a_{n-1}(11^{n-1} - 7^{n-1}) + \cdots a_1(11 - 7)$$

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Zajímavé rovnice

$$2^x(6-x) = 8x$$

$$2^x = \frac{8x}{6-x} \qquad 2^x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Budeme požadovat kořeny 1, 2, 3.

Zajímavé rovnice

$$2 = \frac{a+b}{c+d} \qquad 4 = \frac{2a+b}{2c+d} \qquad 8 = \frac{3a+b}{3c+d}$$

$$\begin{aligned} a + b - \ \ 2c - 2d &= 0 \\ 2a + b - \ \ 8c - 4d &= 0 \\ 3a + b - 24c - 8d &= 0 \end{aligned}$$

$$K = \{[-4t, -4t, t, -5t], t \in R\}$$

$$K(1) = \{[-4, -4, 1, -5]\}$$

$$2^x = \frac{4x+4}{5-x}$$

Zajímavé rovnice

$$2^x = P(x)$$

$$P(x) = ax + b$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Zajímavé rovnice

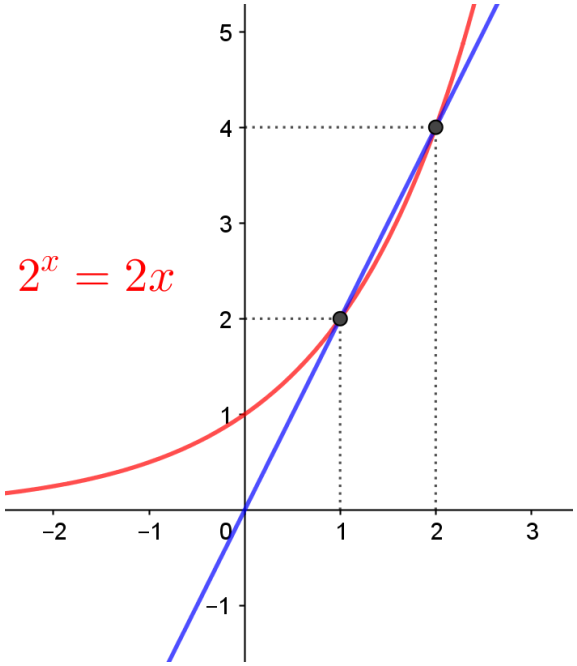
ÚLOHA

Sestavte rovnici $2^x = ax + b$, která má kořeny $x_1 = 1, x_2 = 2$.

$$2 = a + b$$
$$4 = 2a + b$$

Pro řešení soustavy platí $a = 2, b = 0$.

$2^x = 2x$



Zajímavé rovnice

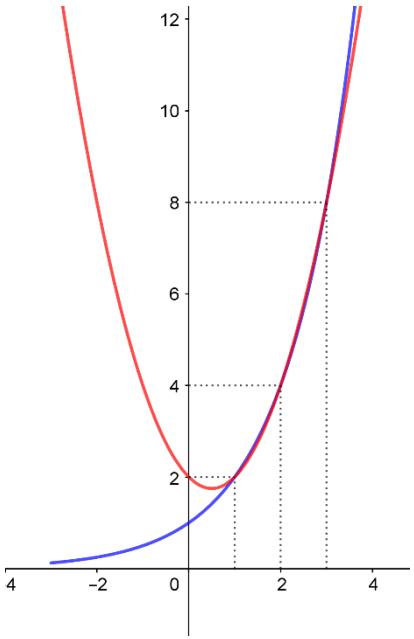
ÚLOHA

Sestavte rovnici $2^x = ax^2 + bx + c$, která má kořeny $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 4 \\ 9a + 3b + c &= 8 \end{aligned}$$

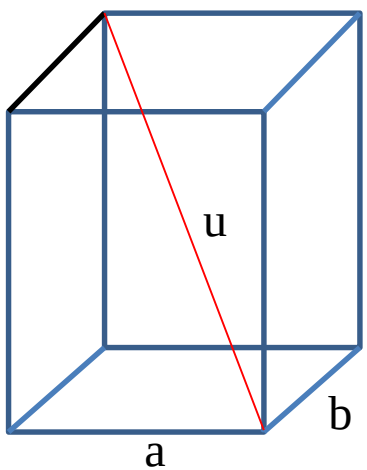
$$a = 1, b = -1, c = 2$$

$$2^x = x^2 - x + 2$$



Tajemný kvádr

V kvádru s hranami a, b, c platí $ab = 1, u = 2$. Určete velikost hrany c tak, aby povrch kvádru byl maximální.



$$ab = 1 \quad u^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$S = 2ab + 2ac + 2bc = 2 + 2c(a + b)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$4 = (a + b)^2 - 2 + c^2$$

$$(a + b)^2 = 6 - c^2$$

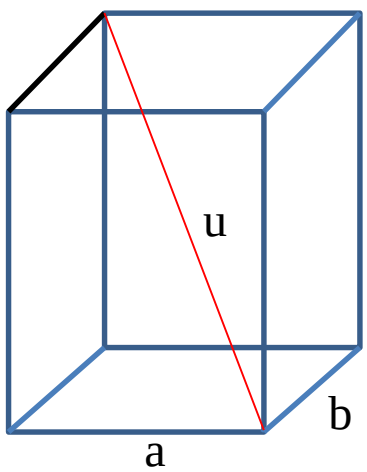
$$a + b = \sqrt{6 - c^2}$$

$$S = 2 + 2c(a + b) = 2 + 2c\sqrt{6 - c^2} = 2 + 2\sqrt{6c^2 - c^4}$$

Naším úkolem je najít maximum funkce $S = 2 + 2\sqrt{6c^2 - c^4}$.

Tajemný kvádr

$$S = 2 + 2\sqrt{6c^2 - c^4}$$



1. způsob:

$$S = 2 + 2\sqrt{9 - (3 - c^2)^2}$$

maximum je v bodě $c = \sqrt{3}, S = 8$

2. způsob:

$$S - 2 = 2\sqrt{6c^2 - c^4}$$

$$4c^4 - 24c^2 + (S - 2)^2 = 0$$

$$D = 576 - 16(S - 2)^2 \geq 0$$

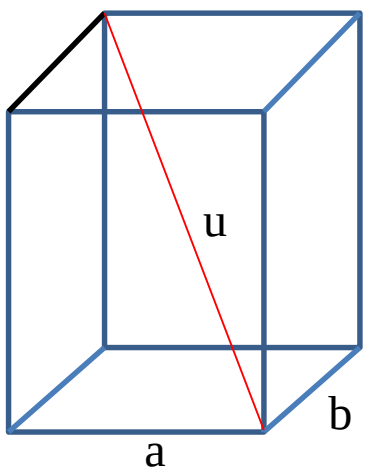
$$(S - 2)^2 \leq 36, \quad S \leq 8$$

3. způsob:

$$\frac{dS}{dc} = \frac{12c - 4c^3}{\sqrt{6c^2 - c^4}}, \; c = \sqrt{3}, \; S = 8$$

Tajemný kvádr

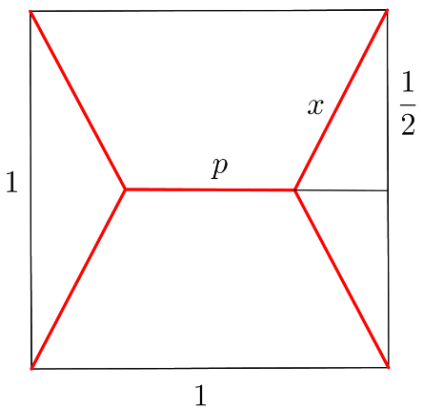
Nyní dopočítáme velikosti hran a, b.



$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$4 = a^2 + b^2 + 3$$
$$1 = a^2 + b^2, ab = 1$$
$$1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$
$$a^4 - a^2 + 1 = 0$$

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$c^2 = u^2 - a^2 - b^2$$
$$c^2 = u^2 - (a-b)^2 - 2ab$$
$$c^2 = 2 - (a-b)^2$$
$$c^2 \leq 2$$
$$c \leq \sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{S = 2 + 2\sqrt{8}}$$

Nejkratší cesta



$$p = 1 - 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} = 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$l(x) = 4x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$\frac{dl}{dx} = 4 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \qquad x_{min} = \frac{\sqrt{3}}{3}, l_{min} = 1 + \sqrt{3}$$

$$y = 4x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$\sqrt{4x^2 - 1} = 4x + 1 - y \qquad \text{substituce: } 1 - y = b, \quad y = 1 - b$$

$$\sqrt{4x^2 - 1} = 4x + b \rightarrow 12x^2 - 8bx + b^2 + 1 = 0 \rightarrow D = 16(b^2 - 3) \rightarrow |b| \geq \sqrt{3}$$

$$b \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \qquad b = -\sqrt{3} \rightarrow l = 1 + \sqrt{3}$$

Exponenciální funkce

ÚLOHA

Pro která $a \in R$ platí: $\forall x \in R, a^x \geq x + 1$?

$x = 1 \rightarrow a \geq 2$

$a = 2$

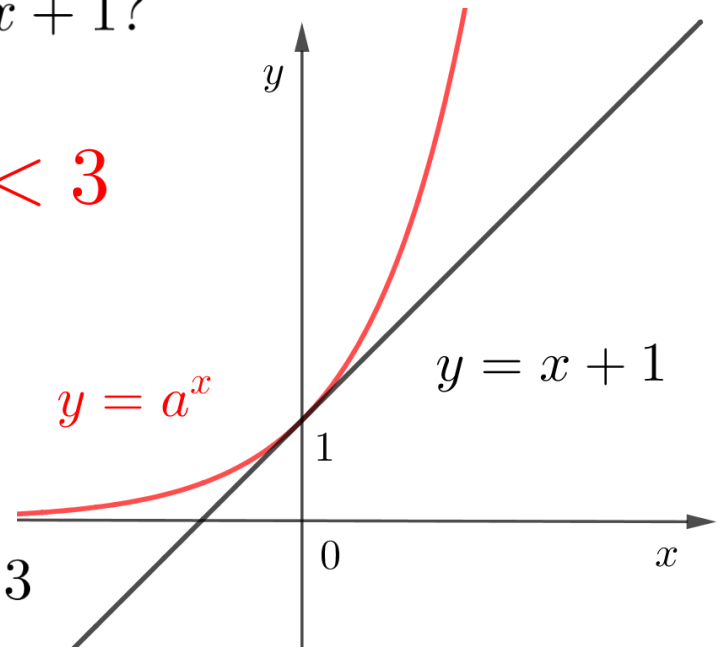
$2^x = x + 1$

$x = 0, x = 1 \qquad x \in (-1, 1)$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow a^{\frac{1}{2}} \geq \frac{3}{2} \rightarrow a \geq \frac{9}{4}$

$x = -\frac{1}{6} \rightarrow a^{-\frac{1}{6}} \geq \frac{5}{6} \rightarrow a^{\frac{1}{6}} \leq \frac{6}{5} \rightarrow a < 3$

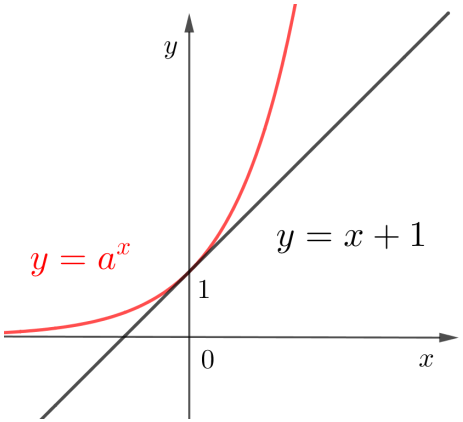
$2 < a < 3$



Exponenciální funkce

ÚLOHA

Pro která $a \in R$ platí: $\forall x \in R, a^x \geq x + 1$?



$$x = \frac{1}{n} \to a^{\frac{1}{n}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to a \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

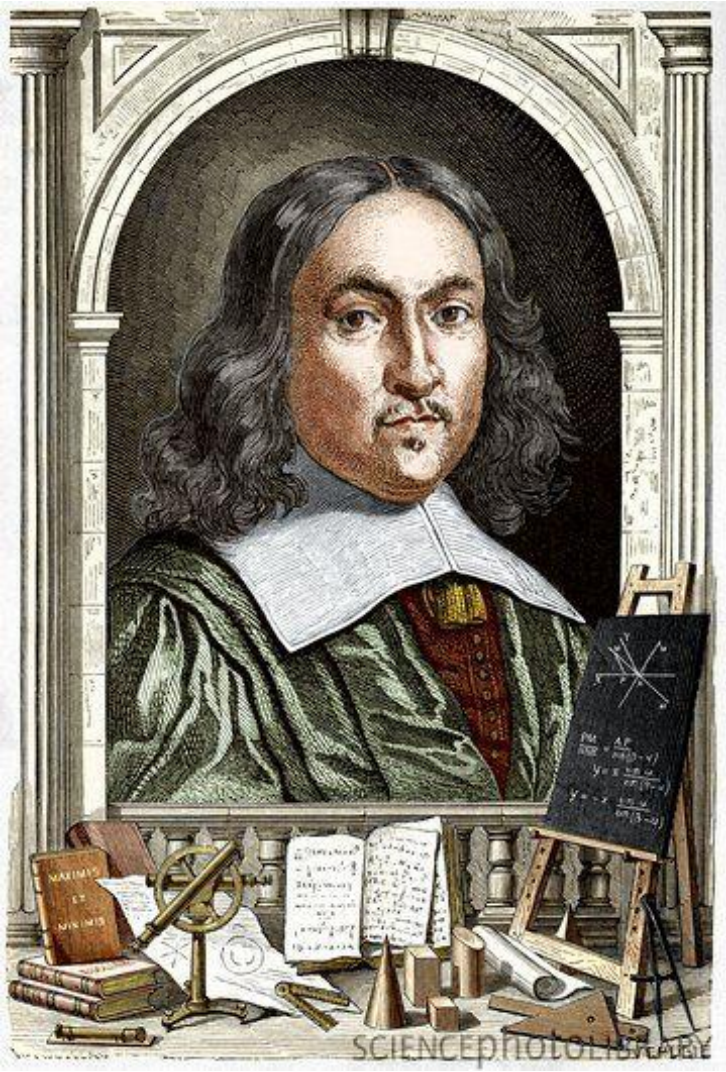
$$x = -\frac{1}{n+1} \to a^{-\frac{1}{n+1}} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n} \geq a^{\frac{1}{n+1}} \to \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq a$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Kalkulátor: $n = 100, a \in (2,705; 2,732)$

Pierre de Fermat (1601-1665)



VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI

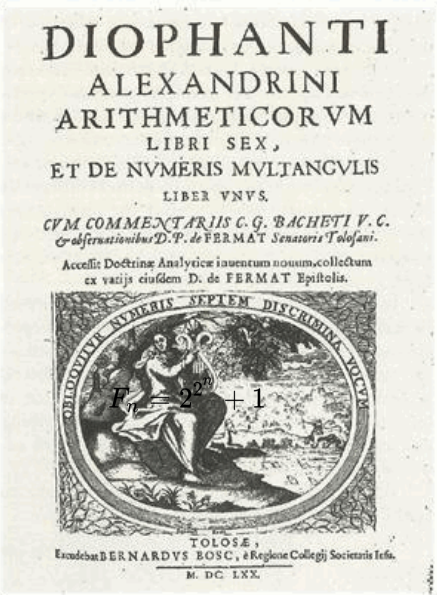
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Consiliarii Parisiensis Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Pierre de Fermat (1601-1665)

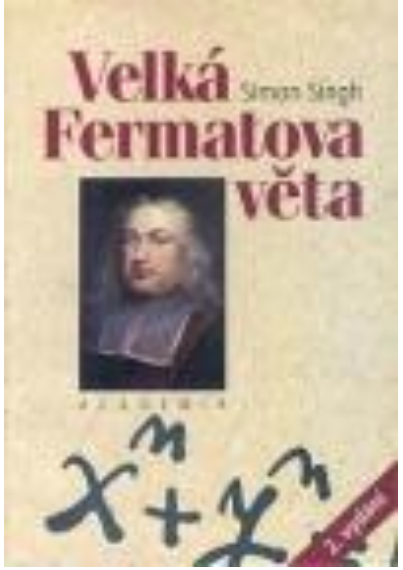


$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

$$f(b+t) \geq f(b)$$

$$f(b-t) \geq f(b)$$

$$y = x^2 + x + 1$$



Fermatův bod
Fermatovo číslo
Fermatův princip

Pierre de Fermat (1601-1665)

Fermat soudil, že pro libovolné $n \in N$ jsou čísla

$F_n = 2^{2^n} + 1$ prvočísly. (Fermatova čísla.)

$n = 1 \quad F_1 = 2^2 + 1 = 5$

$n = 2 \quad F_2 = 2^4 + 1 = 17$

$n = 3 \quad F_3 = 2^8 + 1 = 257$

$n = 4 \quad F_4 = 2^{16} + 1 = 65\,537$

$n = 5 \quad F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$

Leonhard Euler

V roce 1732 Euler ukázal, že $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$.

Rybáři

Hlava $\frac{1}{3}$

30 kg

Ocas $\frac{1}{4}$

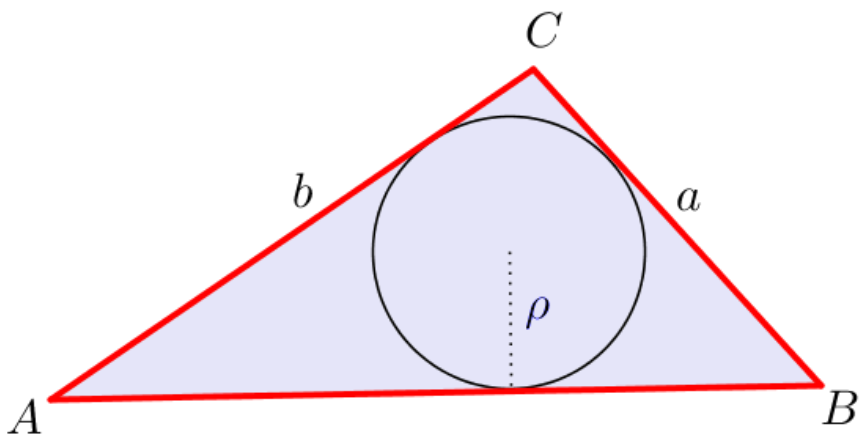
Kolik ryb je v rybníku?

Tři rybáři šli chytat ryby. O půlnoci lov přerušili, nachytané ryby uložili v síti ve vodě a usnuli. Po chvíli se jeden vzbudil s tím, že půjde domů. Šel k rybám s úmyslem vzít si jednu třetinu ryb. Jedna ryba byla navíc, tak ji pustil a vzal si jednu třetinu ryb.

$$x = 3y + 1$$
$$2y = 3z + 1$$
$$2z = 3u + 1$$

ABERO

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno (a, b, ρ).



$$(a, b, \rho) \to (a, b, c)$$

ρ – poloměr kružnice trojúhelníku vepsané

$$c^3 - (a+b)c^2 - [(a-b)^2 - 4\rho^2]c + [(a-b)^2 + 4\rho^2](a+b) = 0$$

Abero

$2s$ - obvod trojúhelníku

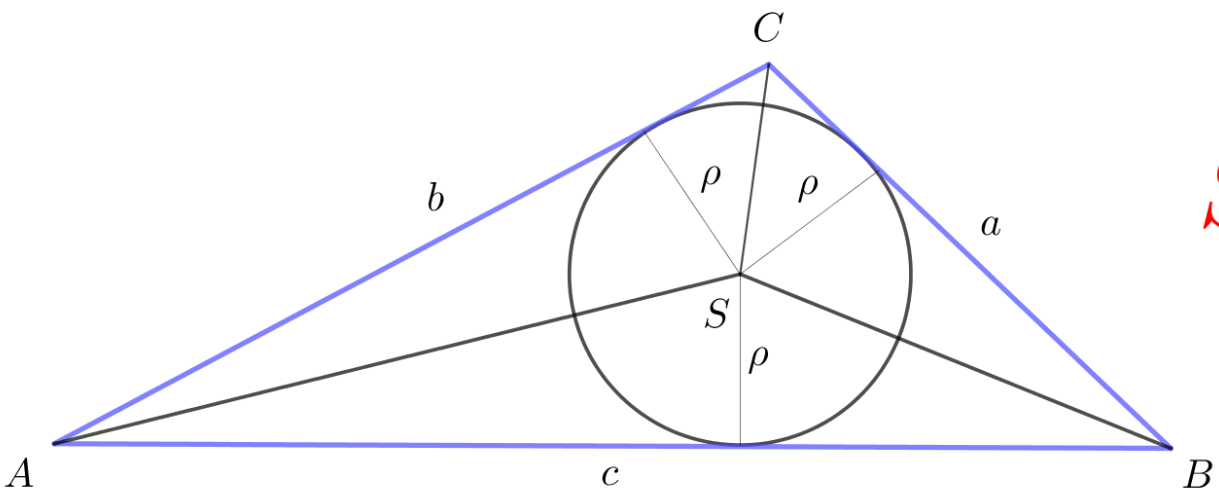
$$2s = a + b + c \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$$

$$s - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}$$

$$s - c = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b-c}{2}$$

Abero

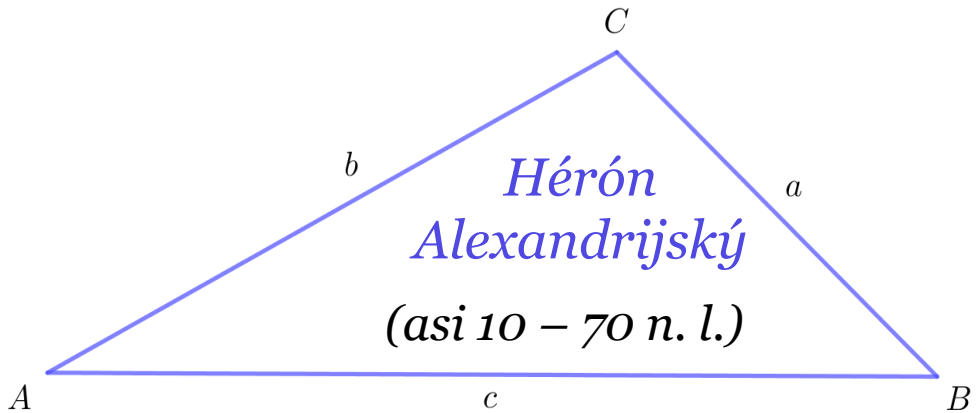


$$S = \rho s$$

$$S_{ABC} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CAS} = \frac{1}{2}c\rho + \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{2}b\rho =$$

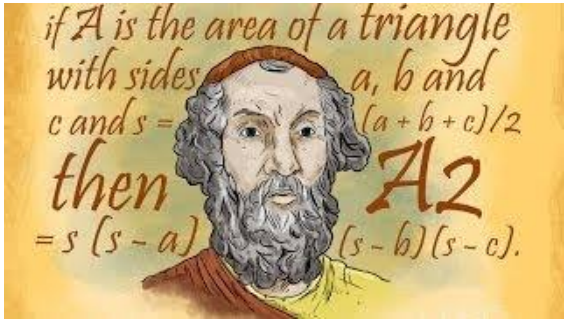
$$= \frac{1}{2}\rho \cdot (a + b + c) = \frac{1}{2}\rho \cdot 2s = \rho s$$

Abero

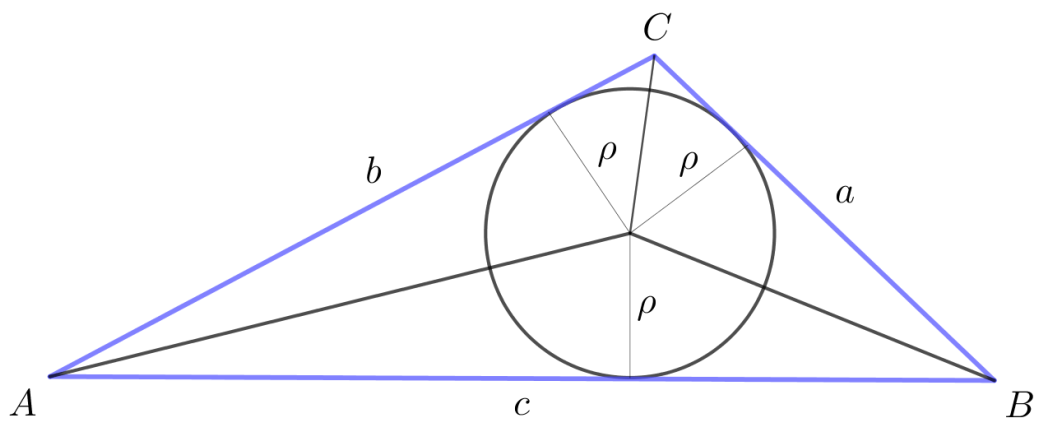


$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Heronův vzorec



Abero



$$\rho s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\rho^2 s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

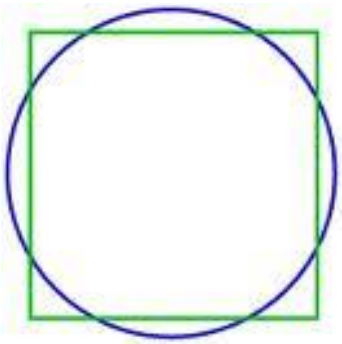
$$\rho^2\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

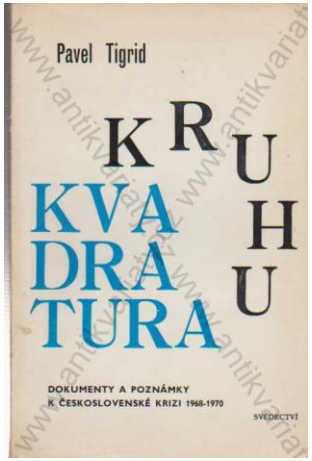
$$4\rho^2(a+b+c) = (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

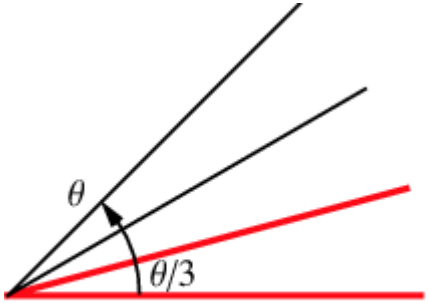
$$\boldsymbol{c^3 - (a+b)c^2 - [(a-b)^2 - 4\rho^2]c + [(a-b)^2 + 4\rho^2](a+b) = 0}$$

Tři klasické problémy antické matematiky

Kvadratura kruhu
Trisekce úhlu
Reduplikace krychle
(Délský - Délfský problém)





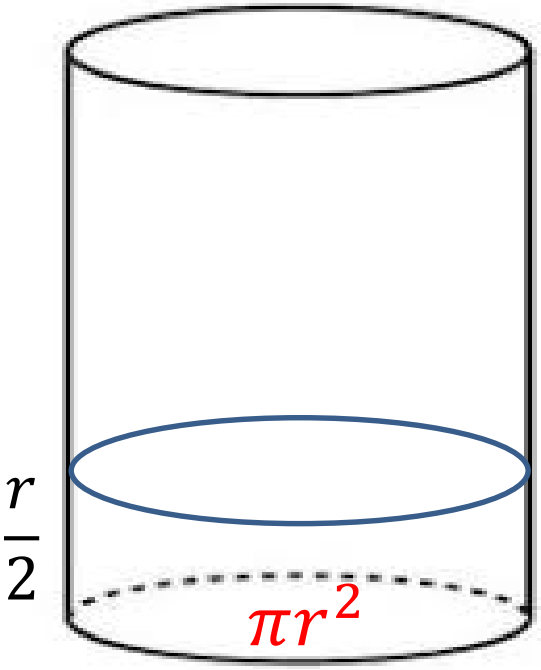


trisection

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

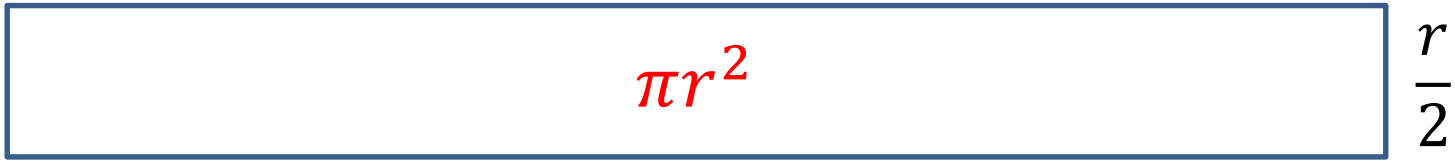
$\varphi = 60^0$

Kvadratura kruhu



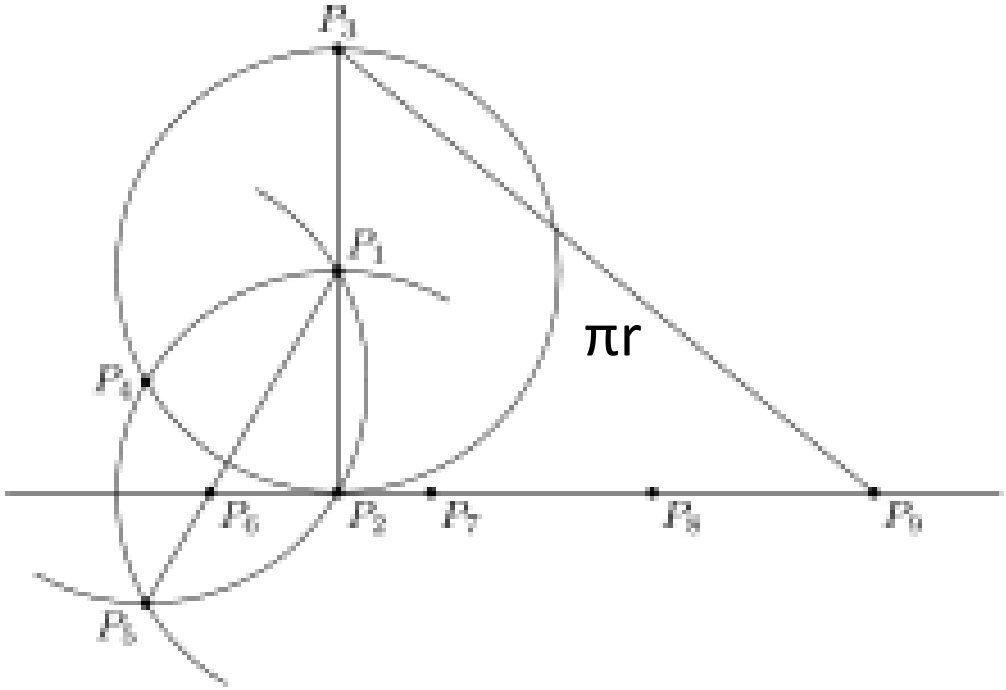
Leonardo da Vinci

$2\pi r$

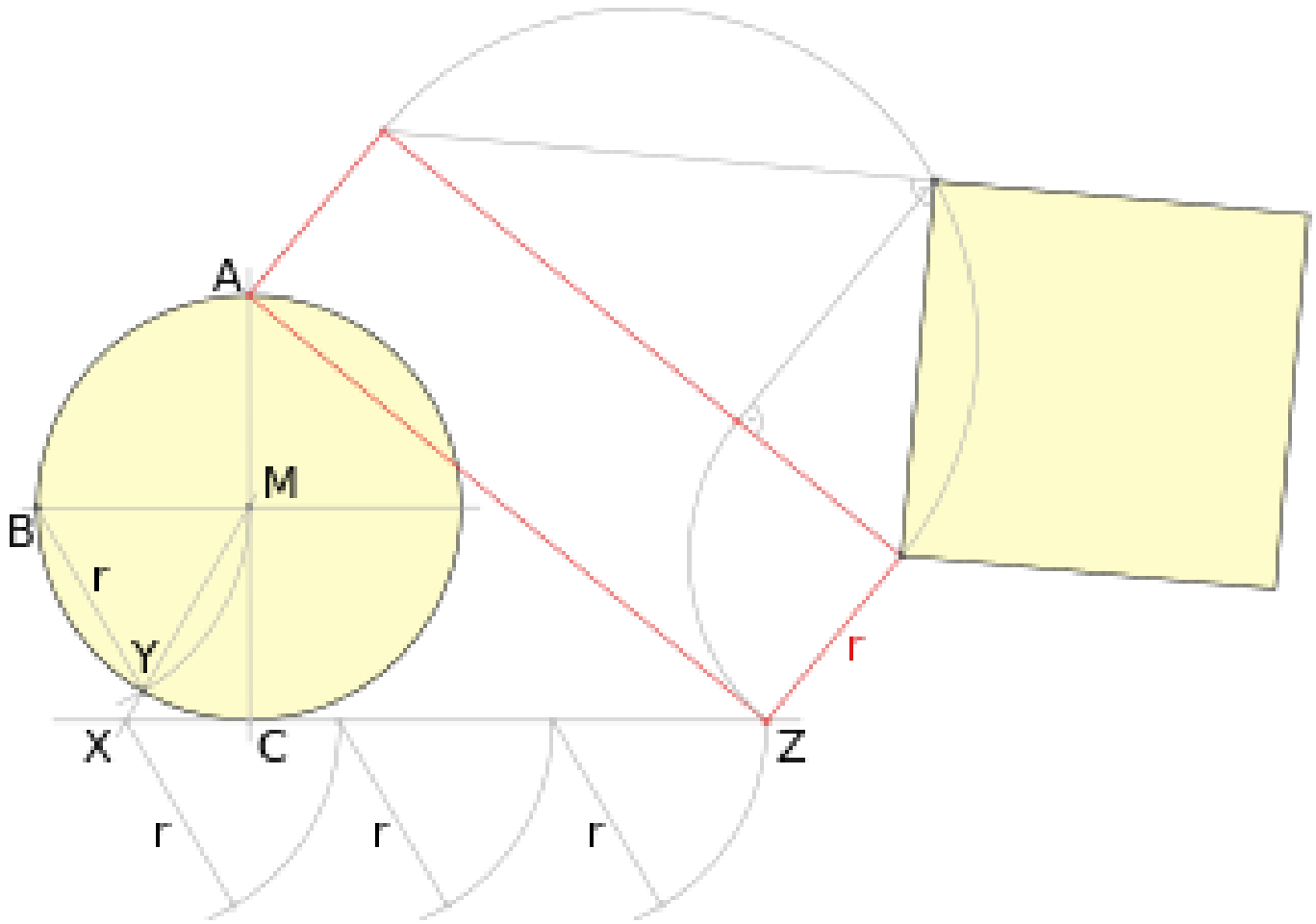


Adam Adamandy Kochański (1631-1700)

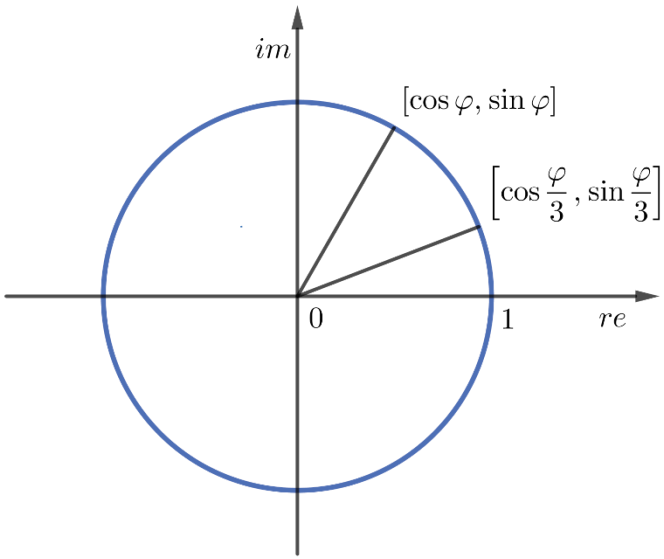
Knihovník a dvorní matematik
krále Jana Sobieského



Kvadratura kruhu



Trisekce úhlu



$$\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)^3 = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos^3\frac{\varphi}{3} + 3i\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3} - i\sin^3\frac{\varphi}{3} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3} = \cos\varphi$$

$$\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = \cos\varphi$$

$$\text{substituce}: x = \cos\frac{\varphi}{3}$$

$$x^3 - 3x(1 - x^2) = \cos\varphi$$

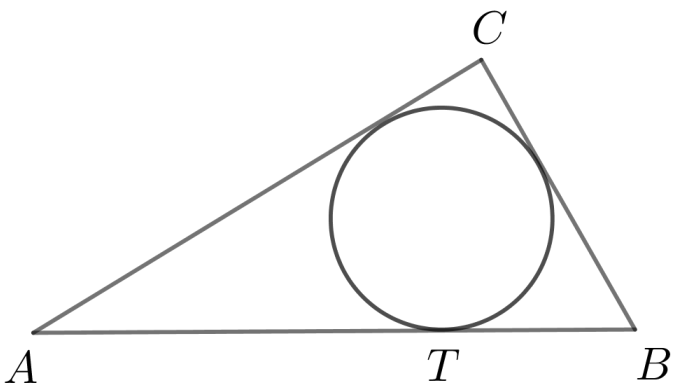
$$4x^3 - 3x = \cos\varphi \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

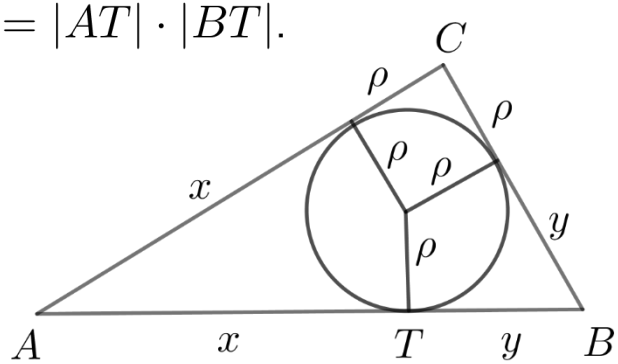
$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku

V pravoúhlém trojúhelníku ABC se dotýká kružnice vepsaná přepony v bodě T. Dokažte, že pro obsah trojúhelníku platí $S = |AT| \cdot |BT|$.



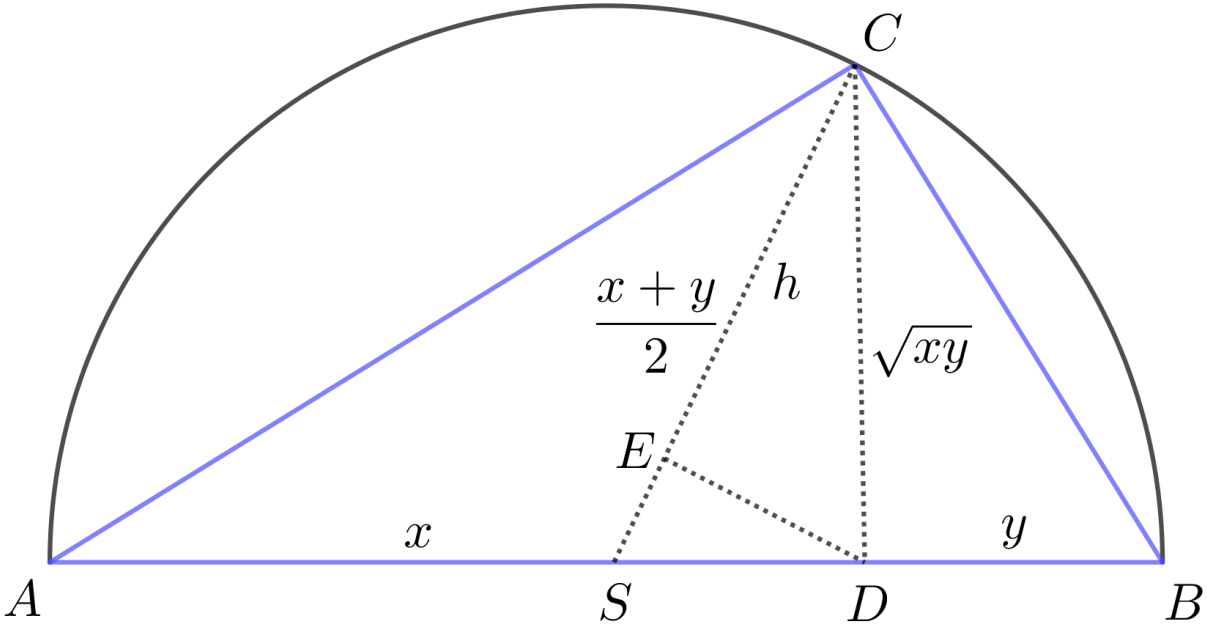


$$S = \frac{1}{2}(x+\rho)(y+\rho),\ S = x\rho + y\rho + \rho^2$$

$$2S = xy + y\rho + x\rho + \rho^2 = xy + S$$

$$S = xy = |AT| \cdot |BT|$$

Harmonický průměr



$$|AD| = x, |BD| = y$$

$$|CD| = \sqrt{xy}$$

$$|CS| = \frac{x+y}{2}$$

$$|CE| = h$$

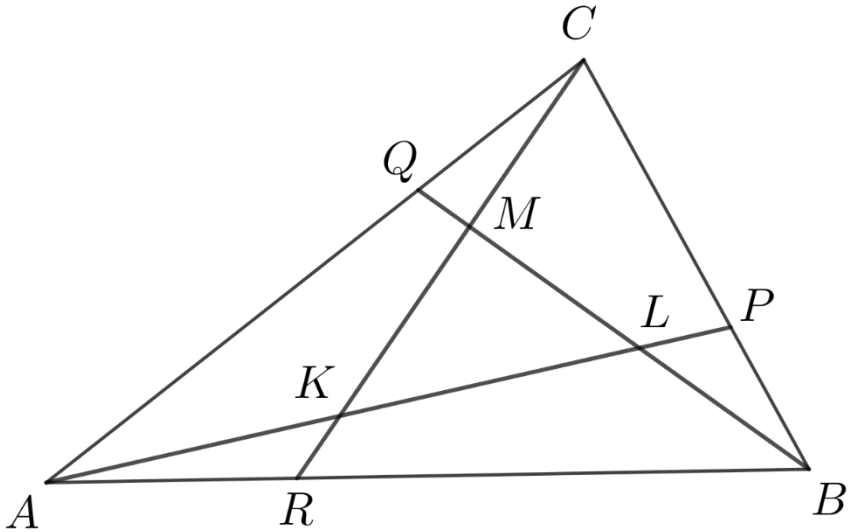
$$|ES| = \frac{x+y}{2} - h$$

$$|CE| \cdot |ES| = |ED|^2 = |CD|^2 - |CE|^2$$

$$h\left(\frac{x+y}{2} - h\right) = xy - h^2$$

$$h = \frac{2xy}{x+y} = H(x,y)$$

Feynmanův trojúhelník



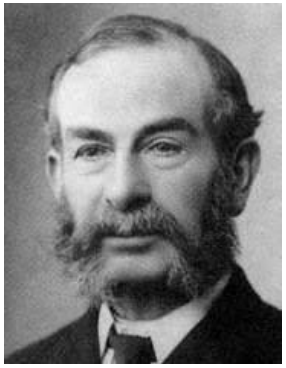
$$|BP| : |PC| = 1 : 2$$
$$|CQ| : |QA| = 1 : 2$$
$$|AR| : |RB| = 1 : 2$$

$$S_{KLM} = \frac{1}{7} S_{ABC}$$

ROUTHOVA VĚTA (1891)

$$|CP| : |PB| = x, |AQ| : |QC| = y, |BR| : |RA| = z$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \frac{(xyz-1)^2}{(xy+y+1)(yz+z+1)(xz+x+1)}$$



Edward John Routh (1831-1907)

Luca Pacioli (1447-1517)

1494

Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita

Suma znalostí z aritmetiky, geometrie, poměrů a úměrnosti.

Luca Pacioli (1447-1517)

ÚLOHA

Obsah trojúhelníku se rovná 84 jednotkám obsahu. Vypočítejte délky jeho stran, když je známo, že jsou vyjádřeny třemi za sebou následujícími přirozeným čísly.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Heronův vzorec

$$2s = a + b + c$$

$$2s = x - 1 + x + x + 1 = 3x$$

$$84 = \sqrt{\frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right)} = \frac{x}{4}\sqrt{3(x^2 - 4)}$$

Luca Pacioli (1447-1517)

$$84 = \sqrt{\frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{x}{2}+1\right) \cdot \left(\frac{x}{2}-1\right)} = \frac{x}{4}\sqrt{3(x^2-4)}$$

$$84^2 = \frac{x^2}{16} \cdot 3\left(x^2-4\right)$$

$$x^4 - 4x^2 - 37632 = 0$$

$$196 \cdot 192 = 37632 \qquad 196 - 192 = 4$$

$$\mathbf{(x^2 - 196)(x^2 + 192) = 0}$$

Délky stran trojúhelníku jsou 13, 14, 15 jednotek délky.

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al Mádžúsí al- Chvárizmí (787 – kol. 850)

Al-Kitab al-muchtasar fí hisab al-džábr wa-l-muqabala

ÚLOHA

Čtverec neznámé a deset neznámých dává 39 dirhemů (dirhem byla stříbrná mince středověkého Východu). Čemu se rovná neznámá? (Má se řešit graficky.)

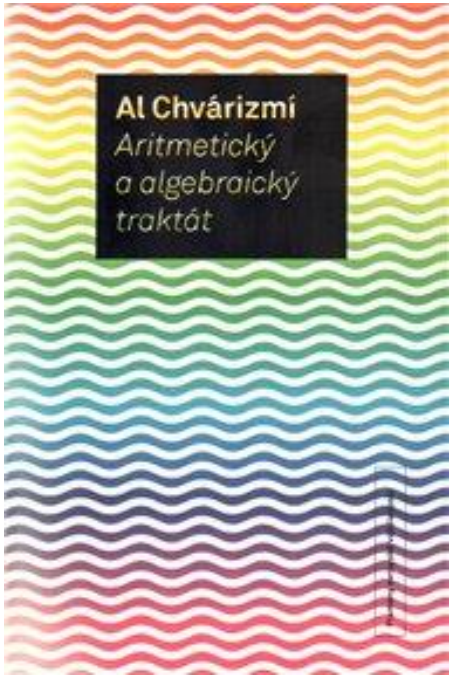
$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

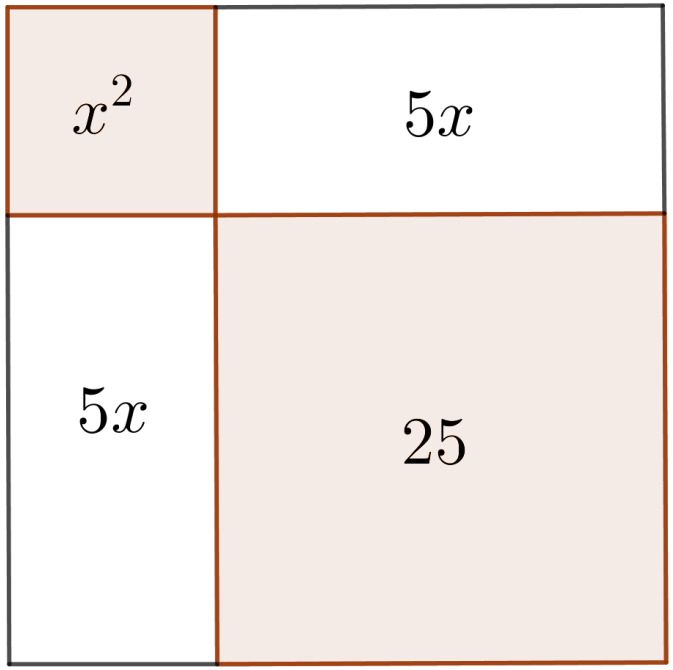
Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al Mádžúsí al- Chvárizmí (787 – kol. 850)

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي ابو جعفر

Al-Kitab al-muchtasar fí hisab al-džabr wa-l-muqabala



Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al Mádžúsí al - Chvárizmí (787 – kol. 850)



$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

al – Chvarizmí → *al – Chorezmí*
ve středověku latinizováno na Al – *Gorizmí*
zkomoleno na *Algoritmí* → **Algoritmus**

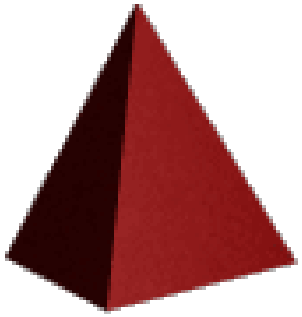
Slovo **algebra** pochází z arabského

لجبر *(al-džábr)*

Bylo přejato z názvu výše uvedené knihy.

Ούδείς άγεωμέτρητος εισίτω

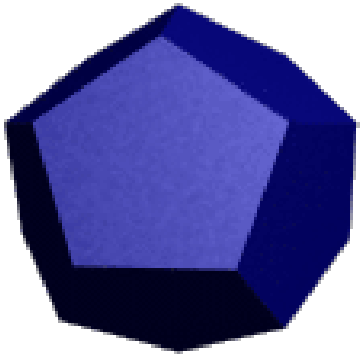
Platonova tělesa



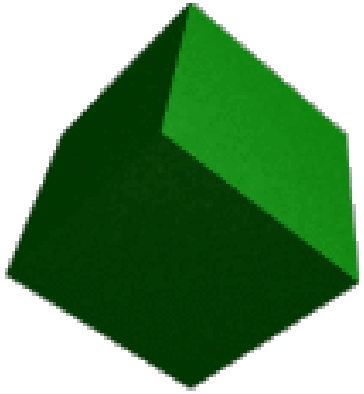
Tetraedr
Oheň

Eulerova věta

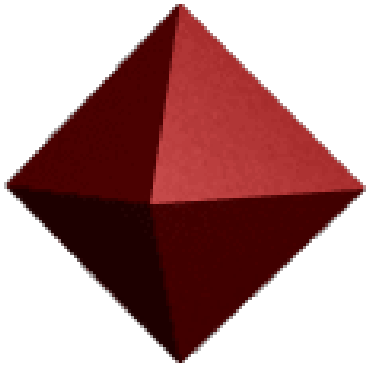
$$S + V = H + 2$$



Dodekaedr



Hexaedr
Země



Oktaedr
Vzduch

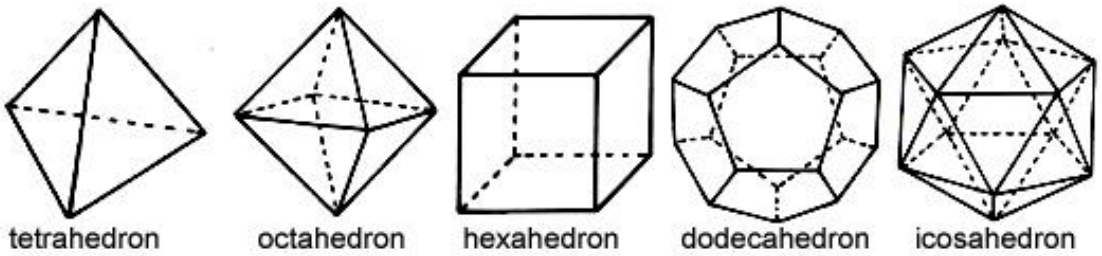
Ikosaedr
Voda

Platonova tělesa

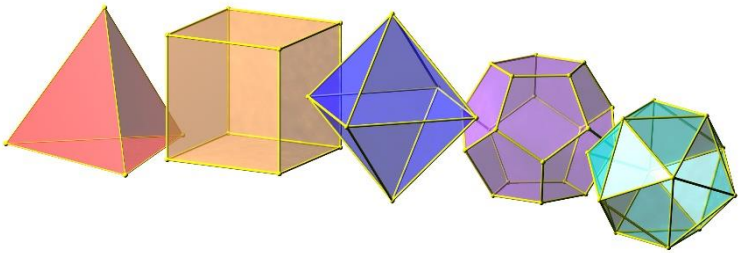
Eulerova věta

$S + V = H + 2$

S	počet stěn
V	počet vrcholů
H	počet hran



	S	V	H
Tetraedr	4	4	6
Hexaedr	6	8	12
Oktaedr	8	6	12
Dodekaedr	12	20	30
Ikosaedr	20	12	30



p počet hran incidentních s daným vrcholem

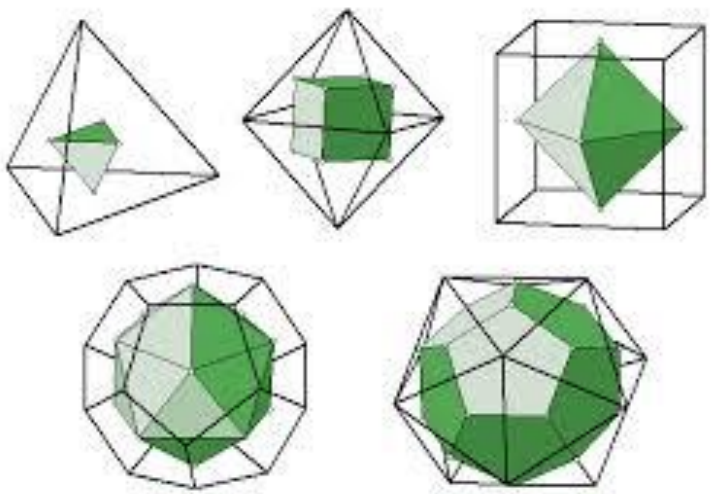
q *počet hran incidentních s danou stěnou*

$pV=2H$

$qS=2H$

Platonova tělesa

Eulerova věta $S + V = H + 2$



$$H = H(p, q)$$

$$pV = 2H, qS = 2H$$

$$\frac{2H}{q} + \frac{2H}{p} = H + 2$$

$$2pH + 2qH = pqH + 2pq$$

$$H = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}$$

$$2p + 2q - pq > 0$$

$$(2 - p)(2 - q) < 4$$

Platonova tělesa

$$V = \frac{1}{24} S p h^3 \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \omega$$

$$\sin \omega = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}}$$

2ω ... stěnový úhel pravidelného mnohostěnu

Mnohostěn	p	q	S
Tetraedr	3	3	4
Hexaedr	4	3	6
Oktaedr	3	4	8
Dodekaedr	5	3	12
Ikosaedr	3	5	20

$$n = 4, m = 3, p = 6, \omega = \frac{\pi}{4}$$

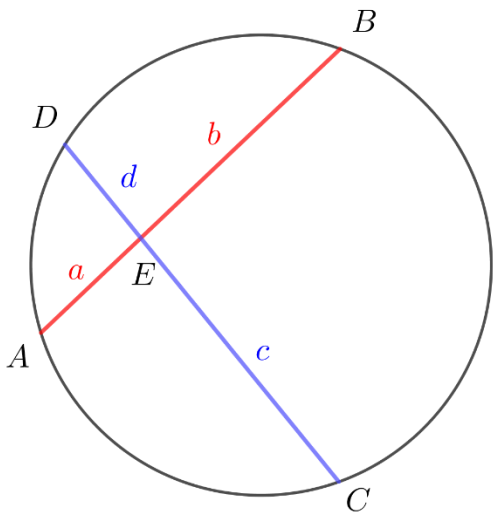
$$V = \frac{1}{24} \cdot 6 \cdot 4 \cdot h^3 \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = h^3$$

Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)

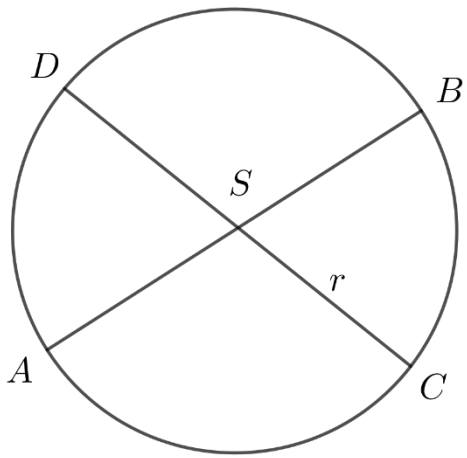
ÚLOHA

Jestliže se tětivy *AB*, *CD* kružnice kolmo protínají v bodě *E* a má-li kružnice poloměr *r*, pak platí:

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4r^2$$



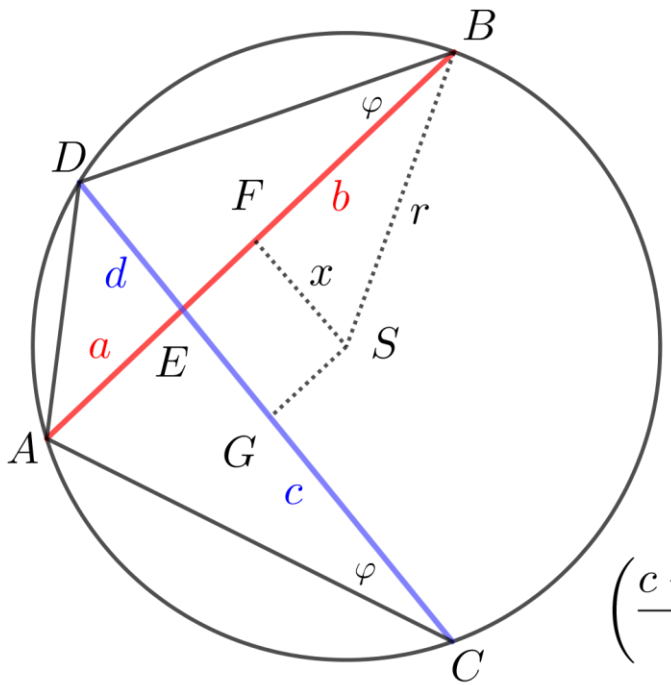
$|AE| = a, |BE| = b, |CE| = c, |DE| = d$



$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 + |DS|^2 = 4r^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2$$

Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)



$$|AF| = |BF| = \frac{a+b}{2}$$

$$\Delta DBE \sim \Delta ACE$$

$$|CG| = |DG| = \frac{c+d}{2}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b} \rightarrow ab = cd$$

$$x = |FS| = |EG|$$

$$x = \frac{c+d}{2} - d = \frac{c-d}{2}$$

$$x^2 = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$$

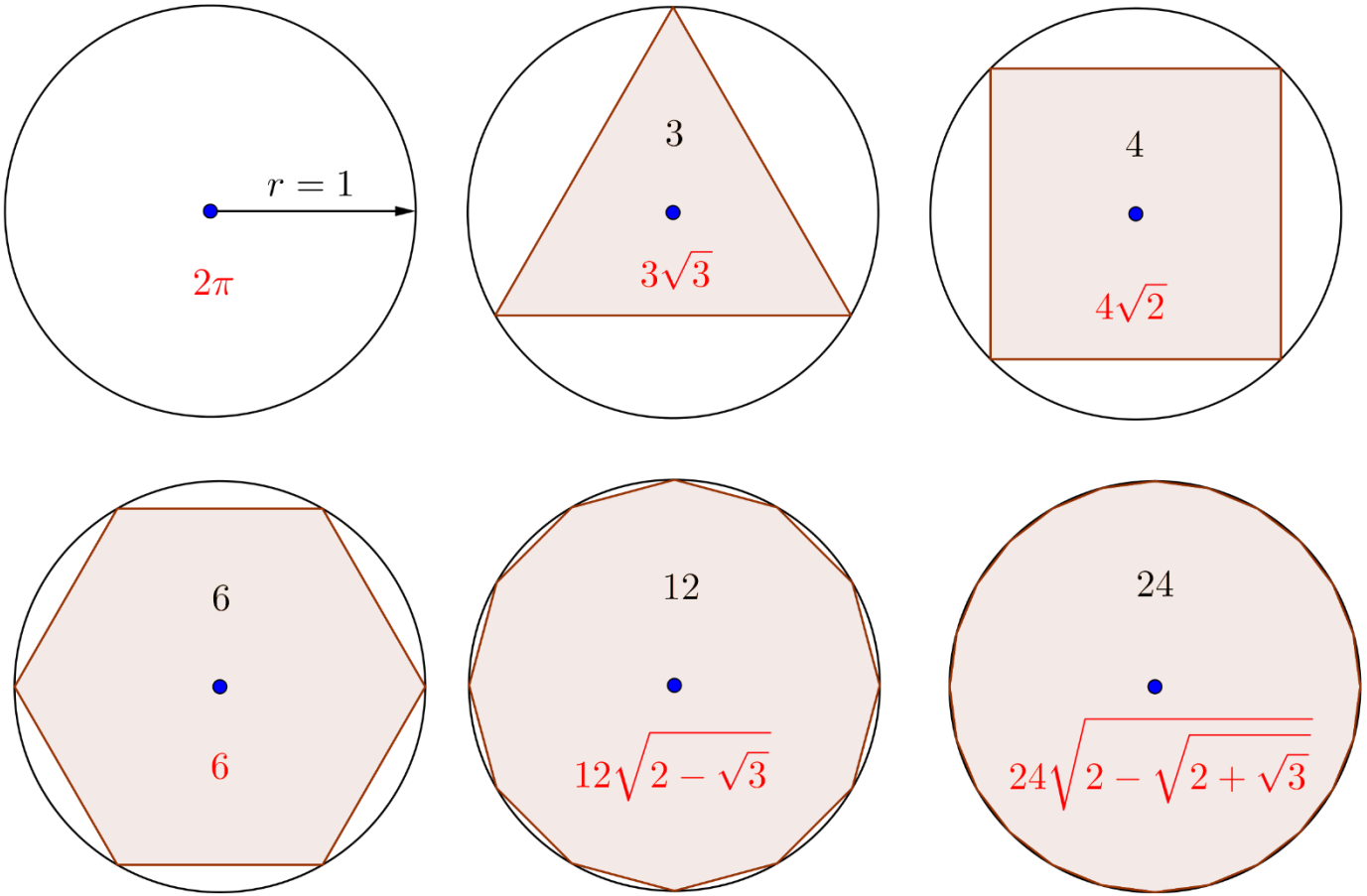
$$x^2 = r^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{c-d}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$c^2 - 2cd + d^2 = 4r^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2$$

Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)



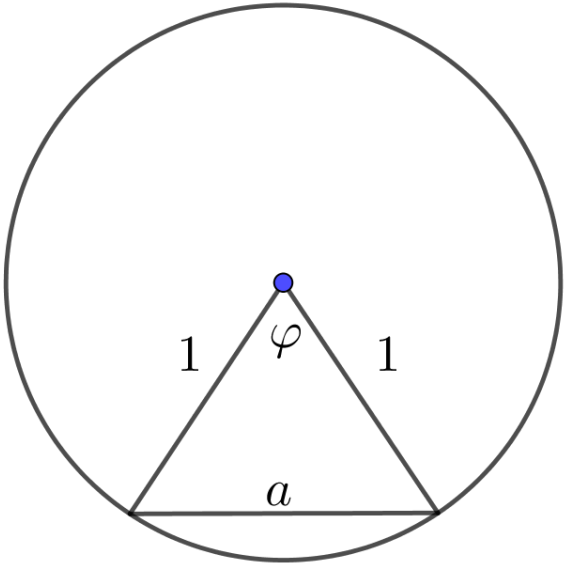
Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)

$$48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

48

$$96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

96



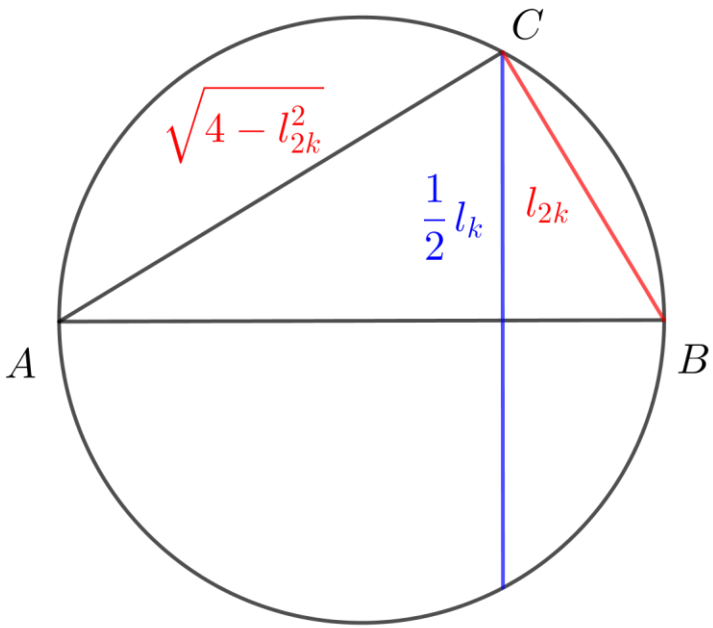
$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

$$a^2 = 2 - 2\cos\varphi$$

$$a = \sqrt{2 - 2\cos\varphi}$$

$$l = n\sqrt{2 - 2\cos\varphi}$$

Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)



$$|AB| = 2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} l_{2k} \sqrt{4 - l_{2k}^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} l_k = \frac{1}{2} l_k$$

$$l_{2k} \sqrt{4 - l_{2k}^2} = l_k \ \rightarrow l_{2k}^4 - 4 l_{2k}^2 + l_k^2 = 0$$

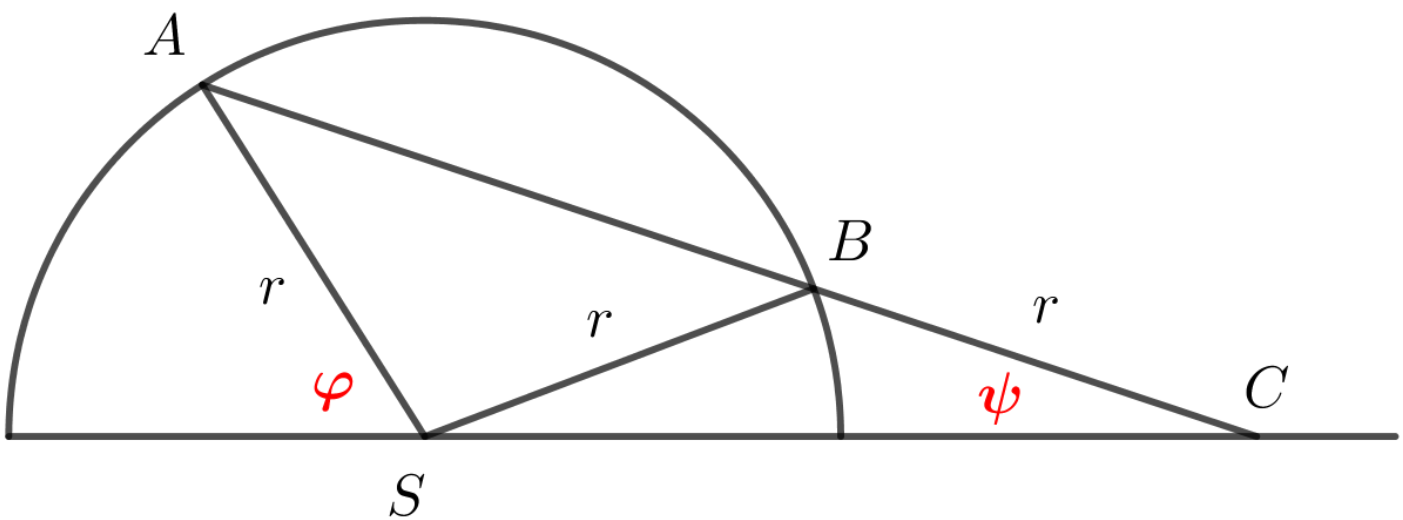
$$l_{2k}^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 l_k^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - l_k^2}$$

$$l_{2k} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_k^2}}$$

$$l_6 = 1, l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

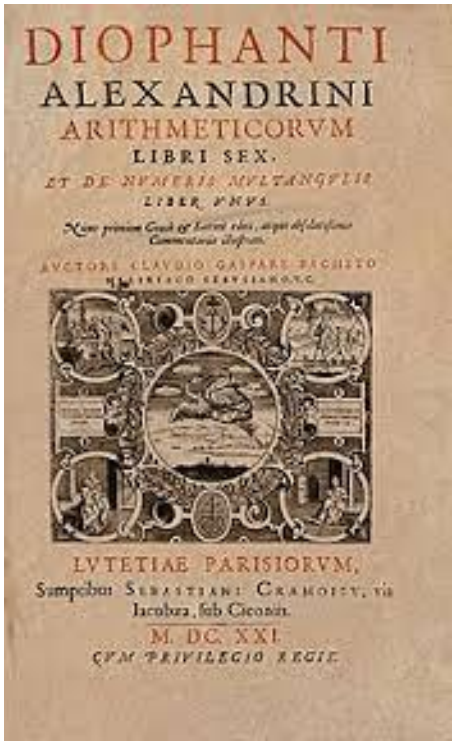
$$l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)



$$|SA| = |SB| = |BC|$$

Diofantos (3. stol. n. l.)



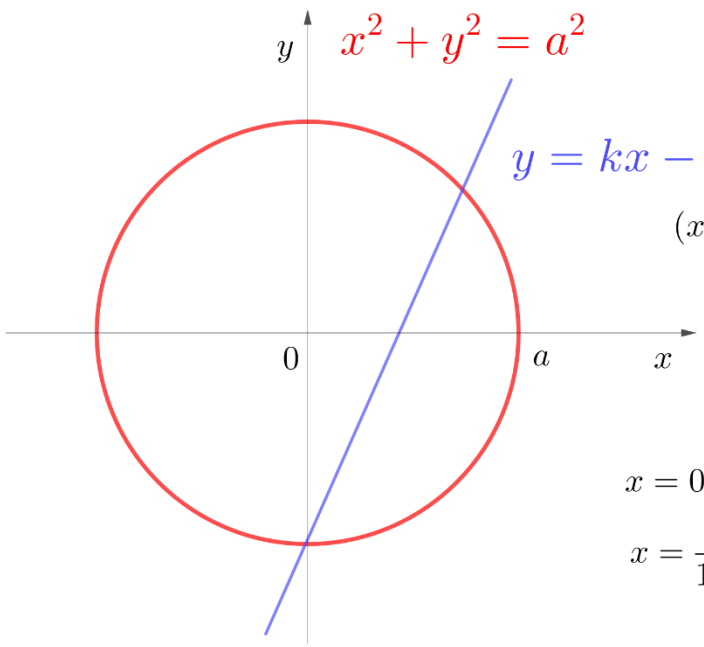
$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

Úloha:
Daný čtverec rozlož na dva čtverce.
Například 16 rozlož na dva čtverce.

Předcházející úloha je osmá úloha z druhé knihy Diofantovy *Aritmetiky*. Právě k ní napsal (na okraj svého výtisku Diofantovy knihy) velký francouzský matematik *Pierre Fermat* svou významnou poznámku:
„Naproti tomu není možné rozložit kubus na dva kubusy, ... Objevil jsem zajisté udivující důkaz toho, ale tento okraj je příliš malý.“

Diofantos (3. stol. n. l.)



$$(x, y) = (0, a), (x, y) = (a, 0)$$

$$x^2 + (kx - a)^2 = a^2$$

$$\left(1 + k^2\right)x^2 - 2akx = 0$$

$$x \cdot \left[\left(1 + k^2\right)x - 2ak\right] = 0$$

$$x = 0 \text{ nebo } \left(1 + k^2\right)x - 2ak = 0$$

$$x = \frac{2ak}{1 + k^2}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$a = 4$$

$$(x, y) = \left(\frac{8k}{k^2 + 1}, 4\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\right)$$

$$k = 1, (x, y) = (4, 0)$$

$$k = 2, (x, y) = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$y = kx - a = k \cdot \frac{2ak}{1 + k^2} - a = \frac{2ak^2 - a(1 + k^2)}{1 + k^2} = a\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

$$(x, y) = \left(\frac{2ak}{1 + k^2}, a\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\right)$$

Diofantos (3. stol. n. l.)

ÚLOHA

Najděte taková tři čísla, aby součet všech tří i součty každých dvou byly čtverce.

$$a + b + c = A^2$$

$$a + b = B^2$$

$$a + c = C^2$$

$$b + c = D^2$$

Diofantos (3. stol. n. l.)

Diofantos našel následující čísla:

$a = 80, b = 320, c = 41$

$$a + b + c = 80 + 320 + 41 = 441 = 21^2$$

$$a + b = 80 + 320 = 400 = 20^2$$

$$a + c = 80 + 41 = 121 = 11^2$$

$$b + c = 320 + 41 = 361 = 19^2$$

Diofantos (3. stol. n. l.)

Označme součet hledaných čísel $x^2 + 2x + 1$

součet druhého a třetího $x^2 - 2x + 1$

součet prvního a druhého x^2

$$\begin{aligned} a + b + c &= x^2 + 2x + 1 \\ b + c &= x^2 - 2x + 1 \\ a + b &= x^2 \end{aligned}$$

Pro a, b, c dostáváme

$c = 2x + 1$

$b = x^2 - 4x$

$a = 4x$

$$a + c = 6x + 1$$

Diofantos (3. stol. n. l.)

Výraz $a + c = 6x + 1$ musí být druhou mocninou.

Nechť $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

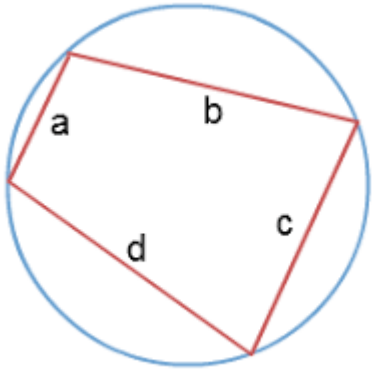
$$x = 4 \qquad 6x + 1 = 25$$
$$x = 8 \qquad 6x + 1 = 49$$
$$x = 20 \qquad 6x + 1 = 121$$

x	$a = 4x$	$b = x^2 - 4x$	$c = 2x + 1$
4	16	0	9
8	32	32	17
20	80	320	41

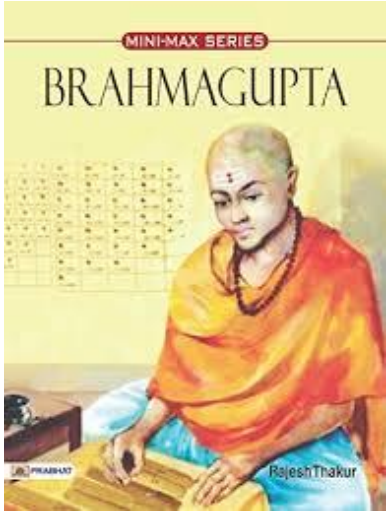
Brahmagupta (598 – 668)

Pro obsah tětivového čtyřúhelníku platí:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

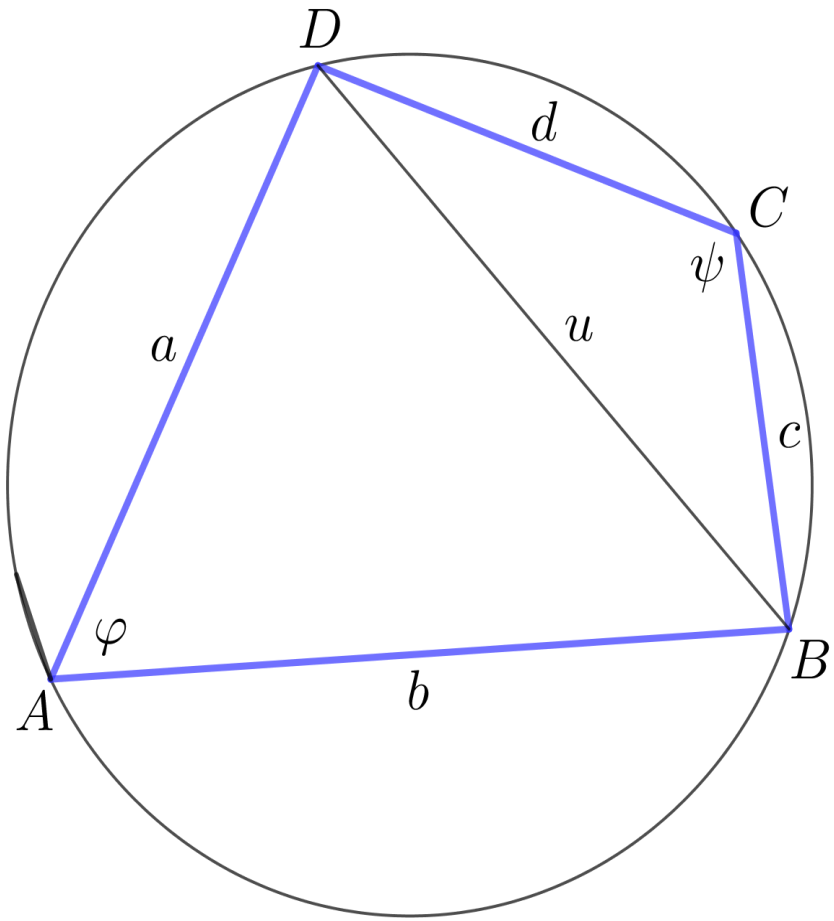


$$2s = a + b + c + d$$



V knize *Brāhmasphuṭa- siddhānta*
z roku 628 Brahmagupta jako první zavedl nulu jako plnoprávnou číslici a stanovil pravidla pro počítání se zápornými čísly.

Brahmagupta (598 – 668)

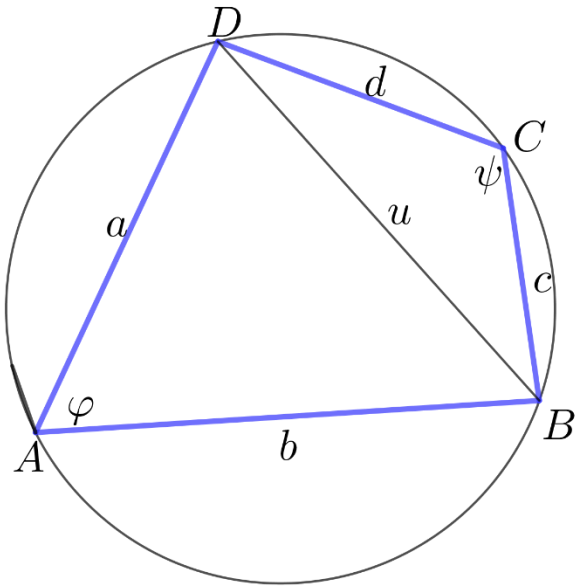


$$\varphi + \psi = \pi$$

$$\sin\psi = \sin(\pi - \varphi)$$

$$\cos\psi = -\cos\varphi$$

Brahmagupta (598 – 668)



Podle kosinové věty

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

$$u^2 = c^2 + d^2 - 2ab\cos\psi = c^2 + d^2 + 2cd\cos\varphi$$

$$2(ab + cd)\cos\varphi = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

Pro obsah čtyřúhelníku platí

$$S = \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\psi = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\varphi$$

$$4S = 2(ab + cd)\sin\varphi$$

$$4(ab + cd)^2\cos^2\varphi = \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 \qquad 4(ab + cd)^2\sin^2\varphi = 16S^2$$

$$4(ab + cd)^2\cos^2\varphi + 4(ab + cd)^2\sin^2\varphi = \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 + 16S^2$$

$$(2ab + 2cd)^2 = \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 + 16S^2$$

Brahmagupta (598 – 668)

$$2s = a + b + c + d$$

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$(2ab + 2cd)^2 = \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 + 16S^2$$

$$16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2$$

$$16S^2 = \left(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)\left(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right)$$

$$16S^2 = \left[(a+b)^2 - (c-d)^2\right]\left[(c+d)^2 - (a-b)^2\right]$$

$$16S^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$

$$s - a = \frac{b+c+d-a}{2} \qquad s - b = \frac{a+c+d-b}{2} \qquad s - c = \frac{a+n+d-c}{2} \qquad s - d = \frac{a+b+c-d}{2}$$

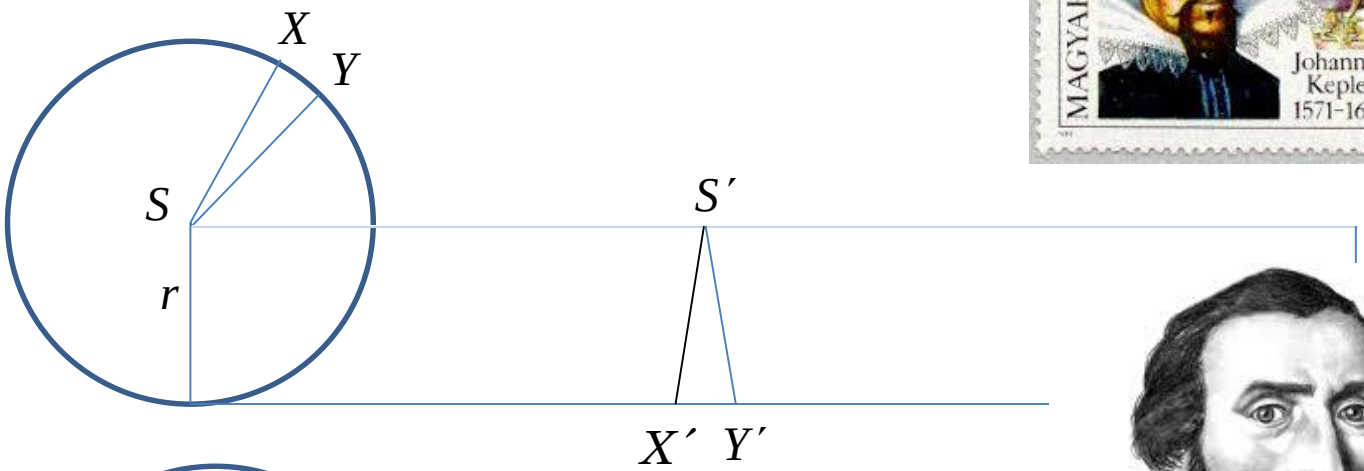
$$16S^2 = 2(s-d) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-a)$$

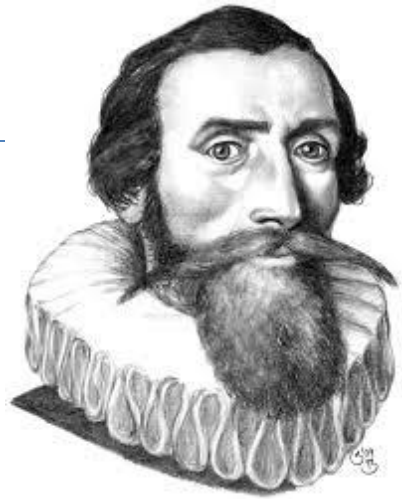
$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

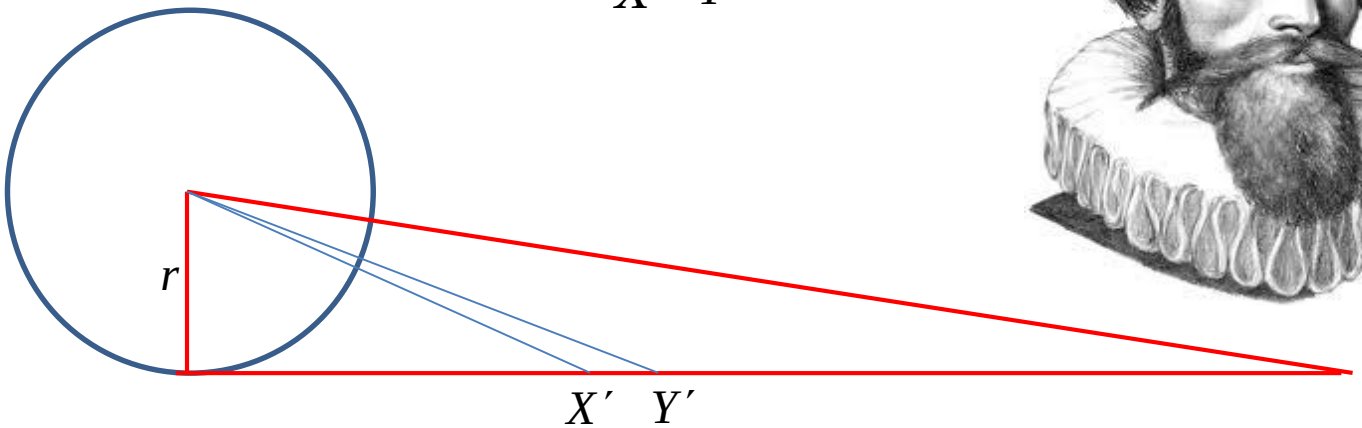
$$\boldsymbol{S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

Johannes Kepler (*1571 –†1630)

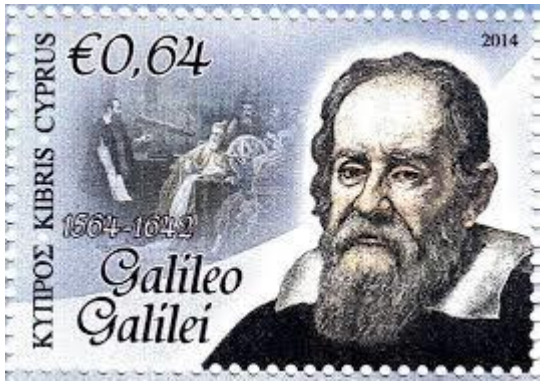
Obsah kruhu







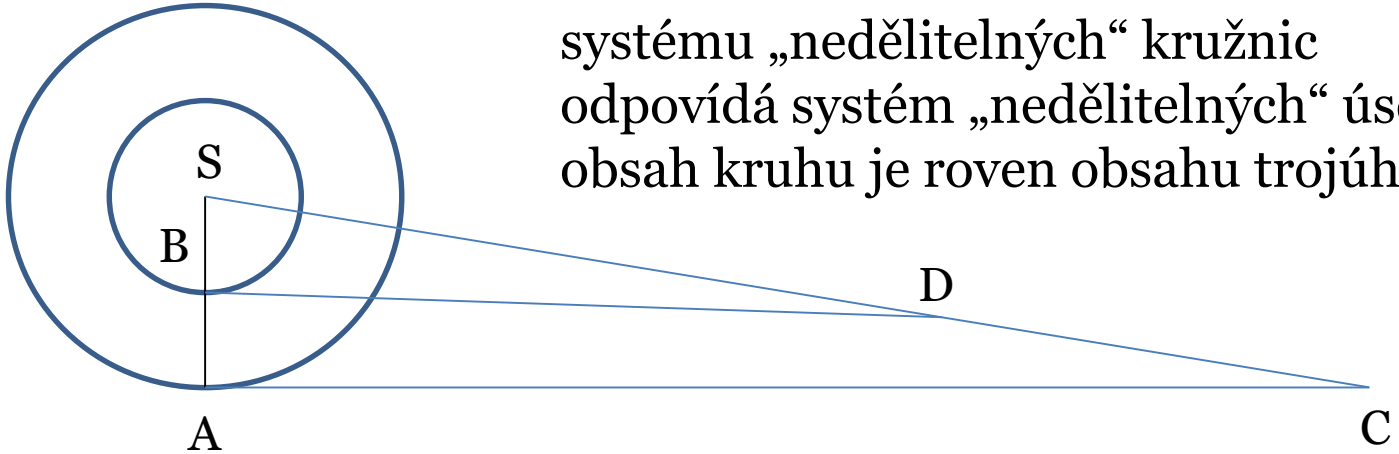
Galileo Galilei (*1564-†1642)
Bonaventura Cavalieri (*1598-†1647)
Evangelista Torricelli (*1608-†1647)



teorii indivisibilií

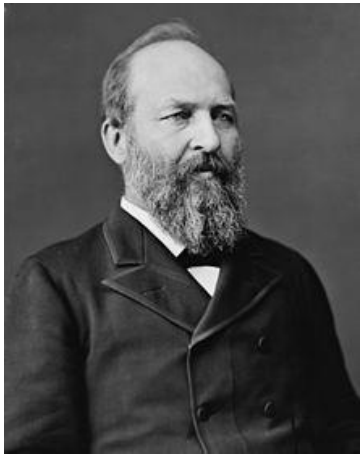
Geometría indivisibilius continuorum (1635)

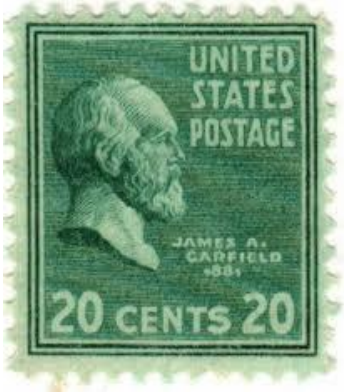
systému „nedělitelných“ kružnic
odpovídá systém „nedělitelných“ úseček
obsah kruhu je roven obsahu trojúhelníku SAC

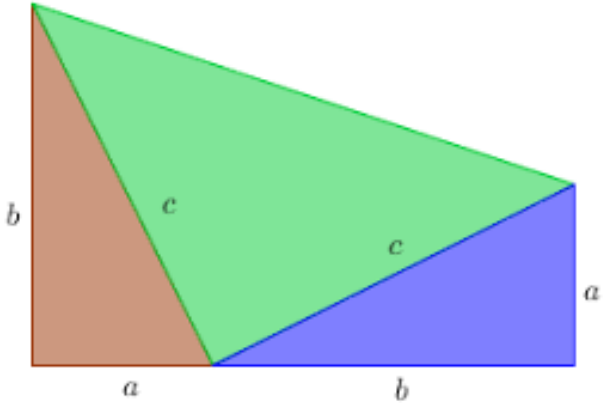


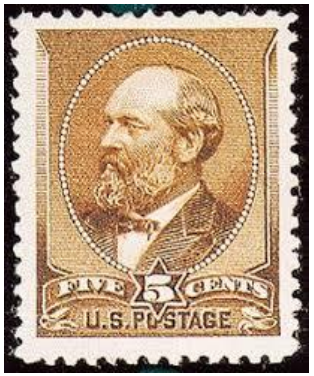
James Abram Garfield (1831-1881)

20. president USA







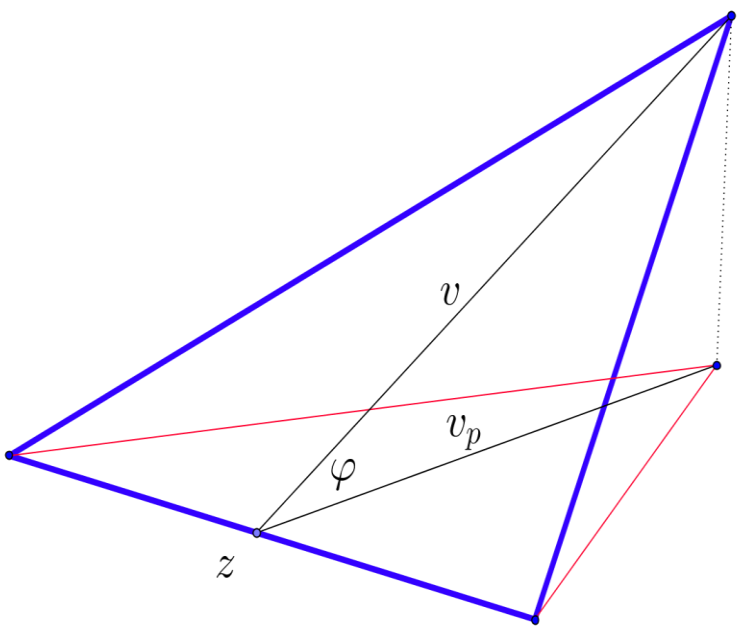


$$S = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (a+b) \qquad S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b) = ab + \frac{1}{2}c^2$$

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2 \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

Pravoúhlý průmět



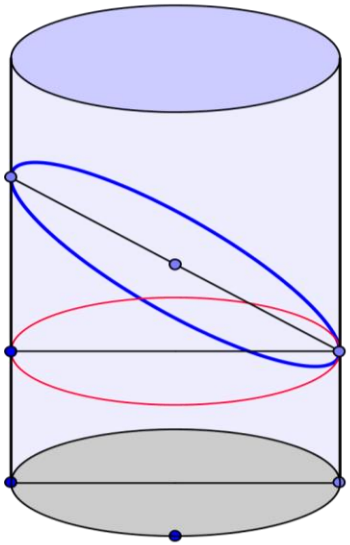
$$S = \frac{1}{2} z v$$

$$v_p = v \cos \varphi$$

$$S_p = \frac{1}{2} z v_p = \frac{1}{2} z v \cos \varphi$$

$$S_p = S \cos \varphi$$

Obsah elipsy

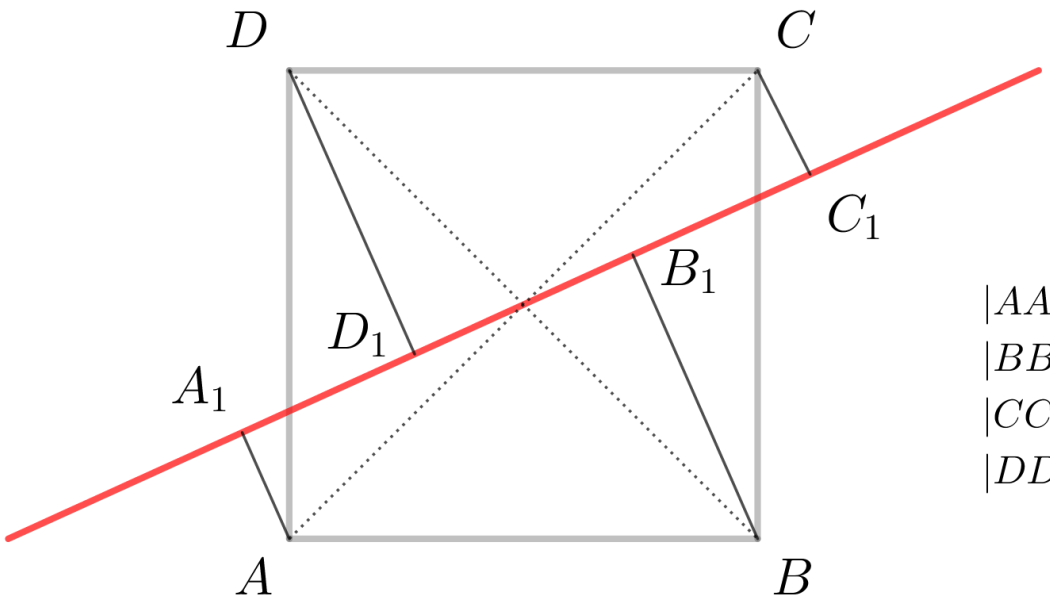


$$S_p = S\cos\varphi = S\cdot\frac{2b}{2a} = S\cdot\frac{b}{a}$$

$$S_p = \pi b^2 = S\,\frac{b}{a}$$

$$S = \pi ab$$

Čtverec



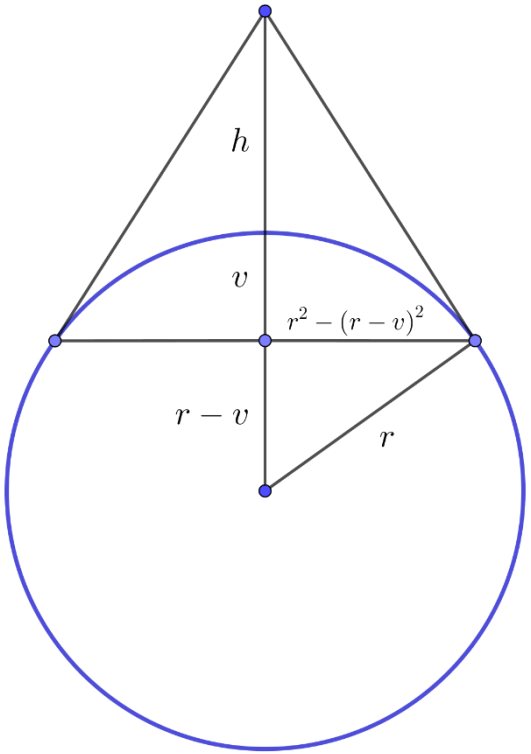
$|AA_1| = a$
$|BB_1| = b$
$|CC_1| = c$
$|DD_1| = d$

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 + |CC_1|^2 + |DD_1|^2 = ?$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ?$$

Kulový vrchlík

Jakou část zemského povrchu vidí kosmonaut z výšky h km nad Zemí?



Povrch kulového vrchlíku

$$S = 2\pi r v$$

$$(h+v)(r-v) = r^2 - (r-v)^2$$

$$rh + rv - vh - v^2 = r^2 - r^2 + 2rv - v^2$$

$$rh = rv + vh = v(r+h)$$

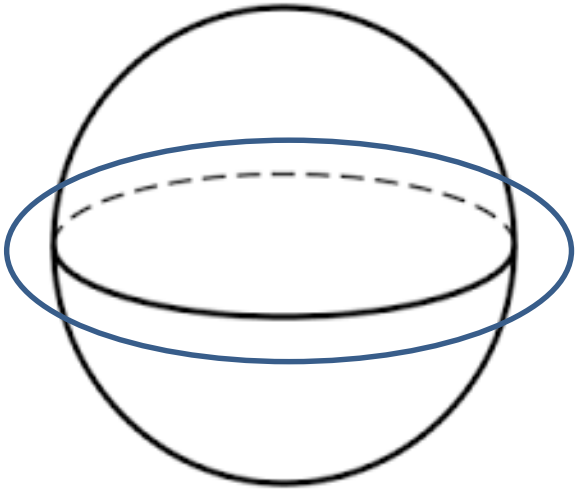
$$v = \frac{rh}{r+h}$$

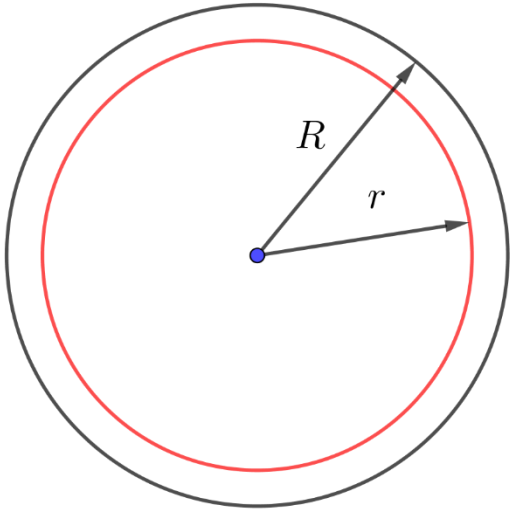
$$S = 2\pi r v = 2\pi r \cdot \frac{rh}{r+h} = 2\pi r^2 \cdot \frac{h}{r+h}$$

$$h = r \rightarrow \; S = \pi r^2$$

$$h = 400 \text{ km} \rightarrow S = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6371^2 \cdot \frac{400}{6771}$$

Provázek kolem rovníku





délka kružnice

$l = 2\pi r$

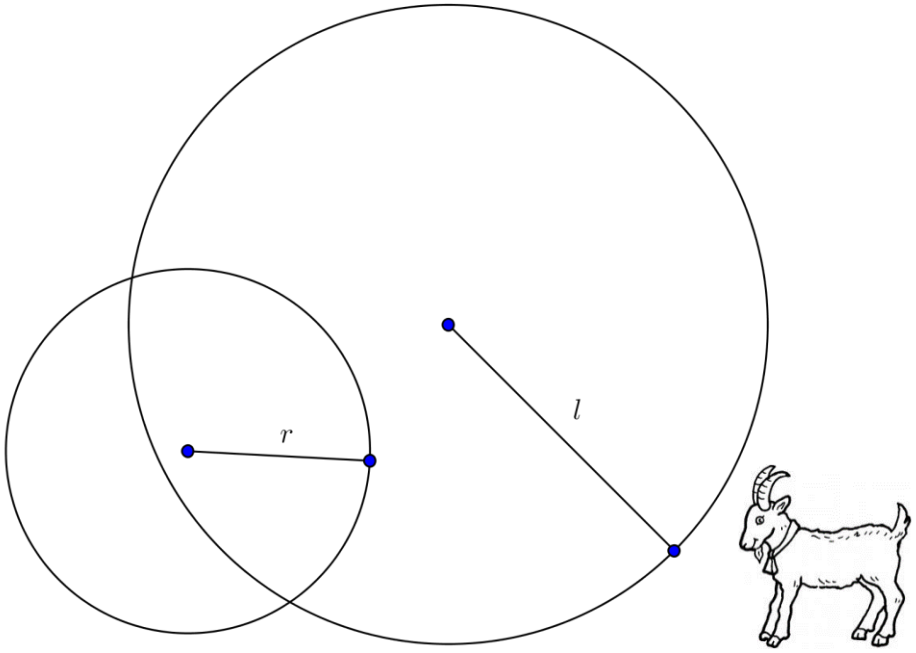
$$2\pi R = 40\ 000\ 001$$

$$2\pi r = 40\ 000\ 000$$

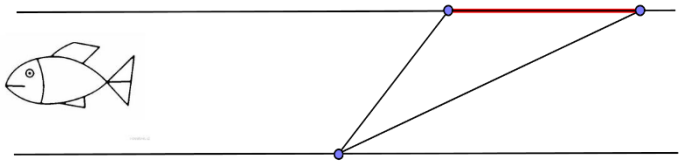
$$2\pi R\text{-}2\pi r = 1$$

$$R - r = \frac{1}{2\pi} = 0{,}15915\ \ldots$$

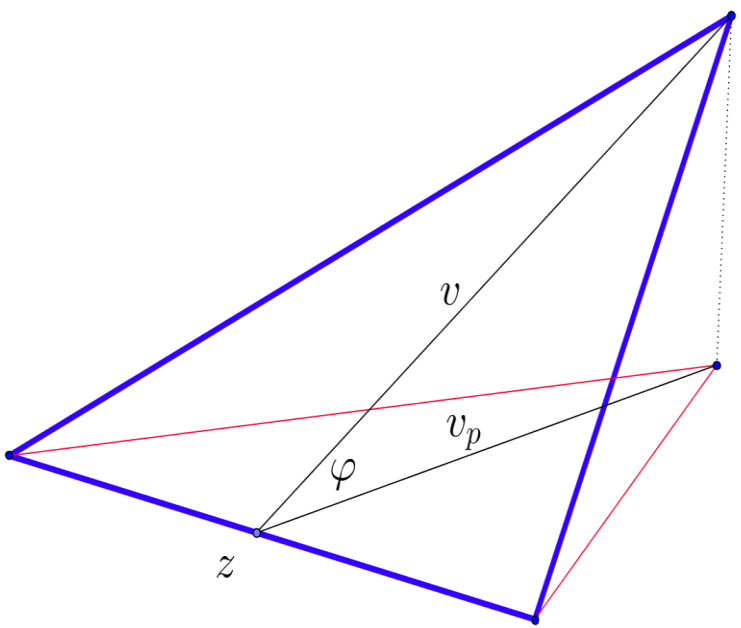
Kozí úloha



Měření hloubky řeky



Pravoúhlý průmět



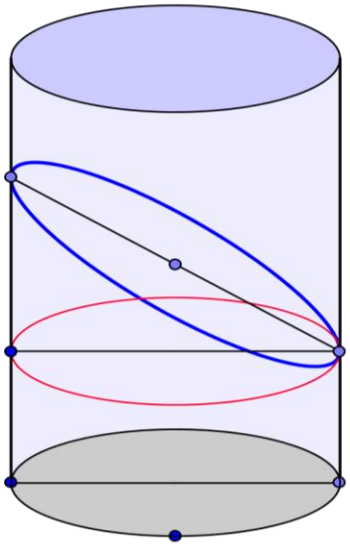
$$S = \frac{1}{2} z v$$

$$v_p = v \cos \varphi$$

$$S_p = \frac{1}{2} z v_p = \frac{1}{2} z v \cos \varphi$$

$$S_p = S \cos \varphi$$

Obsah elipsy



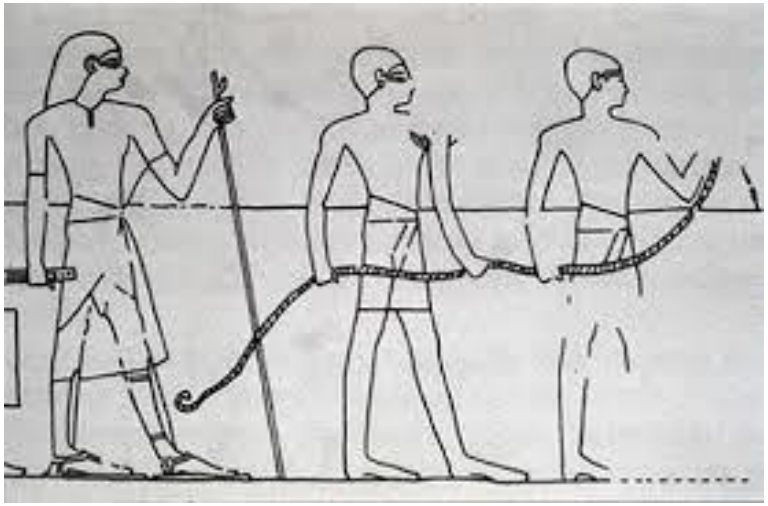
$$S_p = S\cos\varphi = S\cdot\frac{2b}{2a} = S\cdot\frac{b}{a}$$

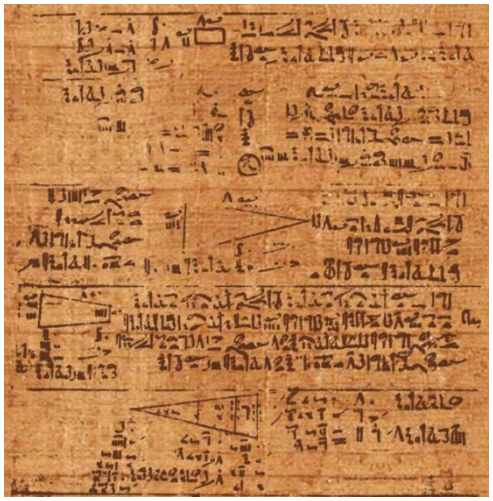
$$S_p = \pi b^2 = S\,\frac{b}{a}$$

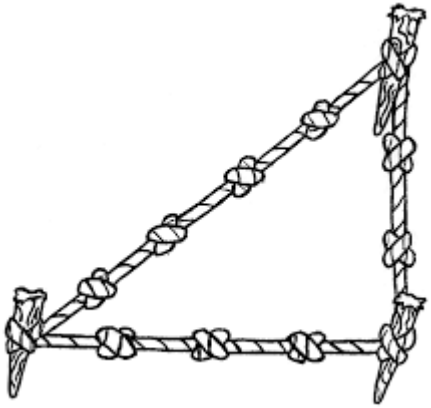
$$S = \pi ab$$

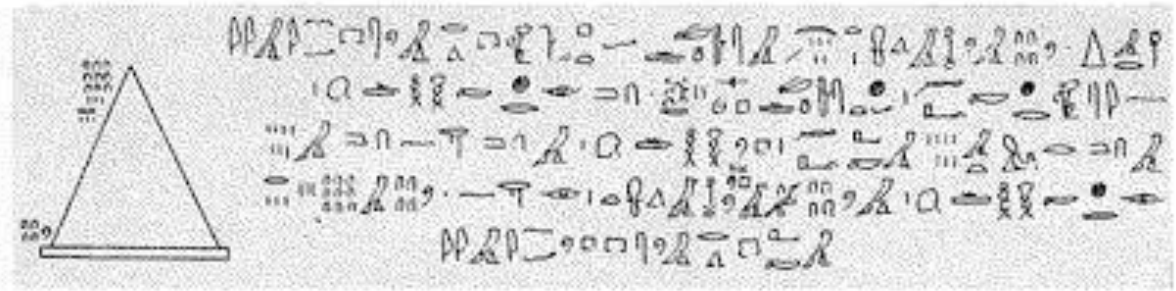
Harpedonapté

Harpedonapté (napínači lan, zeměměřiči, stavitelé)



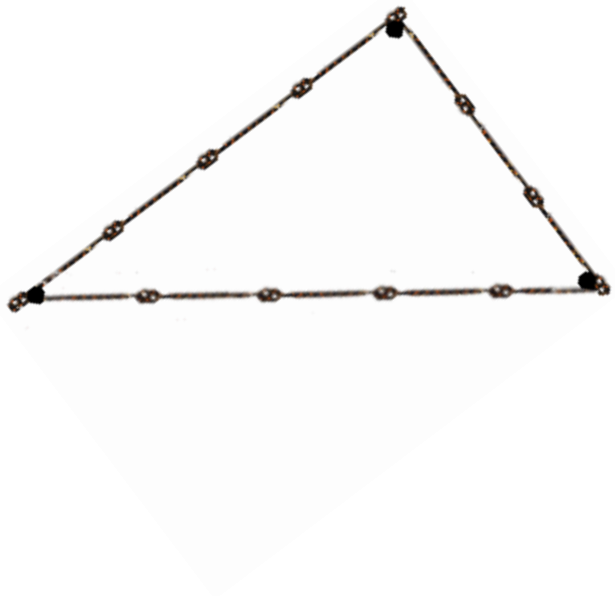




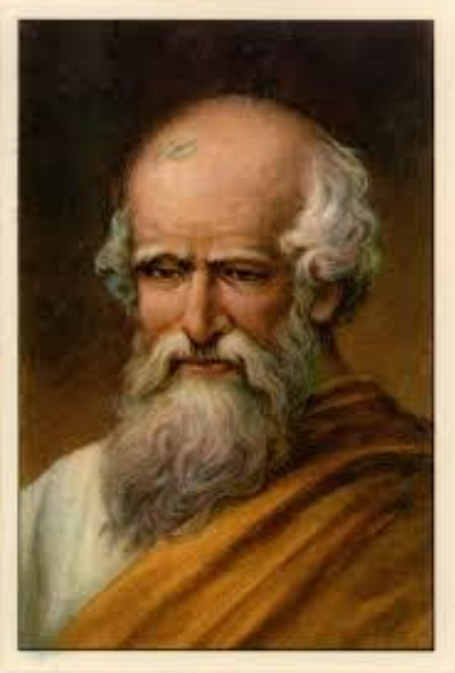


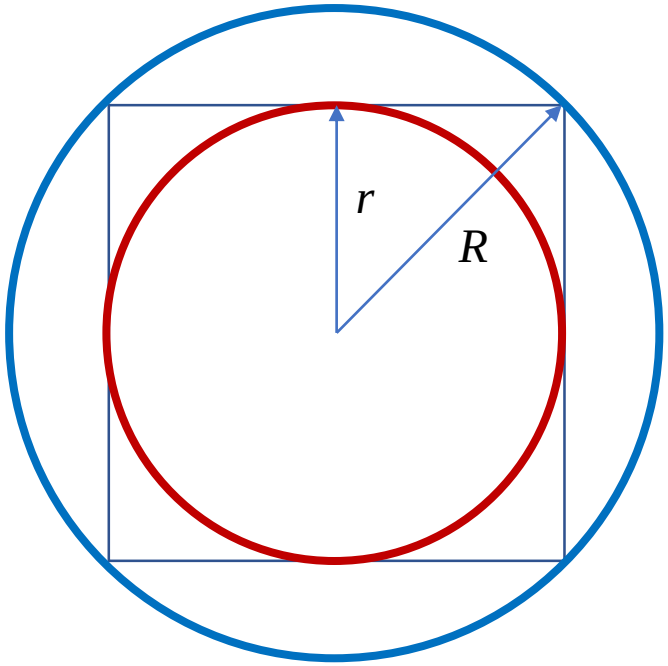
Harpedonapté

Harpedonapté (napínači lan, zeměměřiči, stavitelé)



Archimédés ze Syrakus (287-212 př. n. l)





$S = \pi R^2$ $S = \pi r^2$

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chvárizmí al-Mádžusí
(asi 780-asi 850)
بو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي ابو جعف

- Algebraický traktát

  Muchtasar min hisáb al džabr wal-muqábala

  „*Stručné shrnutí o redukci a vzájemném rušení*“

  algebraický traktát se zachoval v původním arabském znění

- Aritmetický traktát

  Kitáb al-džám'a wa-l-tafríq bil-hisáb al-hindi

  „*Kniha o indickém počítání*“

  aritmetický traktát se nezachoval v původním arabském znění

  nejstarší latinský překlad z poloviny XII. století je uložen v knihovně University of Cambridge, český překlad poprvé v historii (2013)