EUKLIDOVSKÉ A NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE

Katedra
aplikované matematiky

Co je to geometrie?

$\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$

$\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$

$\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$

Obrázek: Zeměměřič

Obrázek: Zeměměřič

Obrázek: Zeměměřička

Ottův slovník naučný, X. díl, 1896

Ottův slovník naučný, X. díl, 1896

Geometrie, měřictví, jest nauka o veličinách a útvarech prostorových. Pojmu těchto útvarů nabýváme abstrakcí z předmětů hmotných. Nehledíme-li ku hmotě a máme-li z vlastnosti tělesa na zřeteli pouze jeho tvar, velikost a polohu, myslíme si těleso mathematické, kteréž tedy není nic jiného, než určitě a dokonale omezená část prostoru. Meze tělesa takového jsou plochy, meze ploch jsou linie, tyto pak omezeny jsou body. Body, linie, plochy a tělesa mathematická, jakož i různá jejich spojení a skupení, jmenují se útvary geometrické. Jsou to pojmy, které bytují toliko v naší mysli, kterých však nelze smysly postihnouti. . . .

Felix Klein, 1872

Felix Klein, 1872

Geometrie je studium invariantů vůči grupě transformací.

- ROVINA

- ROVINA
- BOD

- ROVINA
- BOD
- PŘÍMKA

Kdysi dávno před Euklidem

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Amazonská rovina

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Rovina u Jaroměře

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Bod v rovině u Drahomyšle

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Neolitická přímka

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Domácí úkol z geometrie

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Domácí úkol z geometrie

Kdysi dávno před Euklidem

Obrázek: Domácí úkol z geometrie

Kdysi dávno před Euklidem

Geometrie podle Euklida

Geometrie podle Euklida

Obrázek: Athény

Narozen kolem roku 300 př. n. l.

Geometrie podle Euklida

Obrázek: Múseion

Alexandrijská knihovna

Základy - $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$

Základy - Στοιχεια

Fragment Základů psaných na papyru z let 75 - 125

Základy - Στοιχεια

Překlad Základů do arabštiny

Základy - Στοιχεια

Překlad Základů do latiny

Základy - Στοιχεια

jež dle potřeby opravil, doplnil a soustavně spořádal. Methodu do té doby uznávanou a přijatou zachoval důsledně.

Známost a sláva díla toho se rozšířila rychle, takže práce odboru toho dosavadní upadly téměř v zapomenutí. Nástupcům jeho, když se ho kde dokládali, na místě výslovného jmenování stačilo pouze připomenouti, že to neb ono praví spisovatel Základů (στοιχειωτής). Pilně se dílem tím zaměstnávali mathematikové byzantijští; z Římanův o Eukleidovi nejprve se zmiňuje Cicero (de orat. III. 132.); s dílem jeho však seznámili se Římané jen ponenáhlu a čítali je v původním jazyce. Teprve Boëthius koncem 5. stol. po Kr. jal se je překládati na jazyk latinský. Později zvl. Arabové horlivě se jím zabývali. Ve středověku studium mathematické vůbec ochablo, a tak i dílo Eukleidovo teprve po r. 1500 opět hojněji vydáváno a vysvětlováno, a dosud se nižší geometrie zakládá na jeho Základech. V některých zemích (na př. v Anglii) prý se jich ještě nedávno užívalo za učebnici.

Z rukopisů, jichž je řada, nejlepší jest codex Vaticanus č. 190. z 10. stol.

První vydání Základů tiskem pořídil Grynaeus (v Basileji 1533); z pozdějších nejlepší E. F. Augustovo (v Berlíně 1826 nn.); ze souborných uvésti sluší F. Peyrardovo (Oeuvres d' Euclide, řec., lat. a franc. — v Paříži 1814) a vydání Heibergovo i Mengeovo (Euclidis opera omnia — u Teubnera ve sbírce Bibl. script. Graec. et Rom., v Lipsku 1883 nn., řec. a lat.).

Obsah Základů.

Kn. I. O přímkách, trojúhelnících, rovnoběžnících a vzájemnosti jejich.
II. O dělení přímek a jeho důsledcích.
III. O kruhu a jeho vlastnostech.
IV. O kruhu ve spojení s jinými útvary (vpisování, opisování).
V. O úměrnosti veličin na základě přímek.
VI. Upotřebení úměrnosti veličin v geometrii.
VII.—IX. O číslech prostých a mocninách na základě přímek.
X. O souměřitelnosti a nesouměřitelnosti a na základě toho o veličinách geometrických změrných (rationalních) a nezměrných (irrationalních).
XI. Základní věty o protínání a styku rovin.
XII. Útvary prostorové (jehlan, hranol, kužel, válec, koule).
XIII. O pěti pravidelných (Platonských) tělesích.

Eukleidovy Základy.

Kniha první.

Výměry.

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.
5. Plocha jest, co jen délku a šířku má.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
8. Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.
9. Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým.
10. Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena.
11. Tupý jest úhel pravého větší.
12. Ostrý pak pravého menší.
13. Meze jest, co jest něčeho hranicí.
14. Útvar jest, co nějaká nebo nějaké meze objímají.
15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod.
17. Průměrem kruhu jest přímka některá vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.
18. Polokruh pak jest útvar omezený průměrem a částí obvodu jím usečeného. Střed polokruhu je týž jako kruhu.

Frant. Servit, Eukleidovy Základy. 1

Překlad Základů do češtiny

Geometrie podle Euklida, Stoicheia

Geometrie podle Euklida, Stoicheia

1. Nejprve uvedl všechny **základní pojmy**, na nichž chtěl geometrii vybudovat.

Geometrie podle Euklida, Stoicheia

1. Nejprve uvedl všechny **základní pojmy**, na nichž chtěl geometrii vybudovat. (Překlad Základů od Františka Servíta, 1907)
   - **Bod** jest, co nemá dílu.
   - Čára pak délka bez šířky.
   - Přímá jest čára (**přímka**), která svými body táhne se rovně.
   - Plocha jest, co jen délku a šířku má.
   - Rovinná jest plocha (**rovina**), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.

Geometrie podle Euklida, Stoicheia

1. Nejprve uvedl všechny **základní pojmy**, na nichž chtěl geometrii vybudovat. (Překlad Základů od Františka Servíta, 1907)
   - **Bod** jest, co nemá dílu.
   - Čára pak délka bez šířky.
   - Přímá jest čára (**přímka**), která svými body táhne se rovně.
   - Plocha jest, co jen délku a šířku má.
   - Rovinná jest plocha (**rovina**), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
2. Zformuloval tvrzení která jsou tak zřejmá, že není třeba dokazovat jejich pravdivost (**axiomy** a **postuláty**).

Geometrie podle Euklida, Stoicheia

1. Nejprve uvedl všechny **základní pojmy**, na nichž chtěl geometrii vybudovat. (Překlad Základů od Františka Servíta, 1907)
   - **Bod** jest, co nemá dílu.
   - Čára pak délka bez šířky.
   - Přímá jest čára (**přímka**), která svými body táhne se rovně.
   - Plocha jest, co jen délku a šířku má.
   - Rovinná jest plocha (**rovina**), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
2. Zformuloval tvrzení která jsou tak zřejmá, že není třeba dokazovat jejich pravdivost (**axiomy** a **postuláty**).
3. Všechna další tvrzení, **matematické věty**, jsou odvozeny z axiomů a dříve dokázaných vět.

Postuláty

Postuláty

1. Každé dva body spojuje jediná přímka.

Postuláty

1. Každé dva body spojuje jediná přímka.
2. Každou úsečku lze libovolně prodloužit.

Postuláty

1. Každé dva body spojuje jediná přímka.
2. Každou úsečku lze libovolně prodloužit.
3. Lze sestrojit kružnici s libovolným poloměrem a se středem v libovolném bodě.

Postuláty

1. Každé dva body spojuje jediná přímka.
2. Každou úsečku lze libovolně prodloužit.
3. Lze sestrojit kružnici s libovolným poloměrem a se středem v libovolném bodě.
4. Všechny pravé úhly jsou stejné.

Postuláty

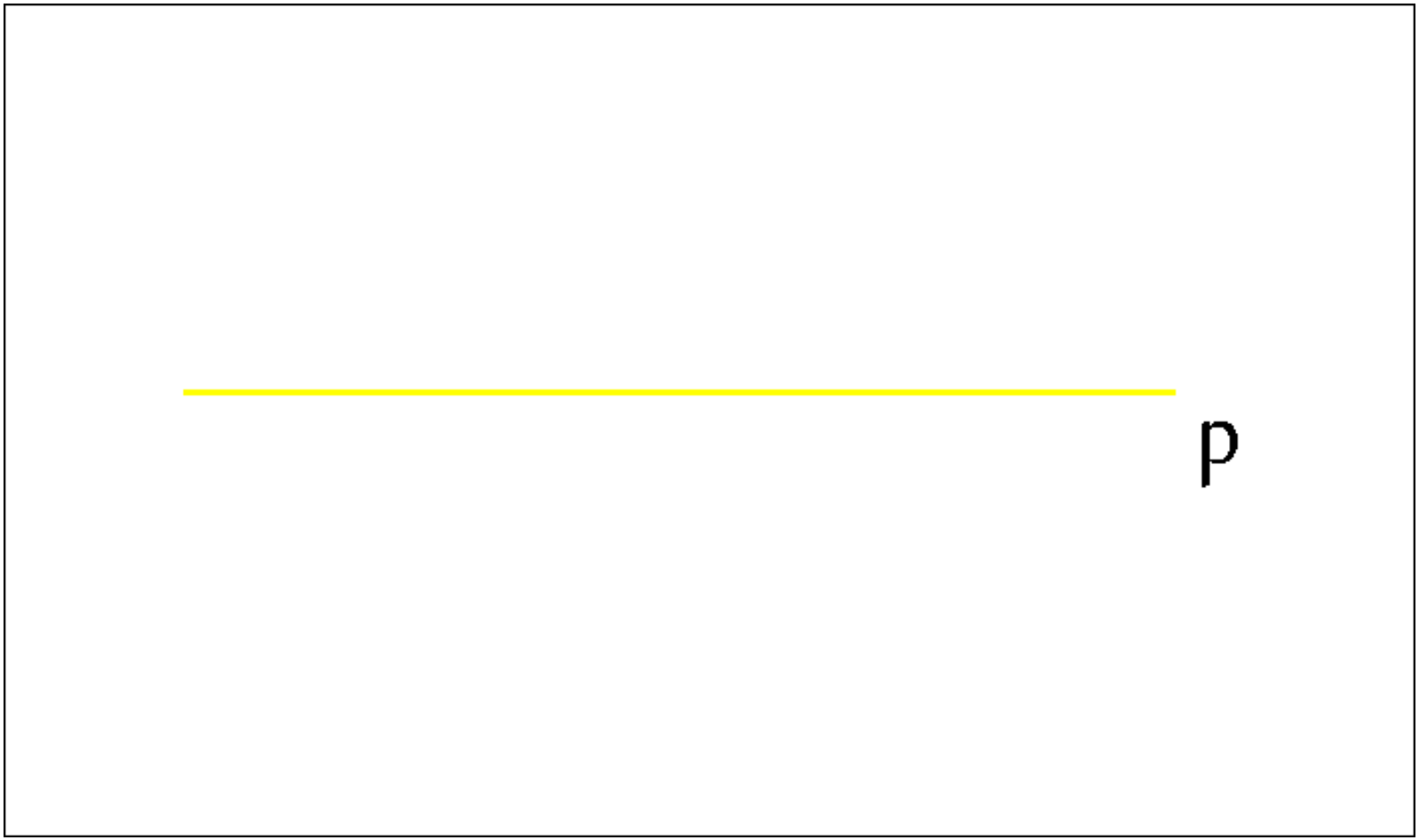
Postuláty

5. Jestliže přímka p protíná další dvě přímky q a r a vytváří s nimi na své jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší, než dva úhly pravé, pak se na této straně přímky p přímky q a r protínají.

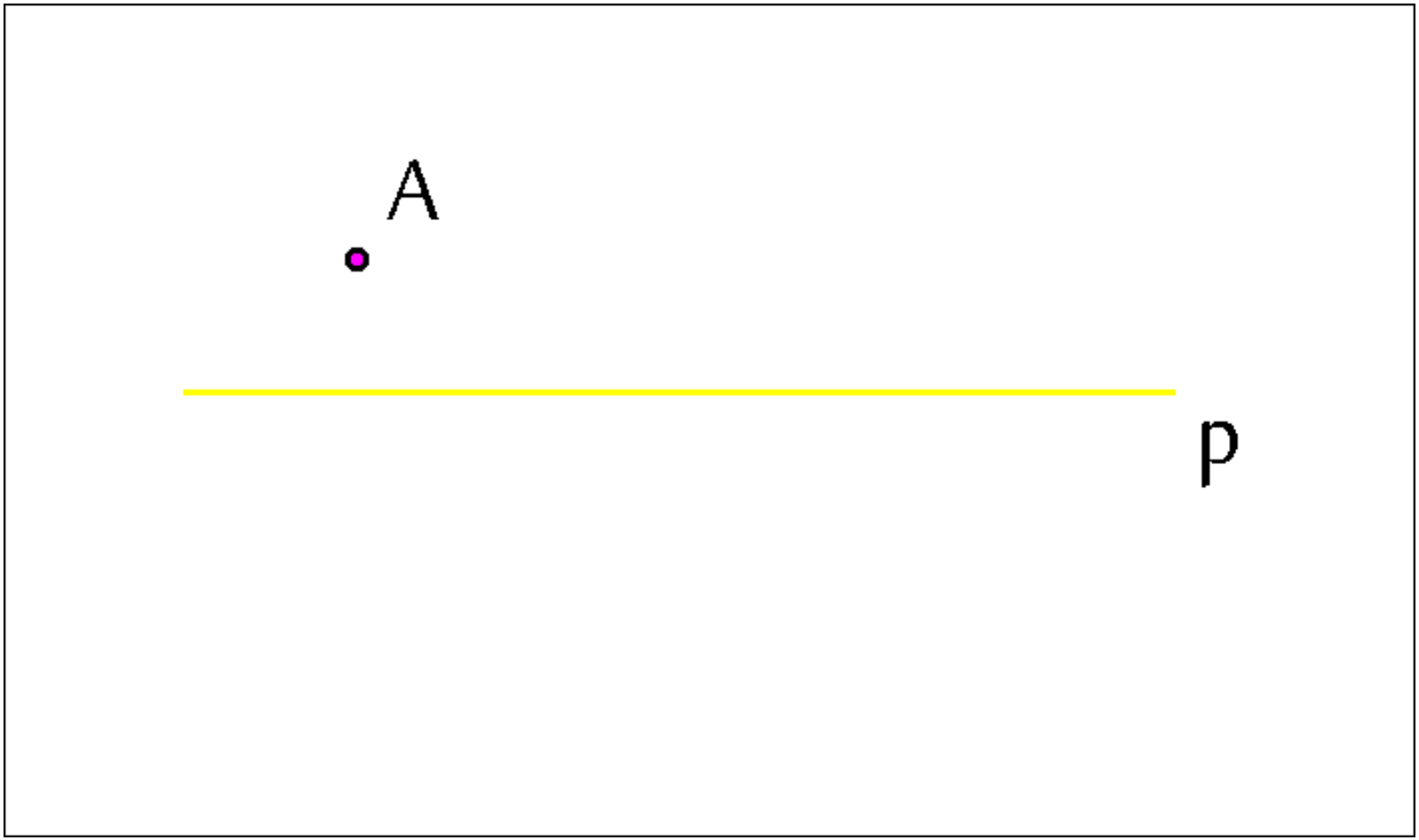
Postuláty

5. Jestliže přímka p protíná další dvě přímky q a r a vytváří s nimi na své jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší, než dva úhly pravé, pak se na této straně přímky p přímky q a r protínají.
5. Každým bodem A, který neleží na přímce p je možné vést jedinou přímku ležící ve stejné rovině jako p, která nemá s p společný bod.

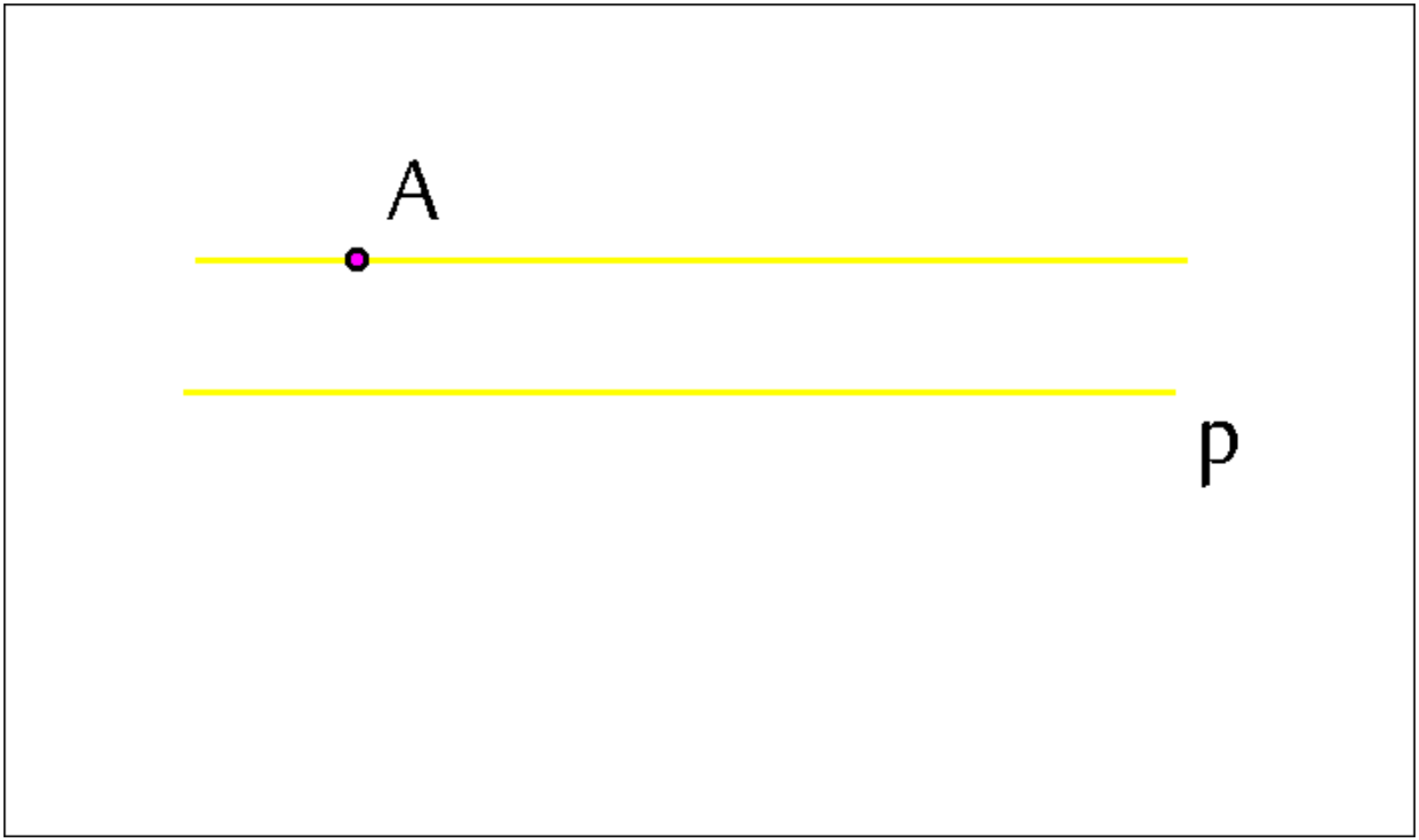
Postuláty



Postuláty



Postuláty



Axiomatická výstavba matematických teorií

Axiomatická výstavba matematických teorií

1. Vybereme **základní pojmy** - nedefinujeme je - a **relace** mezi nimi.

Axiomatická výstavba matematických teorií

1. Vybereme **základní pojmy** - nedefinujeme je - a **relace** mezi nimi.

☺ „Musí být možné nahradit ve všech geometrických větách slova bod, přímka, rovina slovy stůl, židle, hrnek.“ (David Hilbert)

Axiomatická výstavba matematických teorií

1. Vybereme **základní pojmy** - nedefinujeme je - a **relace** mezi nimi.

☺ „Musí být možné nahradit ve všech geometrických větách slova bod, přímka, rovina slovy stůl, židle, hrnek.“ (David Hilbert)

2. Vlastnosti těchto relací popíšeme v soustavě **axiomů**.

Axiomatická výstavba matematických teorií

1. Vybereme **základní pojmy** - nedefinujeme je - a **relace** mezi nimi.

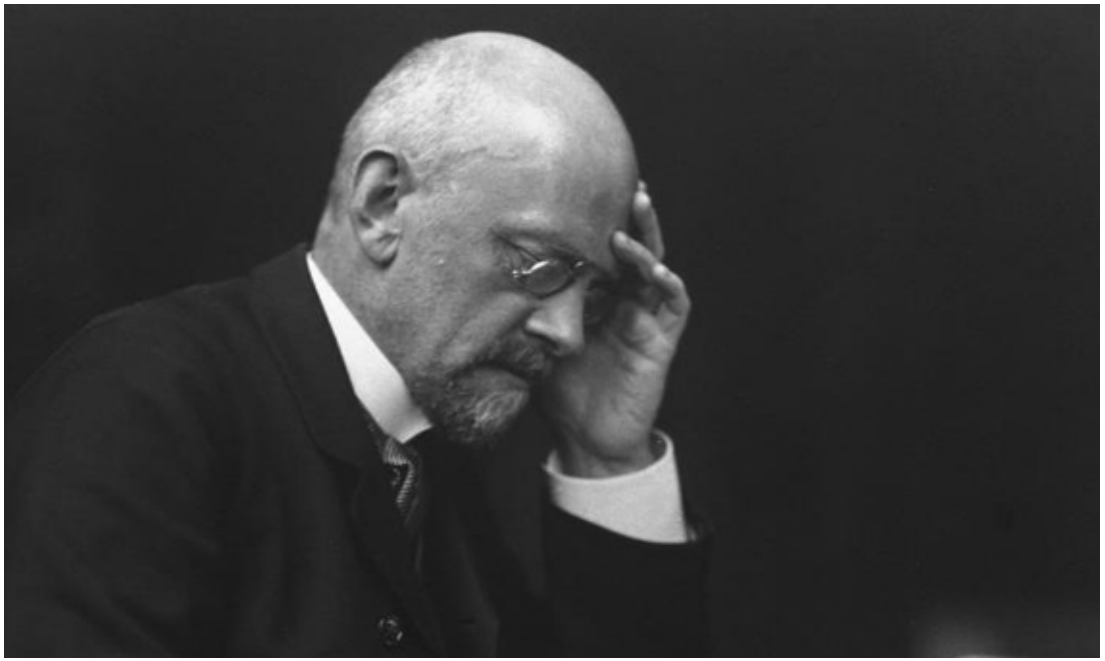
☺ „Musí být možné nahradit ve všech geometrických větách slova bod, přímka, rovina slovy stůl, židle, hrnek.“ (David Hilbert)

2. Vlastnosti těchto relací popíšeme v soustavě **axiomů**.
3. Všechny pojmy, které nejsou základní, musí být definovány pomocí pojmů a relací základních, nebo dříve definovaných.

Axiomatická výstavba matematických teorií

1. Vybereme **základní pojmy** - nedefinujeme je - a **relace** mezi nimi.
   ☺ „Musí být možné nahradit ve všech geometrických větách slova bod, přímka, rovina slovy stůl, židle, hrnek.“ (David Hilbert)
2. Vlastnosti těchto relací popíšeme v soustavě **axiomů**.
3. Všechny pojmy, které nejsou základní, musí být definovány pomocí pojmů a relací základních, nebo dříve definovaných.
4. Všechna další tvrzení, **matematické věty**, musí býti odvozeny z axiomů a dříve dokázaných vět jen pomocí daných logických zákonů.

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)



Obrázek: David Hilbert

23. ledna 1862 – 14. února 1943

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.
   - **Přímka** - množinu všech přímek budeme značit $\mathbb{P}$.

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.
   - **Přímka** - množinu všech přímek budeme značit $\mathbb{P}$.
   - **Rovina** - množinu všech rovin budeme značit $\mathbb{R}$

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.
   - **Přímka** - množinu všech přímek budeme značit $\mathbb{P}$.
   - **Rovina** - množinu všech rovin budeme značit $\mathbb{R}$
2. a relací:

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.
   - **Přímka** - množinu všech přímek budeme značit $\mathbb{P}$.
   - **Rovina** - množinu všech rovin budeme značit $\mathbb{R}$
2. a relací:
   - **Incidence bodu a přímky** a **incidence bodu a roviny** - budeme značit stejně $\in$. Pozor! Stejně značíme i relaci: "prvek náleží do množiny".

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.
   - **Přímka** - množinu všech přímek budeme značit $\mathbb{P}$.
   - **Rovina** - množinu všech rovin budeme značit $\mathbb{R}$
2. a relací:
   - **Incidence bodu a přímky** a **incidence bodu a roviny** - budeme značit stejně $\in$. Pozor! Stejně značíme i relaci: "prvek náleží do množiny".
   - **Uspořádání** tří bodů - značíme $\mu(A, B, C)$, čteme B leží mezi A a C.

Teorie Euklidovské geometrie podle Hilberta (1899 - Grundlagen der Geometrie)

1. Vychází ze tří nedefinovaných pojmů:
   - **Bod** - množinu všech bodů budeme značit $\mathbb{B}$.
   - **Přímka** - množinu všech přímek budeme značit $\mathbb{P}$.
   - **Rovina** - množinu všech rovin budeme značit $\mathbb{R}$
2. a relací:
   - **Incidence bodu a přímky** a **incidence bodu a roviny** - budeme značit stejně $\in$. Pozor! Stejně značíme i relaci: "prvek náleží do množiny".
   - **Uspořádání** tří bodů - značíme $\mu(A, B, C)$, čteme B leží mezi A a C.
   - **Shodnost úseček** a **shodnost úhlů** - budeme značit stejně: $\cong$

Axiomy incidence

I_1 $\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B \; \exists! p \in \mathbb{P} : A \in p \wedge B \in p$
Přímku p pak značíme AB.

I_2 $\forall p \in \mathbb{P} \; \exists A, B \in \mathbb{B}, \; A \neq B : A \in p \wedge B \in p$

I_3 $\exists A, B, C \in \mathbb{B}, \; A \neq B \neq C \neq A : A \notin BC$

I_4 $\forall A, B, C \in \mathbb{B}, \; A \neq B \neq C \neq A, \; A \notin BC \; \exists! \rho \in \mathbb{R} : A, B, C \in \rho$
Rovinu ρ pak značíme ABC.

I_5 $\forall \rho \in \mathbb{R} \; \exists A \in \mathbb{B} : A \in \rho$

I_6 $(A \neq B \wedge A, B \in p \wedge A, B \in \rho) \Rightarrow (C \in p \Rightarrow C \in \rho)$

I_7 $(A \in \rho \wedge A \in \sigma, \; \rho \neq \sigma) \Rightarrow \exists B \in \mathbb{B}, \; B \neq A : (B \in \rho \wedge B \in \sigma)$

I_8 $\exists A, B, C, D \in \mathbb{B} : D \notin ABC$

1. axiom incidence

1. axiom incidence

$\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B$

1. axiom incidence

$$\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B \quad \exists! p \in \mathbb{P} : A \in p \wedge B \in p$$

1. axiom incidence

$\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B \quad \exists! p \in \mathbb{P} : A \in p \wedge B \in p$

Přímku p pak značíme AB.

2. axiom incidence

2. axiom incidence

$\forall p \in \mathbb{P}$

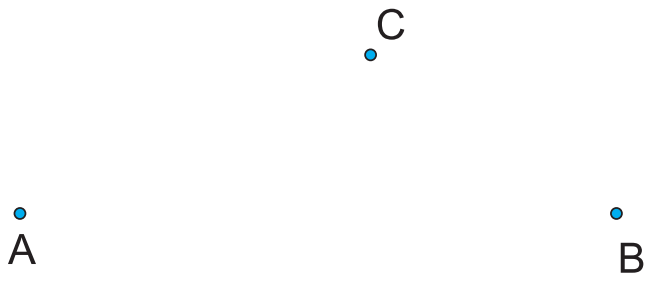
2. axiom incidence

$$\forall p \in \mathbb{P} \quad \exists A, B \in \mathbb{B},\ A \neq B \ : \ A \in p \ \wedge \ B \in p$$

3. axiom incidence

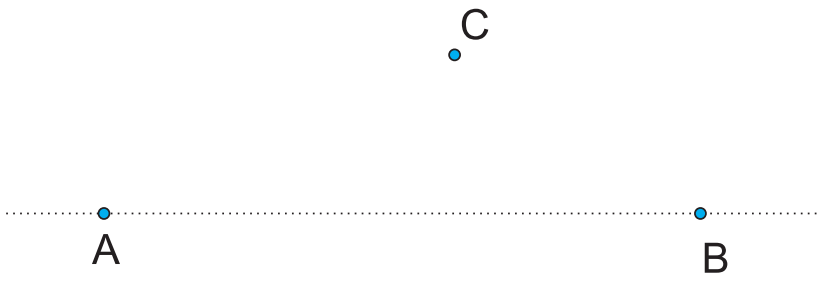
3. axiom incidence

$\exists A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A$



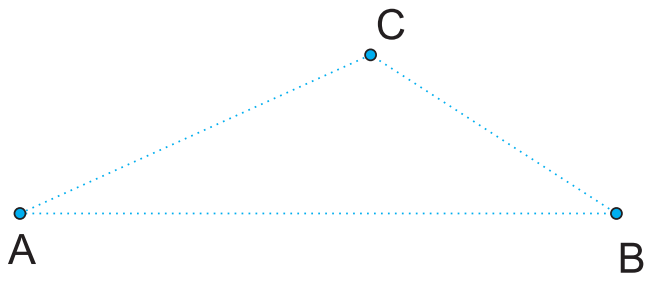
3. axiom incidence

$$\exists A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A \quad C \notin AB$$



3. axiom incidence

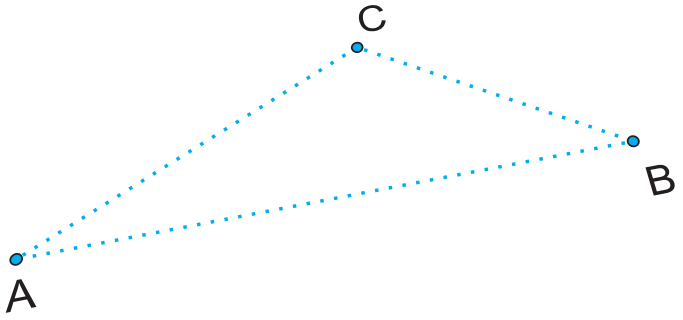
$$\exists A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A \quad C \notin AB$$



4. axiom incidence

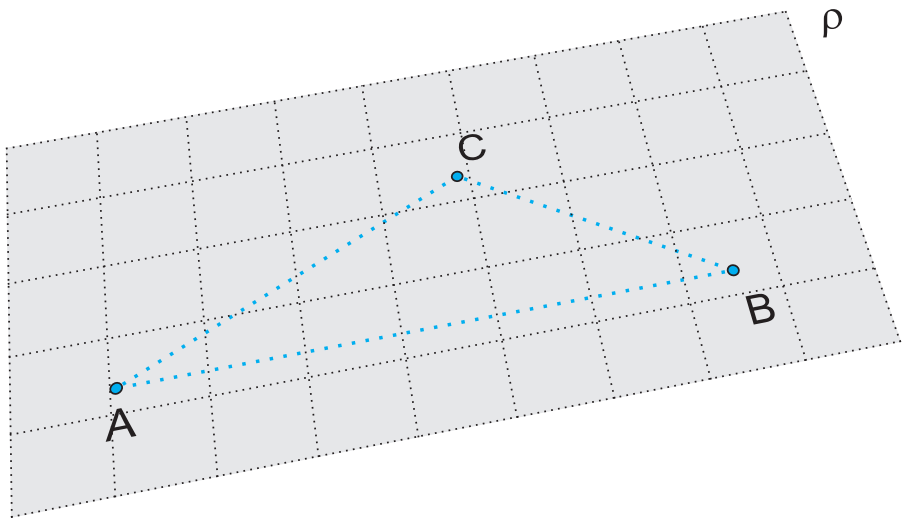
4. axiom incidence

$$\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \notin BC$$



4. axiom incidence

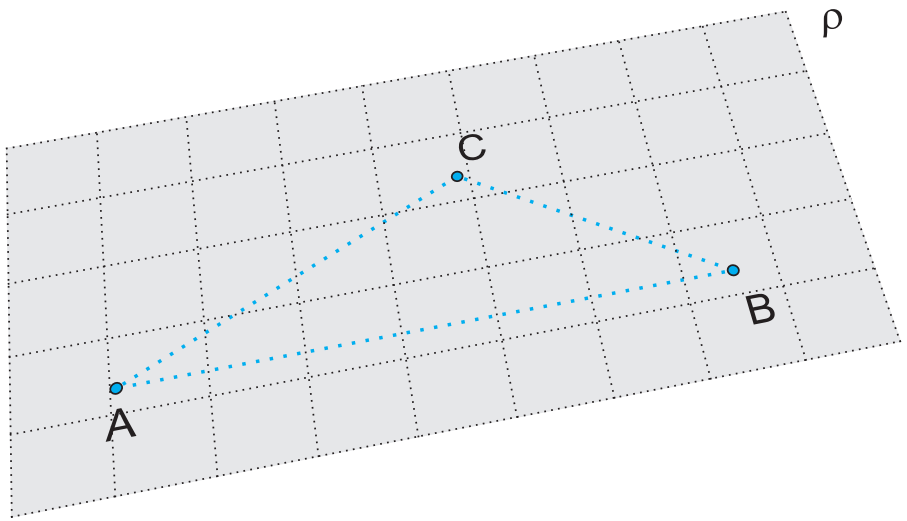
$$\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \notin BC \quad \exists! \rho \in \mathbb{R} : A, B, C \in \rho$$



4. axiom incidence

$\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \notin BC \quad \exists! \rho \in \mathbb{R} : A, B, C \in \rho$

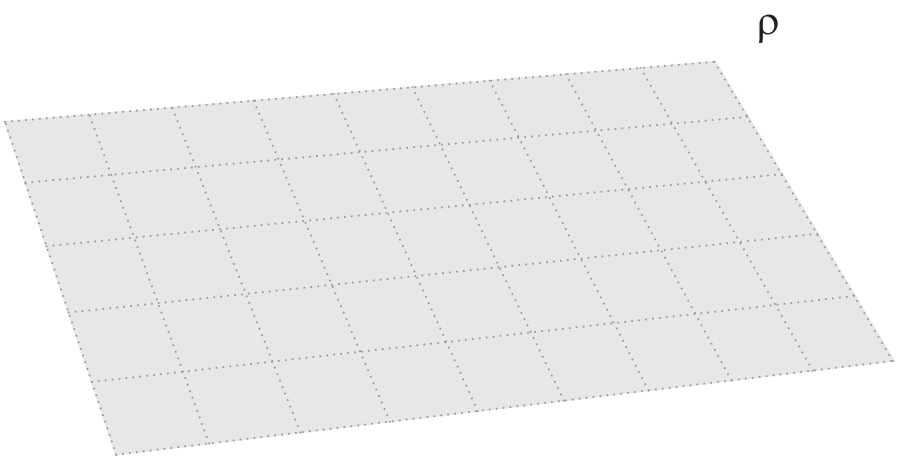
Rovinu ρ pak značíme ABC.



5. axiom incidence

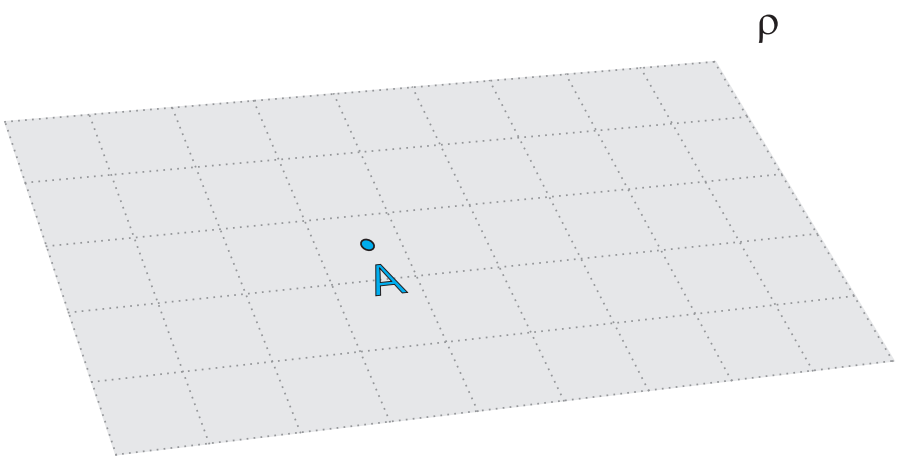
5. axiom incidence

$\forall \rho \in \mathbb{R}$



5. axiom incidence

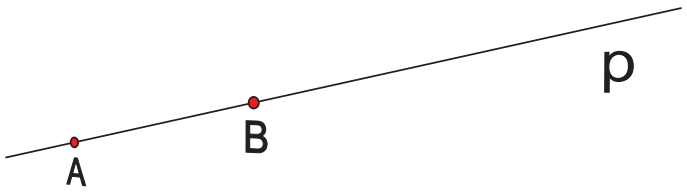
$$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{B} : A \in \rho$$



6. axiom incidence

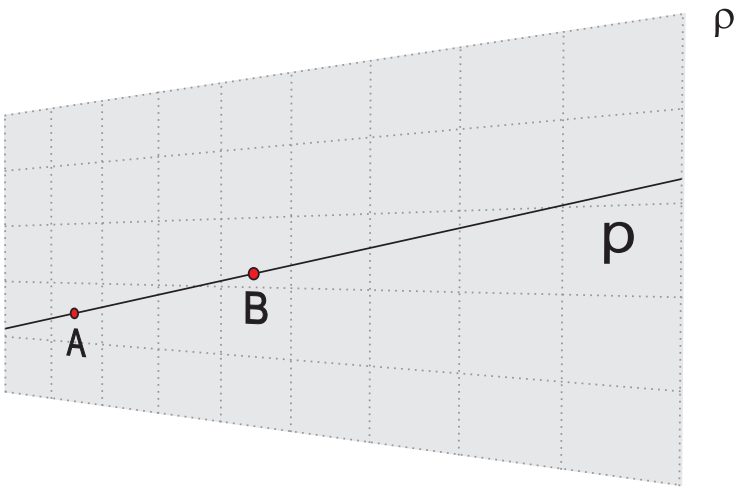
6. axiom incidence

$(A \neq B \wedge A, B \in p$



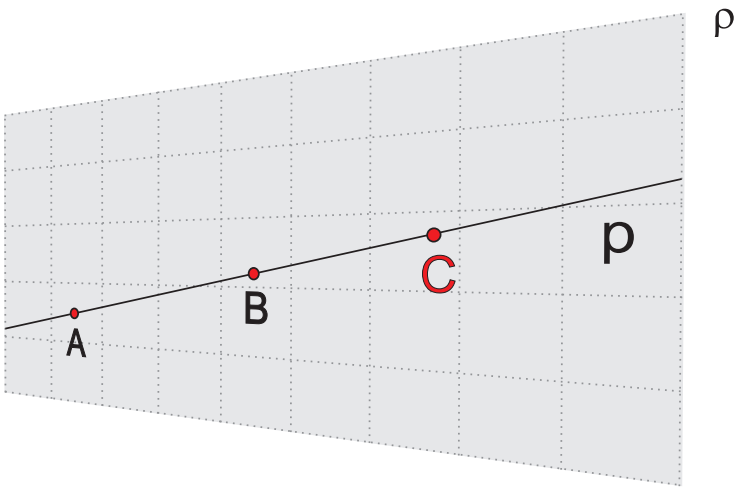
6. axiom incidence

$$(A \neq B \ \wedge \ A, B \in p \ \ \wedge A, B \in \rho)$$



6. axiom incidence

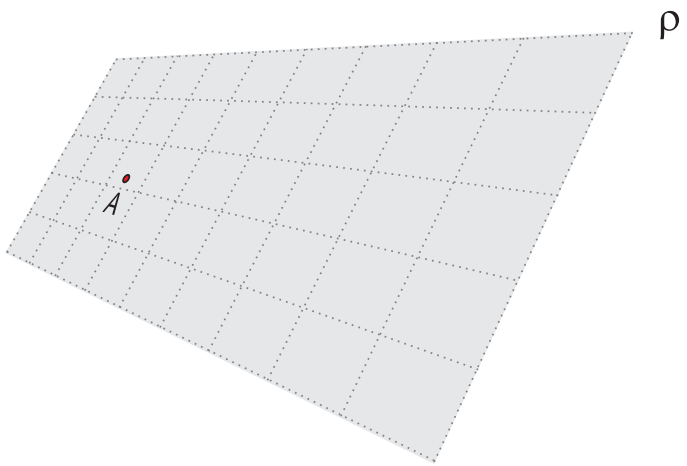
$$(A \neq B \ \wedge \ A, B \in p \ \wedge A, B \in \rho) \ \Rightarrow (C \in p \Rightarrow C \in \rho)$$



7. axiom incidence

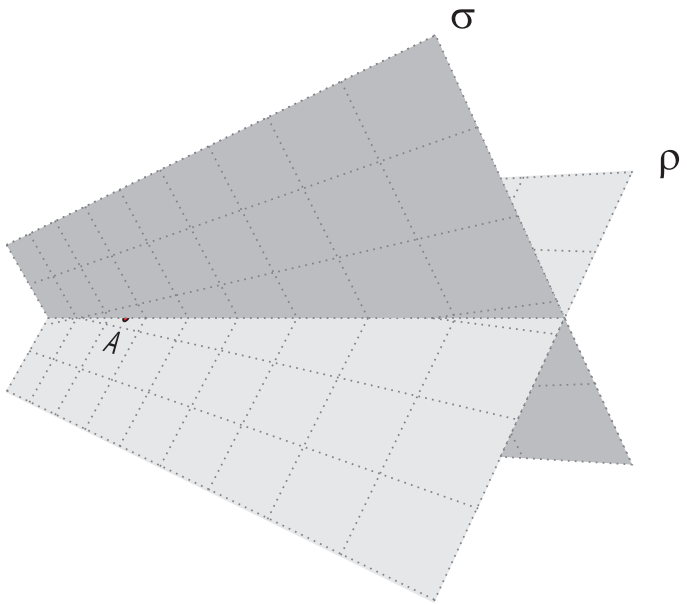
7. axiom incidence

$(A \in \rho$



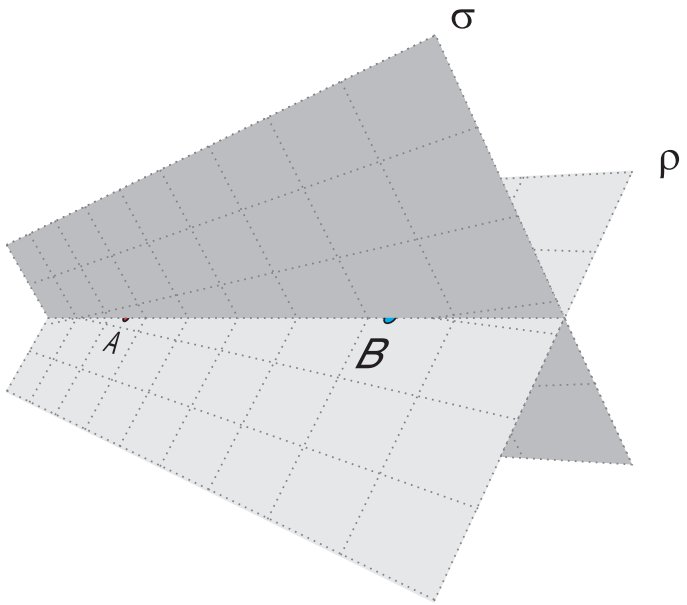
7. axiom incidence

$(A \in \rho \;\; A \in \sigma, \rho \neq \sigma)$



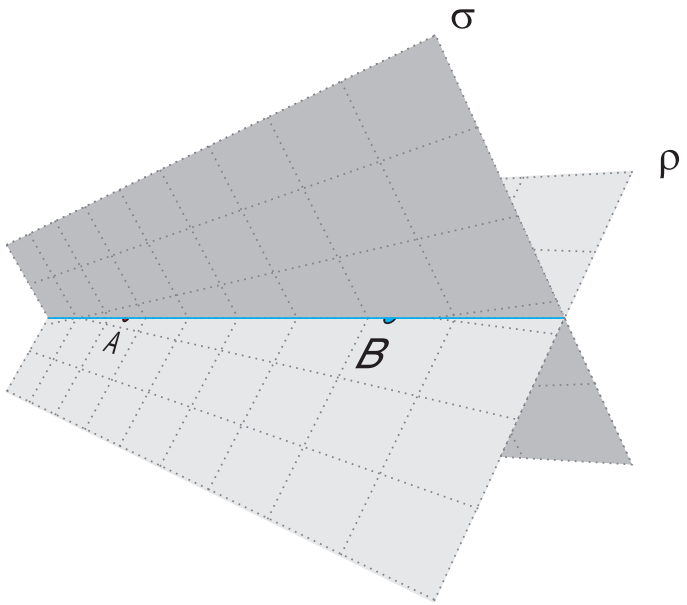
7. axiom incidence

$$(A \in \rho \;\; A \in \sigma,\, \rho \neq \sigma) \;\; \exists B \in \mathbb{B},\, B \neq A : (B \in \rho \wedge B \in \sigma)$$



7. axiom incidence

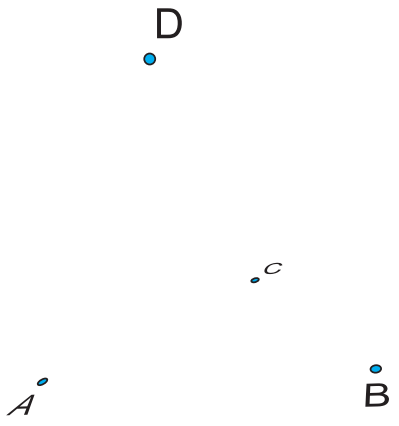
$$(A \in \rho \;\; A \in \sigma,\, \rho \neq \sigma) \;\; \exists B \in \mathbb{B},\, B \neq A : (B \in \rho \wedge B \in \sigma)$$



8. axiom incidence

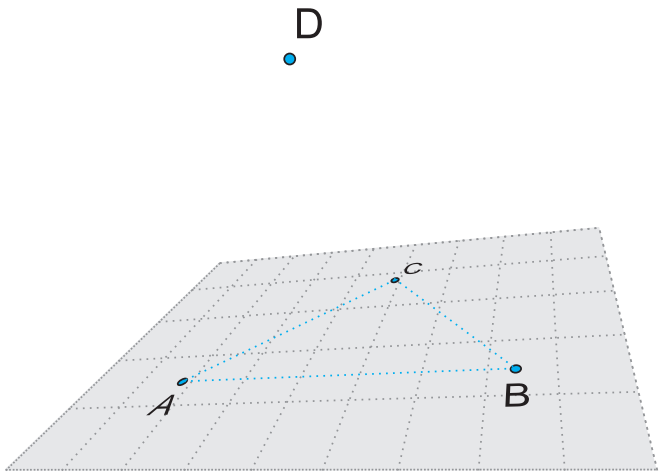
8. axiom incidence

$\exists A, B, C, D \in \mathbb{B}$



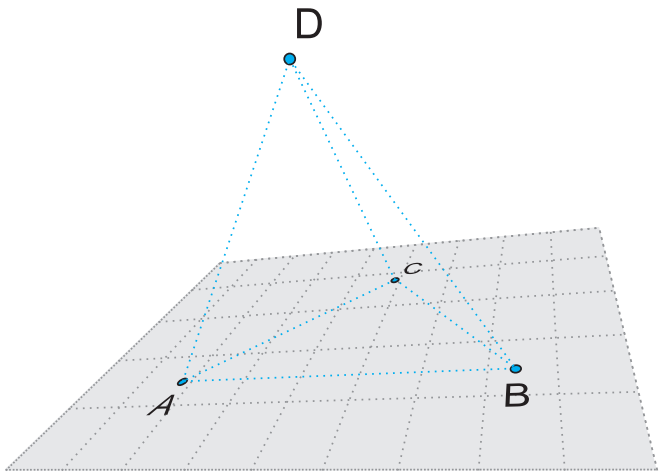
8. axiom incidence

$$\exists A, B, C, D \in \mathbb{B} \ : \ D \notin ABC$$



8. axiom incidence

$$\exists A, B, C, D \in \mathbb{B} \ : \ D \notin ABC$$



Axiomy uspořádání

U_1 $(A \neq B \neq C \neq A \wedge A \in BC) \Rightarrow (\mu(A,B,C) \Rightarrow \mu(C,B,A))$.

U_2 $\forall A, B \in \mathbb{B},\ A \neq B\ \exists C \in AB : \mu(ABC)$.

U_3 $\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \in BC : \mu(ABC) \Rightarrow$
$(not\mu(B,A,C) \wedge not\mu(A,C,B))$.

U_4 $\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ \forall p \in \mathbb{P},\ A, B, C \notin p :$
$(\exists X \in p : \mu(A,X,B)) \Rightarrow$
$((\exists Y \in p : \mu(A,Y,C)) \vee (\exists Z \in p : \mu(B,Z,C)))$.

U_5 $\forall A, B \in \mathbb{B},\ A \neq B\ \exists C \in AB : \mu(ABC)$.

Nové pojmy

Pomocí základních pojmů a axiomů incidence a uspořádání je možné definovat pojmy:
úsečka (značíme $\langle AB \rangle$), **polopřímka** (značíme OX^+), **polorovina**, **hraniční přímka poloroviny**, **úhel** (značíme $\sphericalangle AOB$), **konvexní úhel**, **trojúhelník**...

Axiomy shodnosti

S1 Pro každou úsečku $\langle AB \rangle$ a polopřímku OX^+ existuje bod $C \in OX^+$ takový, že $\langle AB \rangle \cong \langle OC \rangle$.

S2 $(\langle AB \rangle \cong \langle XY \rangle \wedge \langle CD \rangle \cong \langle XY \rangle) \Rightarrow \langle AB \rangle \cong \langle CD \rangle$.

S3 $(\mu(A_1, B_1, C_1) \wedge \mu(A_2, B_2, C_2) \wedge$
$\langle A_1 B_1 \rangle \cong \langle A_2 B_2 \rangle \wedge \langle B_1 C_1 \rangle \cong \langle B_2 C_2 \rangle) \Rightarrow \langle A_1 C_1 \rangle \cong \langle A_2 C_2 \rangle$.

S4 Pro každý úhel $\sphericalangle A_1 O_1 B_1$ a pro každou polopřímku $O_2 A_2^+$ existuje v dané polorovině s hraniční přímkou $O_2 A_2$ jediný bod B_2 takový, že $\sphericalangle A_1 O_1 B_1 = \sphericalangle A_2 O_2 B_2$.

S5 Nechť $\langle A_1 B_1 C_1 \rangle$ a $\langle A_2 B_2 C_2 \rangle$ jsou trojúhelníky. Potom platí:
$(\langle A_1 B_1 \rangle \cong \langle A_2 B_2 \rangle \wedge \langle A_1 C_1 \rangle \cong \langle A_2 C_2 \rangle \wedge \sphericalangle B_1 A_1 C_1 \cong \sphericalangle B_2 A_2 C_2) \Rightarrow$
$\sphericalangle A_1 B_1 C_1 \cong \sphericalangle A_2 B_2 C_2$

Nové pojmy

Pomocí základních pojmů a předcházejících axiomů je možné definovat relace:
větší (značíme >) jak pro úsečky, tak pro úhly.

Axiomy spojitosti

I. (Archimedův) $\forall \langle AB \rangle \, \forall \langle CD \rangle \, \exists n \in \mathbb{N}:$
   1) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in AB$
   2) $\langle A_1 A_2 \rangle \cong \langle A_2 A_3 \rangle \cong \ldots \langle A_{n-1} A_n \rangle \cong \langle CD \rangle$
   3) $\mu(A, A_1, A_2)$, $\mu(A_1, A_2, A_3)$, $\ldots$, $\mu(A_{n-2}, A_{n-1}, A_n)$,
   4) $\mu(A, B, A_n)$

II. (Cantorův) Nechť je dána přímka p a na ní nekonečná posloupnost úseček $\langle A_1 B_1 \rangle$, $\langle A_2 B_2 \rangle$, $\ldots$, které splňují následující podmínky:
   1) Každá následující úsečka je částí předcházející úsečky.
   2) Pro každou úsečku $\langle CD \rangle$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\langle CD \rangle > \langle A_n B_n \rangle$.

   Pak existuje bod $X \in p$ takový, že $\forall i \in \mathbb{N} : M \in \langle A_i B_i \rangle$.

Axiom rovnoběžnosti

R_1 (Euklidův V. postulát) Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.

Axiom rovnoběžnosti

R_1 (Euklidův V. postulát) Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.

Axiom rovnoběžnosti

R_1 (Euklidův V. postulát) Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.

Geometrii ve které neplatí Euklidův pátý postulát nazveme
NEEUKLIDOVSKOU GEOMETRIÍ

Axiomatika Euklidovské geometrie podle Weyla

Nechť $\mathbf{V}^n = (V^n, +, \cdot)$ je n-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (prvky množiny V^n nazýváme **vektory**, $\mathbb{B}$ neprázdná množina(její prvky budeme nazývat **body**) a $- : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \mapsto V^n$ splňující axiomy:

W1 $\forall X \in \mathbb{B}\, \forall \mathbf{u} \in V^n\, \exists!\, Y \in \mathbb{B} : Y - X = \mathbf{u}$(místo $-(Y, X)$ píšeme $Y - X$)

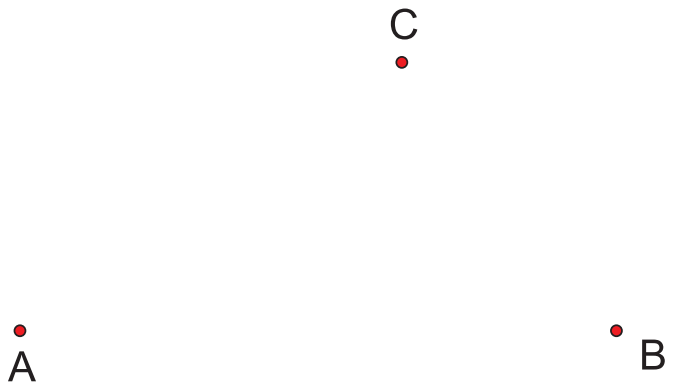
W2 $\forall X, Y, Z \in \mathbb{B} : (Z - Y) + (Y - X) = Z - X$

W3 Existuje symetrická pozitivně definitní bilineární forma $g : V^n \times V^n \mapsto \mathbb{R}$. Číslo $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nazýváme skalárním součinem vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$

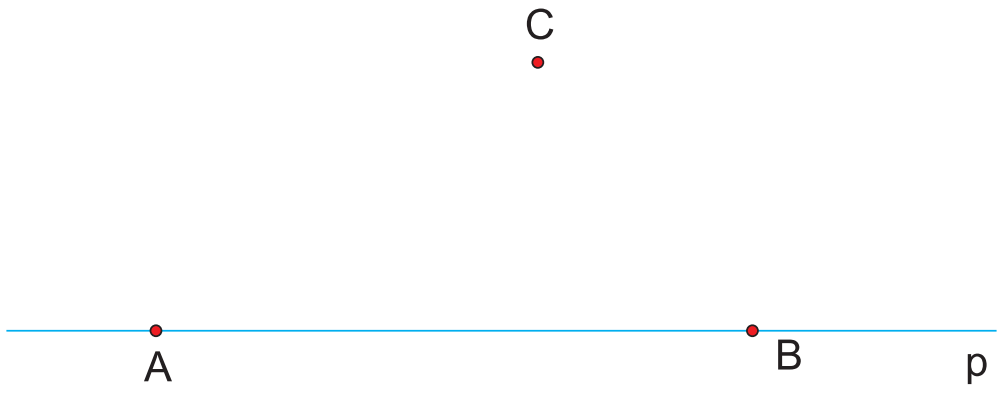
Potom uspořádanou trojici $\mathbf{E}^n = (\mathbb{B}, \mathbf{V}^n, -)$ nazveme **n-dimenzionálním Euklidovským prostorem** . **Přímkou** nazveme množinu $\{X \in \mathbb{B} \mid X - A = k\mathbf{u},\ k \in \mathbb{R}\}$. **Rovinou** nazveme množinu $\{X \in \mathbb{B} \mid X - A = k\mathbf{u} + s\mathbf{v},\ k, s \in \mathbb{R}\}$.

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině

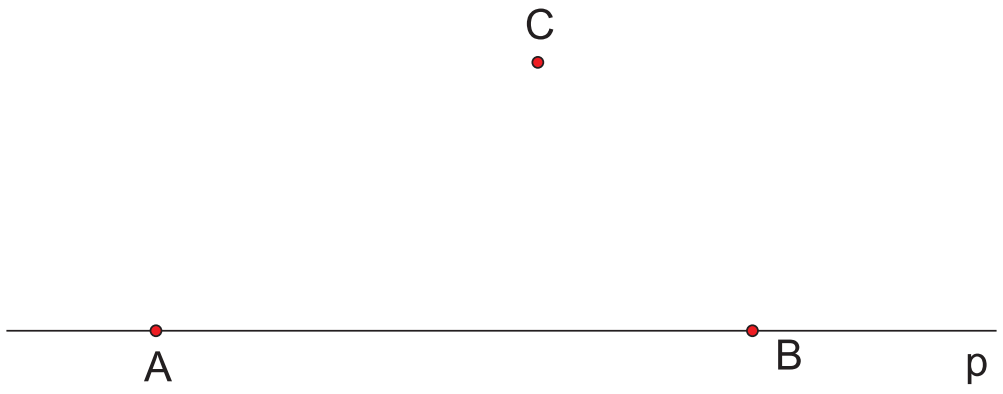
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



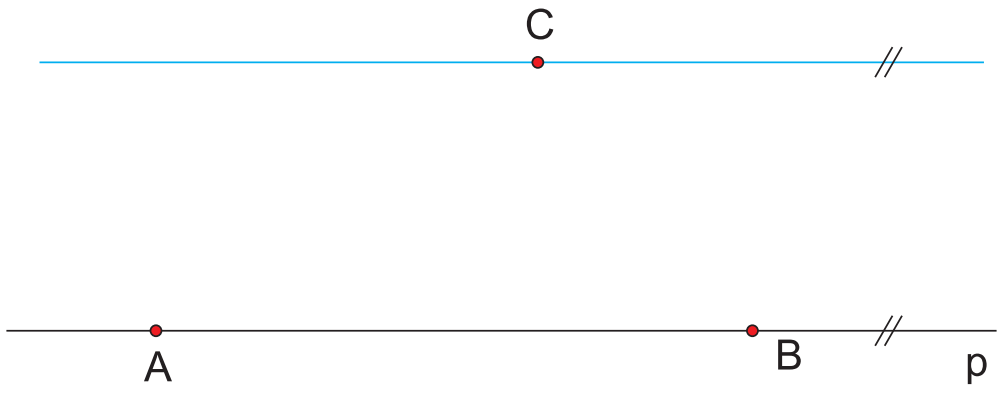
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



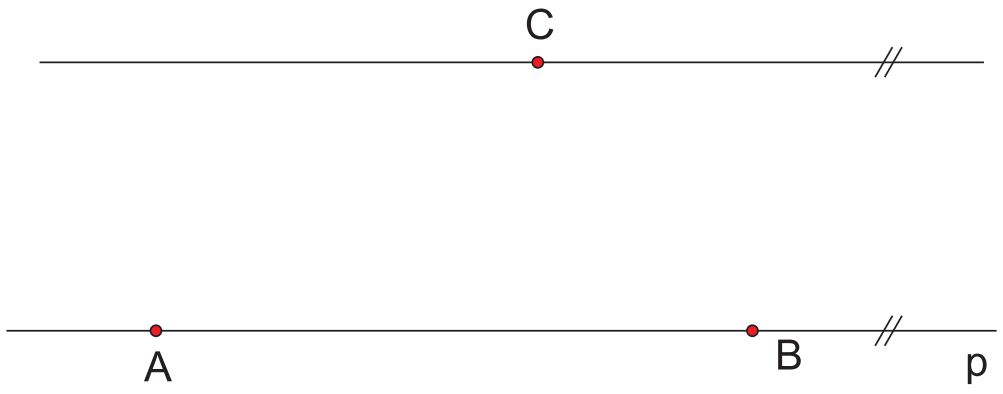
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



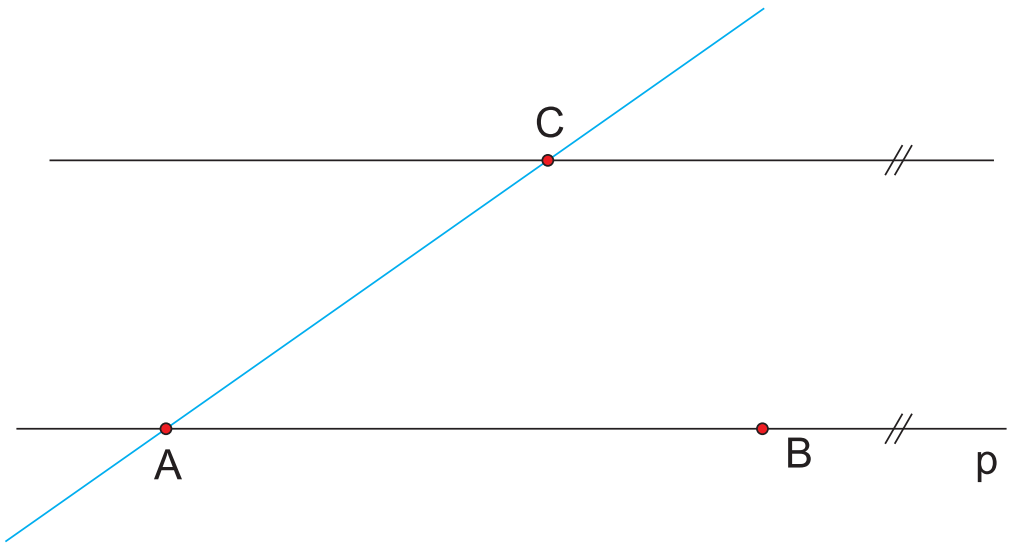
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



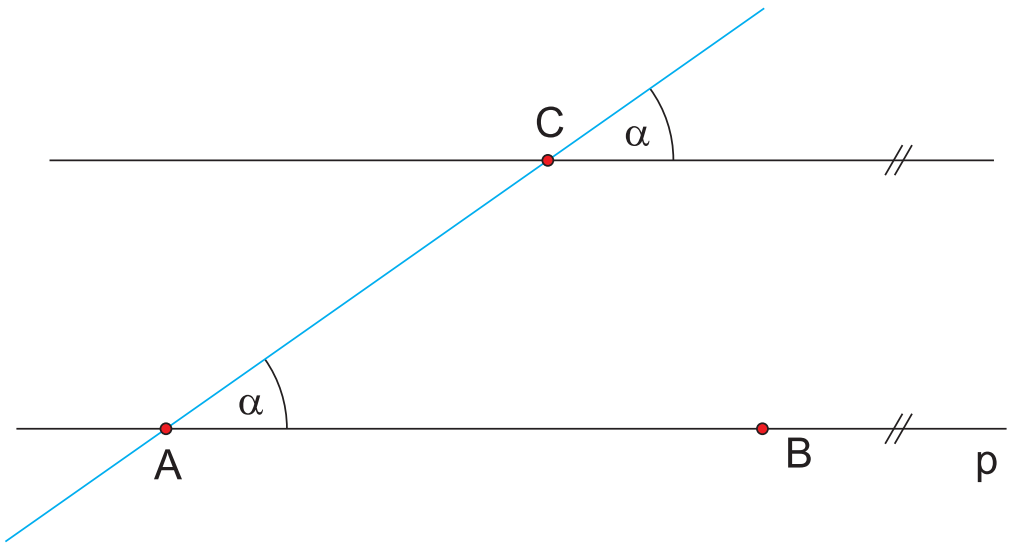
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



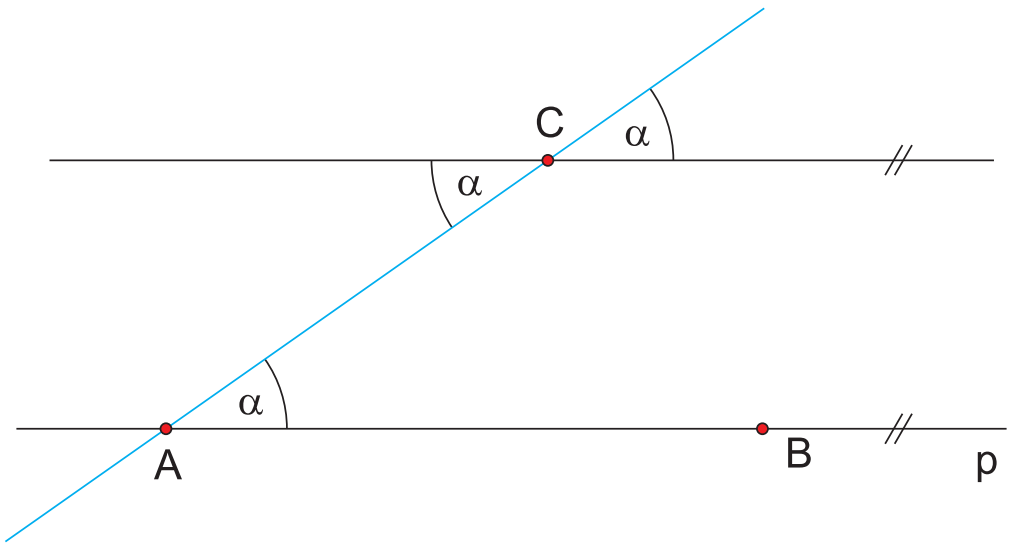
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



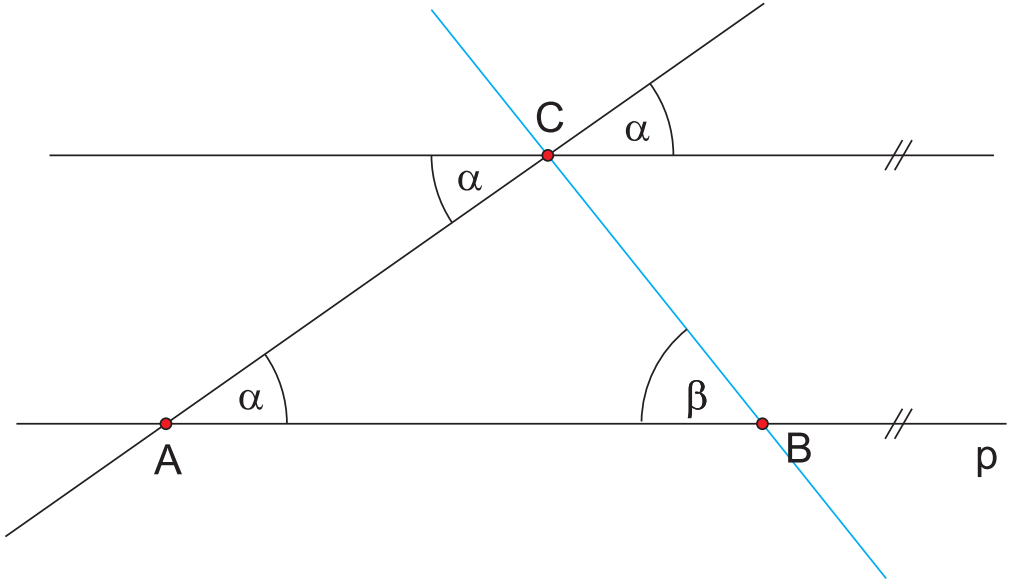
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



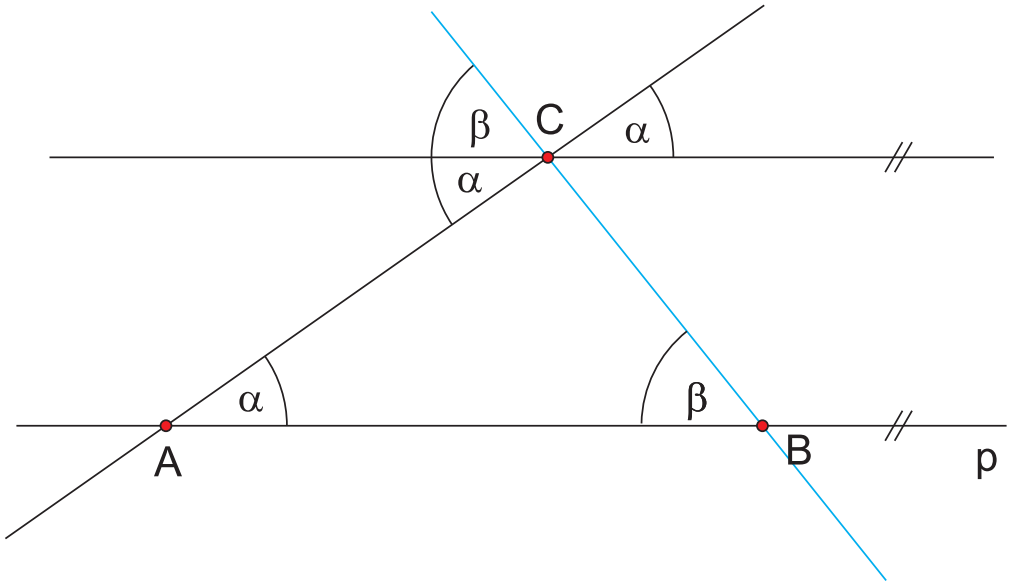
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



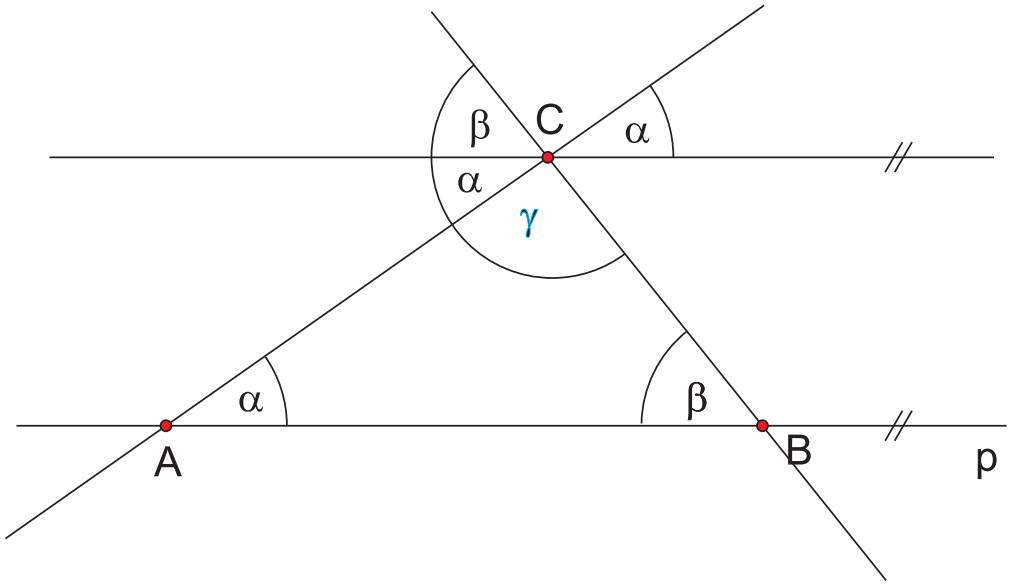
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



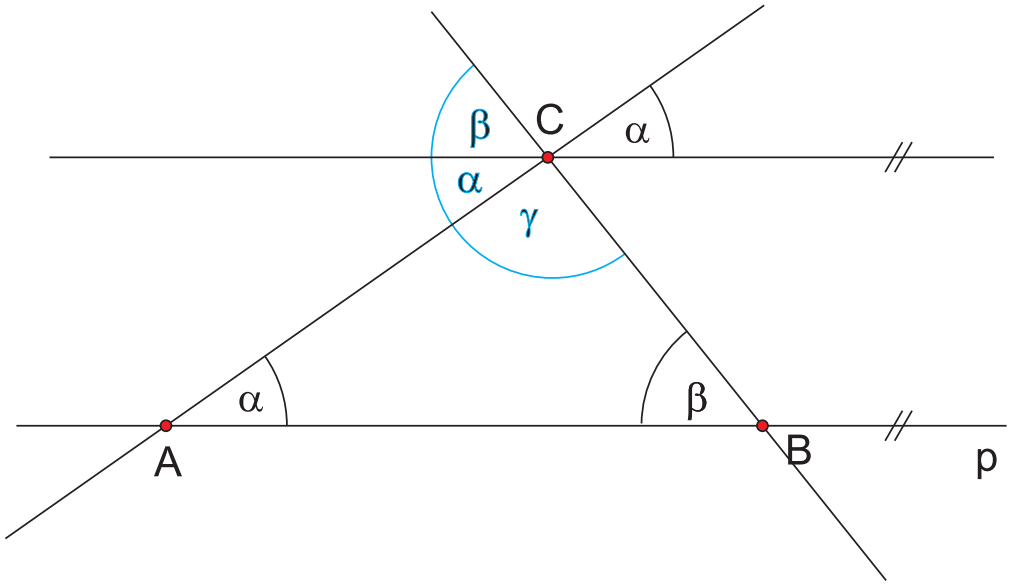
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



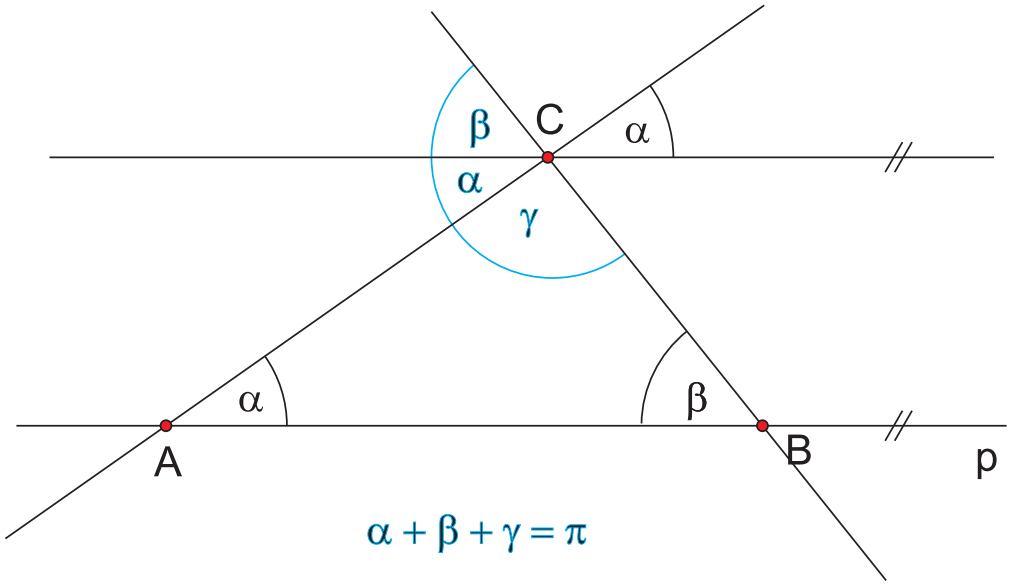
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



Součet vnitřních úhlů trojúhelníku v Euklidovské rovině



Od soustavy axiomů vyžadujeme bezespornost.

Od soustavy axiomů vyžadujeme bezespornost. Nesmí z ní být možno odvodit výrok **V** a zároveň **V´**.

Od soustavy axiomů vyžadujeme bezespornost. Nesmí z ní být možno odvodit výrok **V** a zároveň **V´**. Bezespornost ověříme konstrukcí **modelu**. Najdeme matematické "objekty,"které vyhovují soustavě axiomů.

Model Euklidovské geometrie - Reálný aritmetický model

Model Euklidovské geometrie - Reálný aritmetický model

- **Množina bodů** modelu $\mathbb{B} = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Model Euklidovské geometrie - Reálný aritmetický model

- **Množina bodů** modelu $\mathbb{B} = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- **Rovina** modelu $p = \{[x, y, z] \in \mathbb{B} \mid ax + by + cz = 0\}$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, $(a_1, b_1, c_1) \neq k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R}$

Model Euklidovské geometrie - Reálný aritmetický model

- **Množina bodů** modelu $\mathbb{B} = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- **Rovina** modelu $p = \{[x, y, z] \in \mathbb{B} \mid ax + by + cz = 0\}$, kde $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, $(a_1, b_1, c_1) \neq k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R}$
- **Přímka** modelu $p = \{[x, y, z] \in \mathbb{B} \mid a_1x + b_1y + c_1z = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z = 0\}$, kde $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, $(a_1, b_1, c_1) \neq k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R}$

Model Euklidovské roviny - Reálný aritmetický model

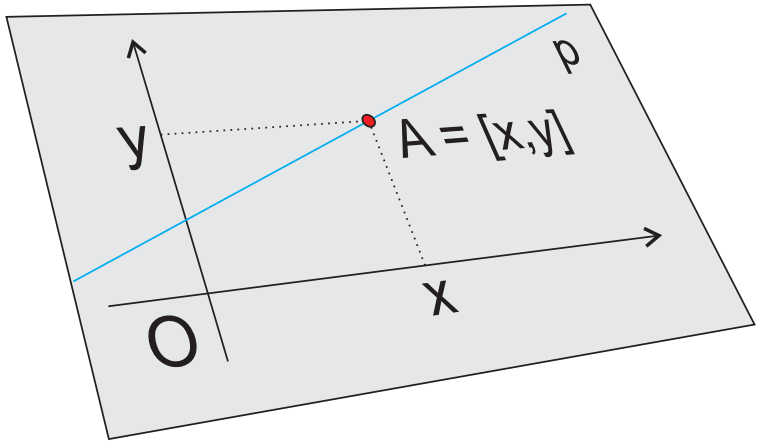
Model Euklidovské roviny - Reálný aritmetický model

- **Množina bodů** roviny $\mathbb{B} = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Model Euklidovské roviny - Reálný aritmetický model

- **Množina bodů** roviny $\mathbb{B} = \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- **Přímka** roviny $p = \{[x, y] \in \mathbb{B} \mid ax + by = 0\}$, kde $(a, b) \in \mathbb{R}^2\{(0, 0)\}$

Model Euklidovské roviny - Reálný aritmetický model



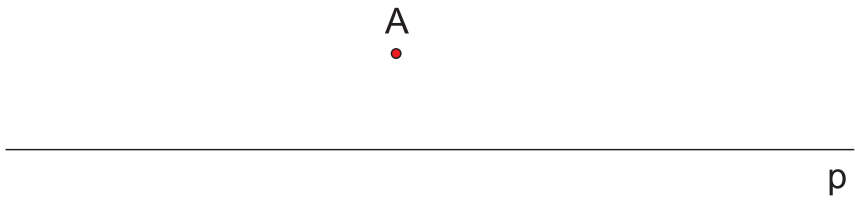
Obrázek: Euklidovská rovina

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

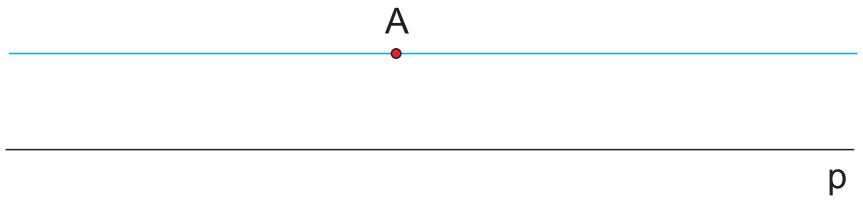
1. prosince 1792 – 24. února 1856

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

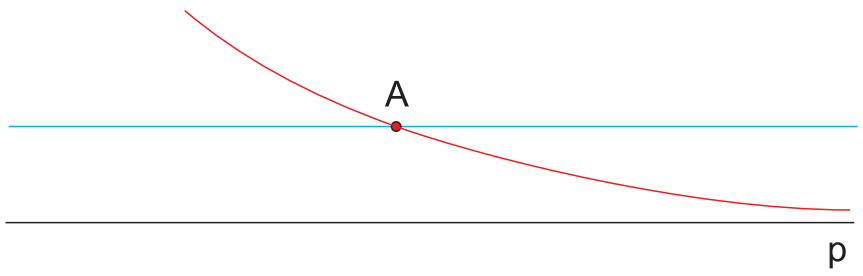
Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?



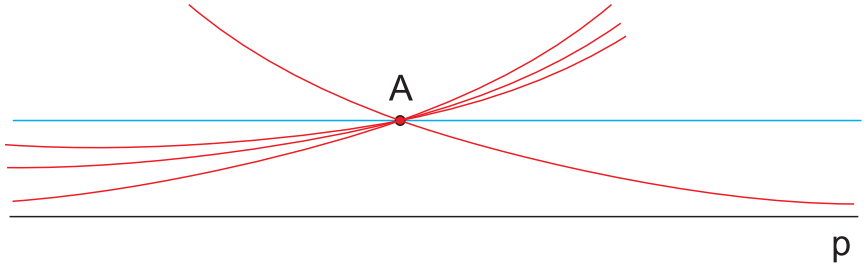
Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?



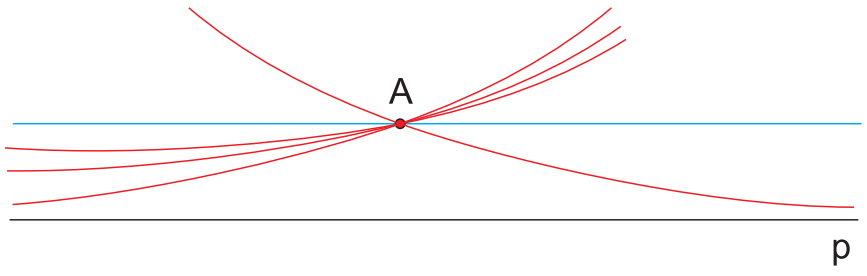
Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?



Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?



Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?



Lobačevského axiom: L: Existují přímka p a bod A, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem A neprotínají přímku p.

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Axiomy hyperbolické geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
L

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Existuje model $\Rightarrow$ je to bezesporná soustava.

Axiomy hyperbolické geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
L

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Existuje model $\Rightarrow$ je to bezesporná soustava.

Axiomy hyperbolické geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
L

Předpokládejme, že je možné z $A_1, \ldots, A_n$ odvodit R.

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Axiomy hyperbolické geometrie

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad R$$

L

Předpokládejme, že je možné z $A_1, \ldots, A_n$ odvodit R.

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Axiomy hyperbolické geometrie

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad R$$

L

Dostáváme tak spor $R \wedge L$.

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Axiomy hyperbolické geometrie

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad R$$

L

Dostáváme tak spor $R \wedge L$.

Pokud je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů, musí být hyperbolická geometrie sporná!

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

Axiomy hyperbolické geometrie

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \Rightarrow R$$

L

Pokud je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů, musí být hyperbolická geometrie sporná! Nemůže existovat model hyperbolické geometrie!

Je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů?

Axiomy Euklidovské geometrie

A_1
A_2
$\vdots$
A_n
R

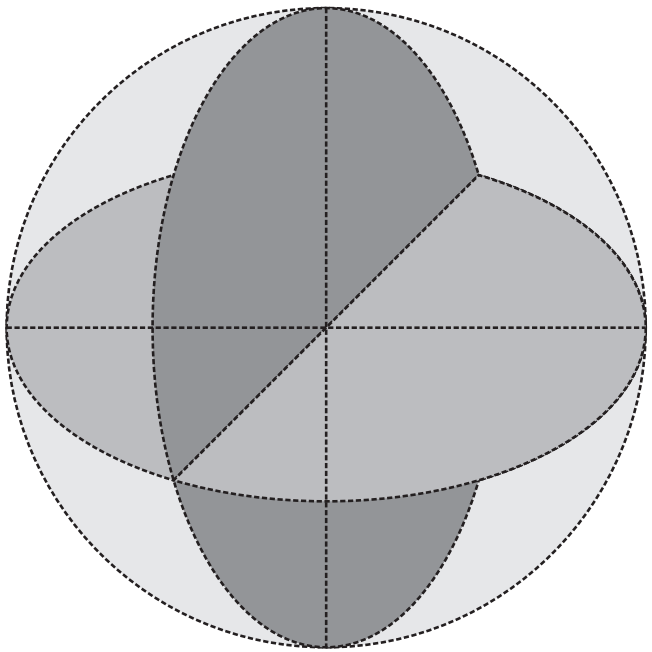
Axiomy hyperbolické geometrie

$$\left.\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right\} \Rightarrow R$$

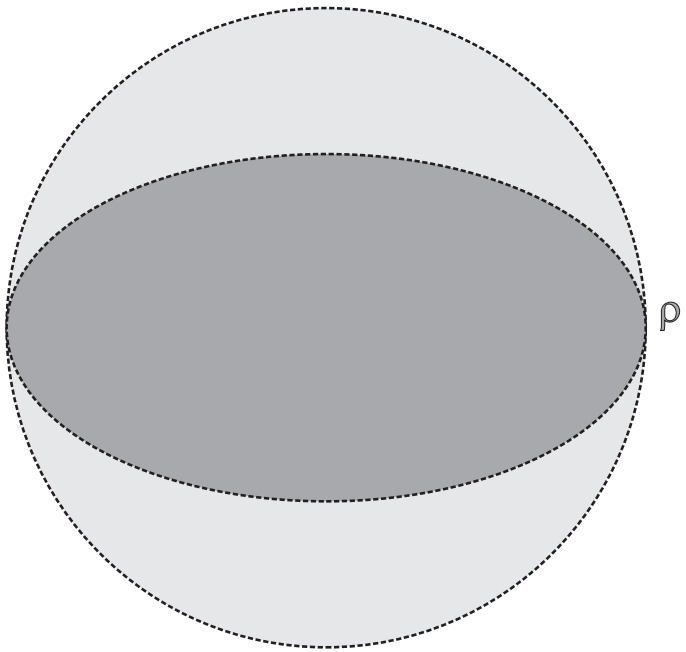
L

Pokud je možné Euklidův pátý postulát odvodit z ostatních axiomů, musí být hyperbolická geometrie sporná! Nemůže existovat model hyperbolické geometrie! My jej ale zkonstruujeme!

Beltrami-Kleinův model

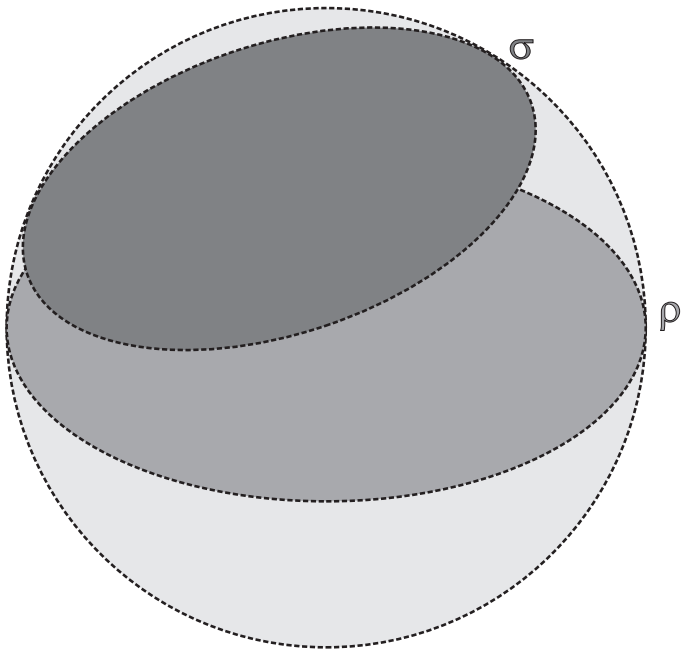


Beltrami-Kleinův model



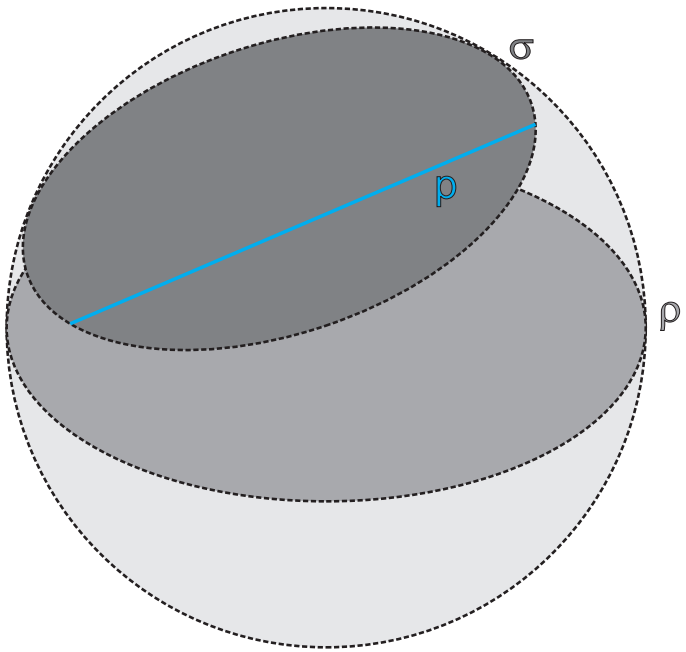
Rovinami modelu jsou kruhy vzniklé jako řezy koule Euklidovskými rovinami.

Beltrami-Kleinův model



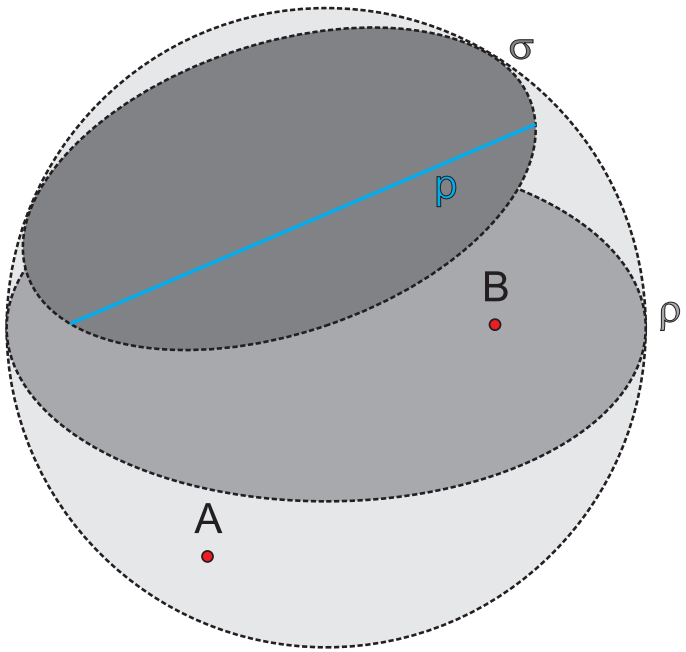
Rovinami modelu jsou kruhy vzniklé jako řezy koule Euklidovskými rovinami.

Beltrami-Kleinův model



Rovinami modelu jsou kruhy vzniklé jako řezy koule Euklidovskými rovinami. Přímkami modelu jsou tětivy těchto kruhů.

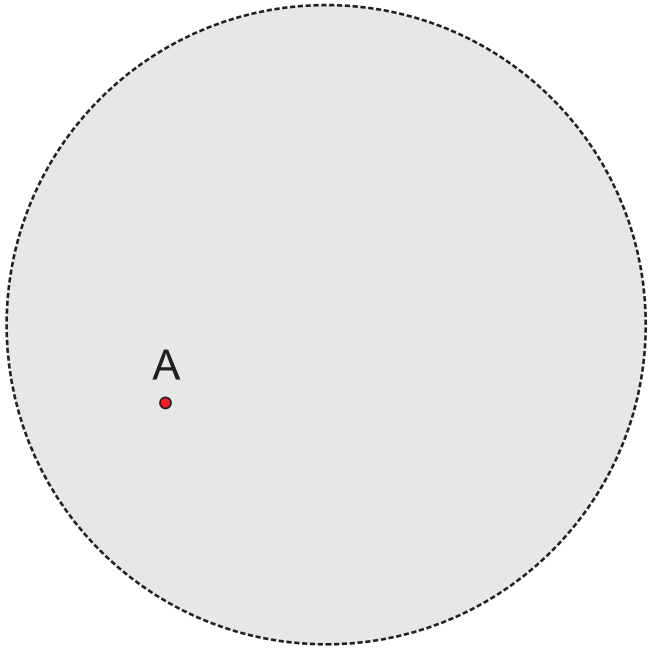
Beltrami-Kleinův model



Rovinami modelu jsou kruhy vzniklé jako řezy koule Euklidovskými rovinami. Přímkami modelu jsou tětivy těchto kruhů. Vlastními body modelu jsou Euklidovské body ležící uvnitř koule, body na jejím povrchu nazýváme nevlastními body modelu.

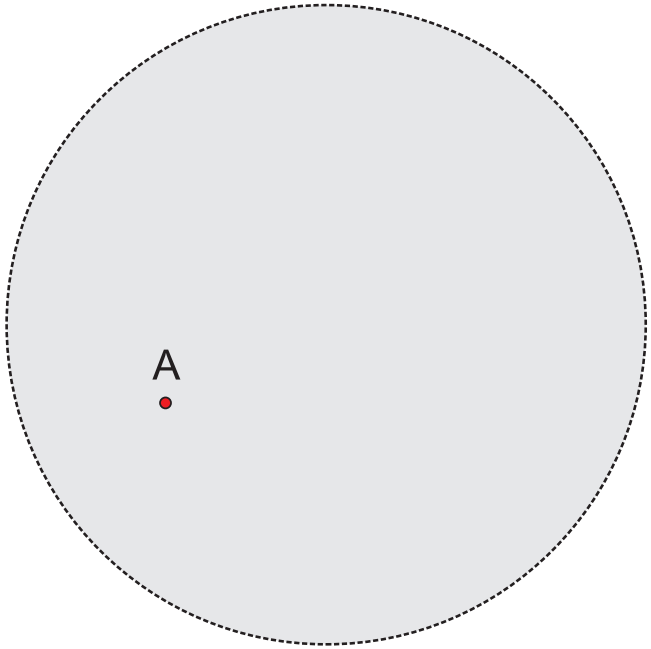
Beltrami-Kleinův model roviny

Beltrami-Kleinův model roviny



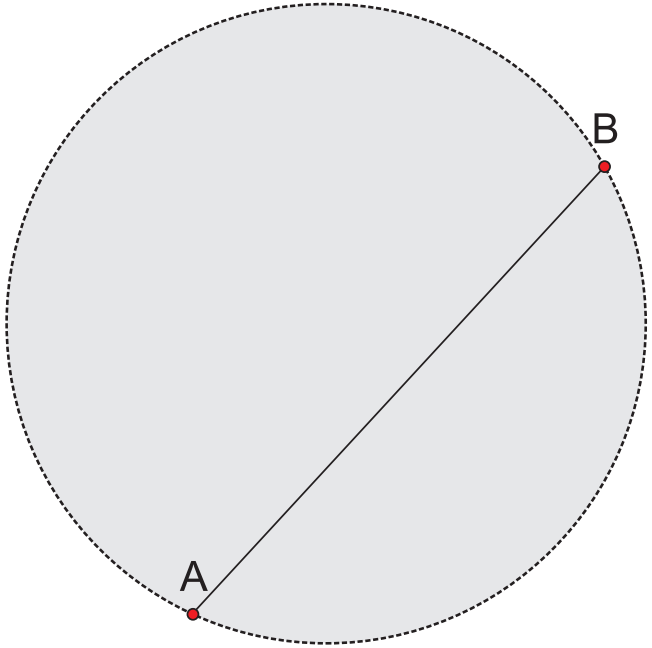
Body hyperbolické roviny jsou body ležící uvnitř kružnice. Tzv. vlastní body.

Beltrami-Kleinův model roviny



Body hyperbolické roviny jsou body ležící uvnitř kružnice. Tzv. vlastní body. Body ležící na kružnici nazveme nevlastními body hyperbolické roviny.

Beltrami-Kleinův model roviny

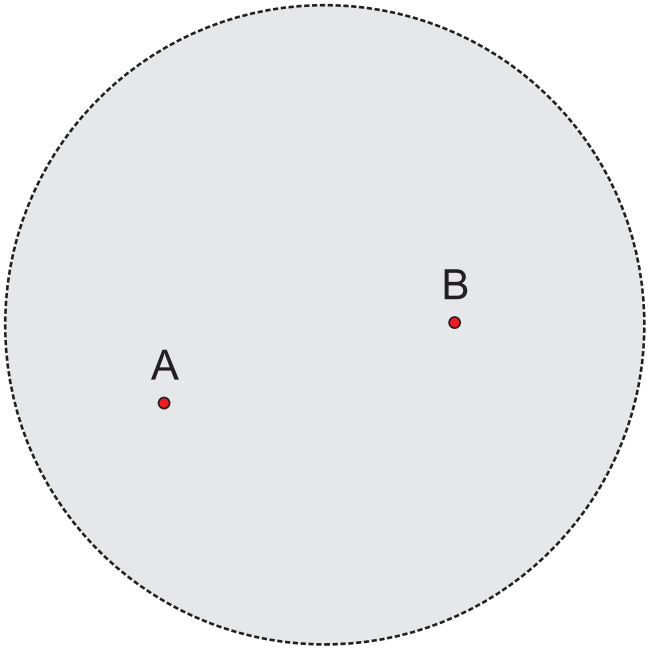


Přímkami modelu roviny nazveme tětivy této kružnice.

Beltrami-Kleinův model, 1. axiom incidence = 1. Euklidův postulát

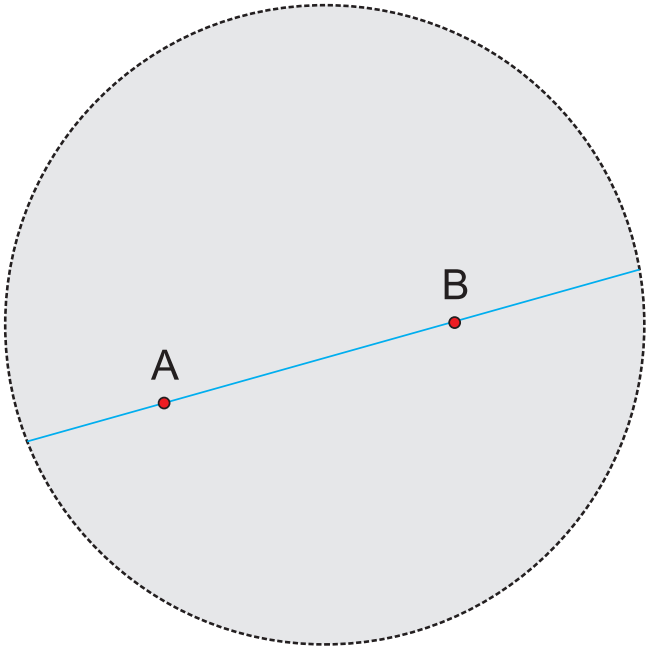
Beltrami-Kleinův model, 1. axiom incidence = 1. Euklidův postulát

$\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B$



Beltrami-Kleinův model, 1. axiom incidence = 1. Euklidův postulát

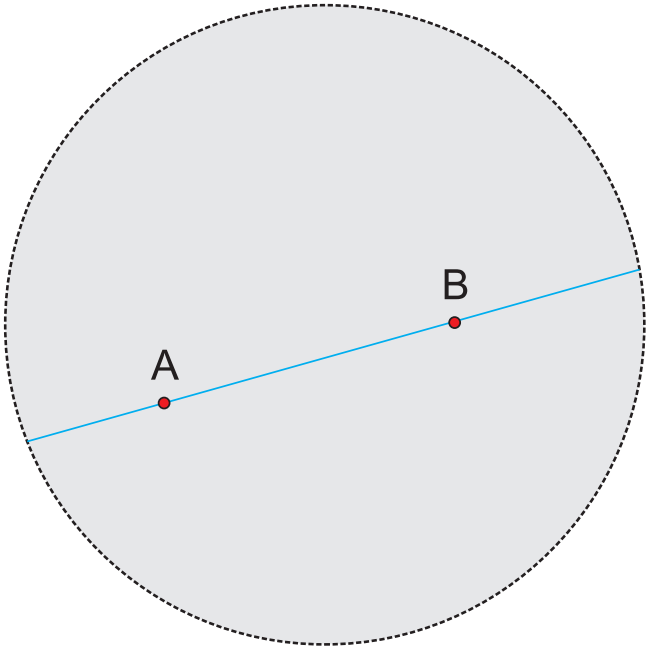
$$\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B \quad \exists! p \in \mathbb{P} : A \in p \wedge B \in p$$



Beltrami-Kleinův model, 1. axiom incidence = 1. Euklidův postulát

$\forall A, B \in \mathbb{B}, A \neq B \quad \exists! p \in \mathbb{P} : A \in p \wedge B \in p$

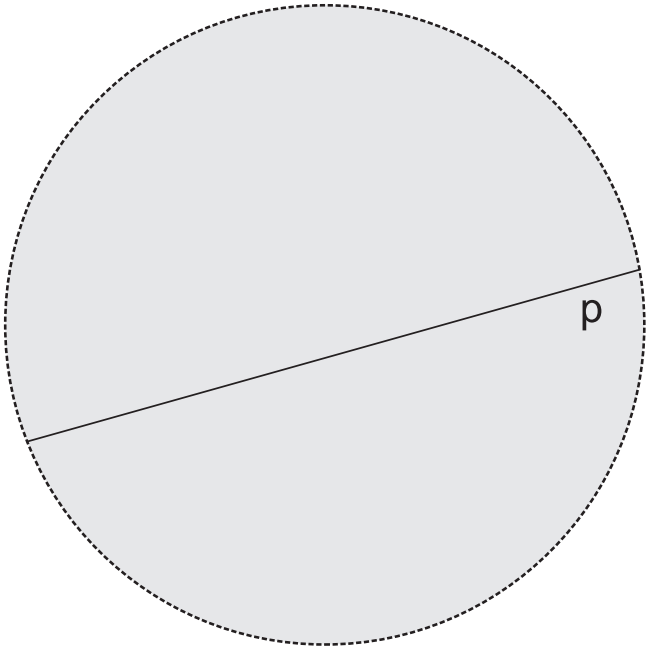
Přímku p pak značíme AB.



Beltrami-Kleinův model, 2. axiom incidence

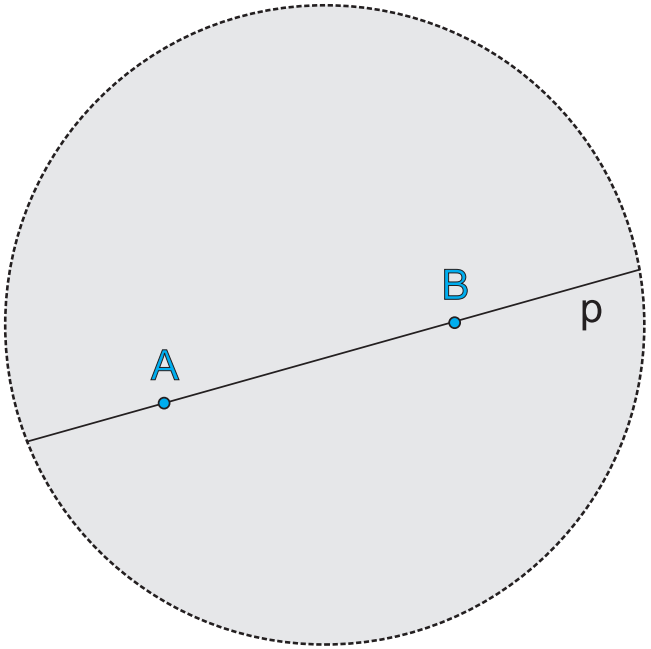
Beltrami-Kleinův model, 2. axiom incidence

$\forall p \in \mathbb{P}$



Beltrami-Kleinův model, 2. axiom incidence

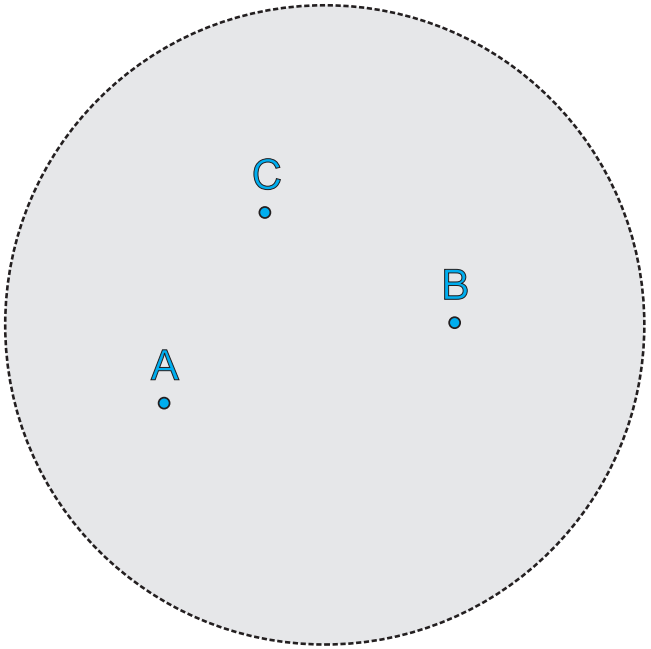
$$\forall p \in \mathbb{P} \;\; \exists A, B \in \mathbb{B},\, A \neq B \,:\, A \in p \wedge B \in p$$



Beltrami-Kleinův model, 3. axiom incidence

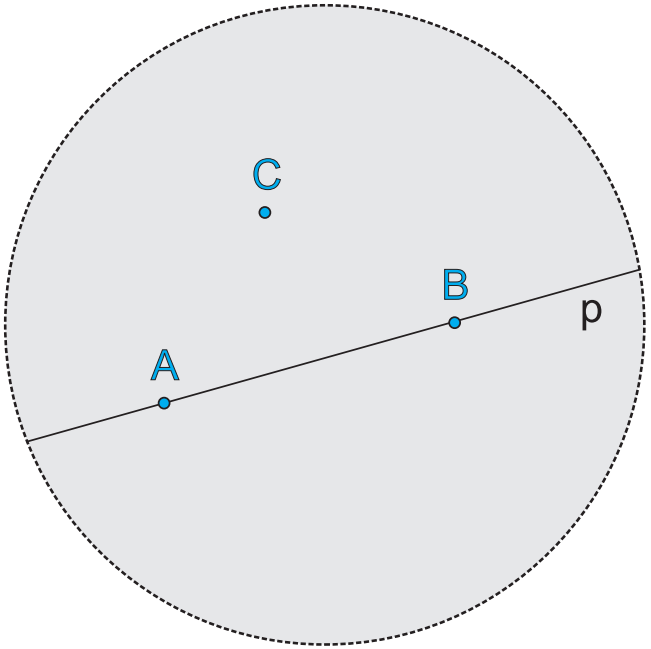
Beltrami-Kleinův model, 3. axiom incidence

$\exists A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A$



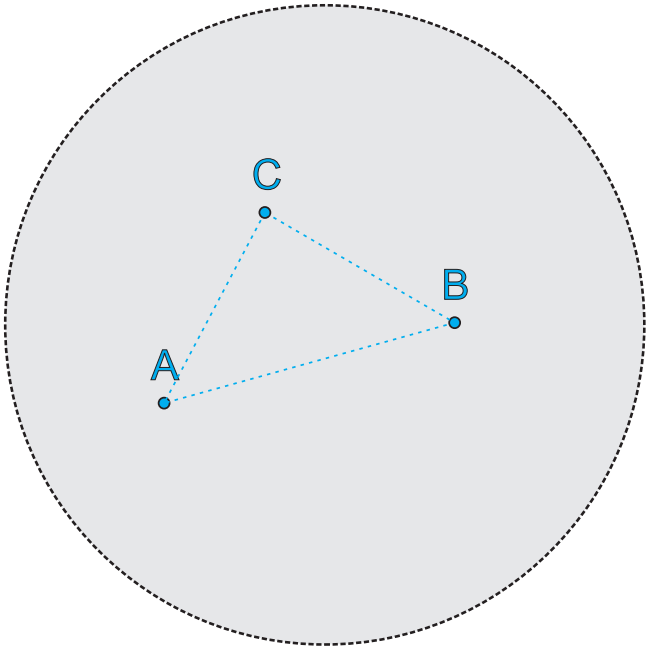
Beltrami-Kleinův model, 3. axiom incidence

$$\exists A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A \quad C \notin AB$$



Beltrami-Kleinův model, 3. axiom incidence

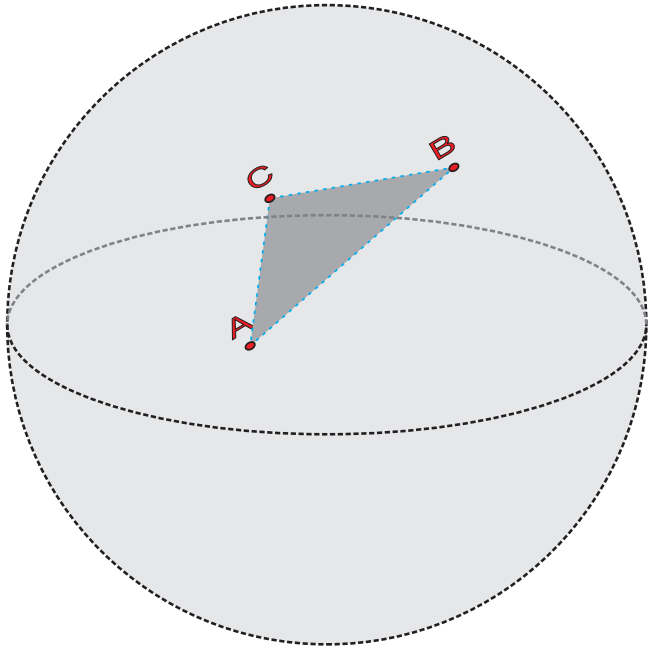
$$\exists A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A \quad C \notin AB$$



Beltrami-Kleinův model, 4. axiom incidence

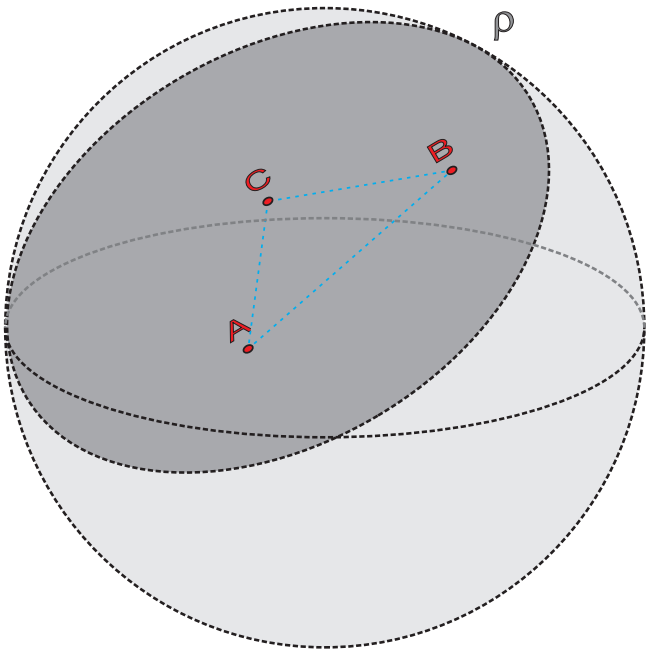
Beltrami-Kleinův model, 4. axiom incidence

$\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \notin BC$



Beltrami-Kleinův model, 4. axiom incidence

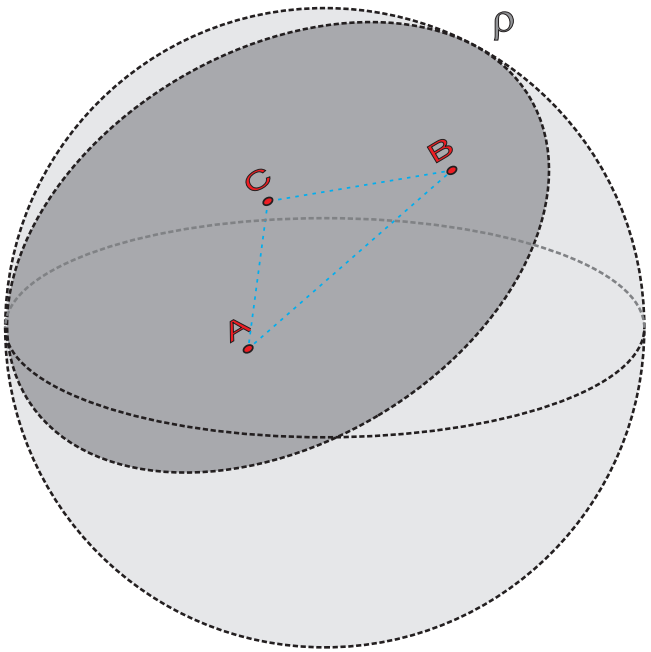
$$\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \notin BC \quad \exists! \rho \in \mathbb{R} : A, B, C \in \rho$$



Beltrami-Kleinův model, 4. axiom incidence

$\forall A, B, C \in \mathbb{B},\ A \neq B \neq C \neq A,\ A \notin BC \quad \exists! \rho \in \mathbb{R} : A, B, C \in \rho$

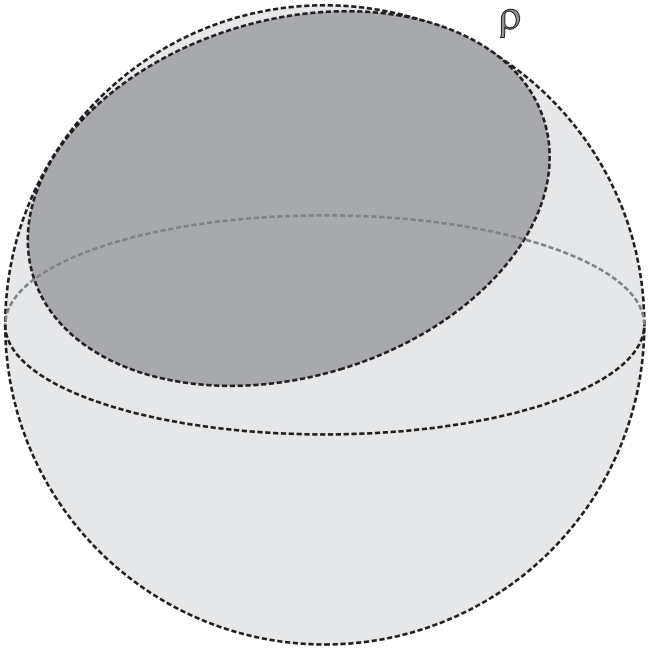
Rovinu ρ pak značíme ABC.



Beltrami-Kleinův model, 5. axiom incidence

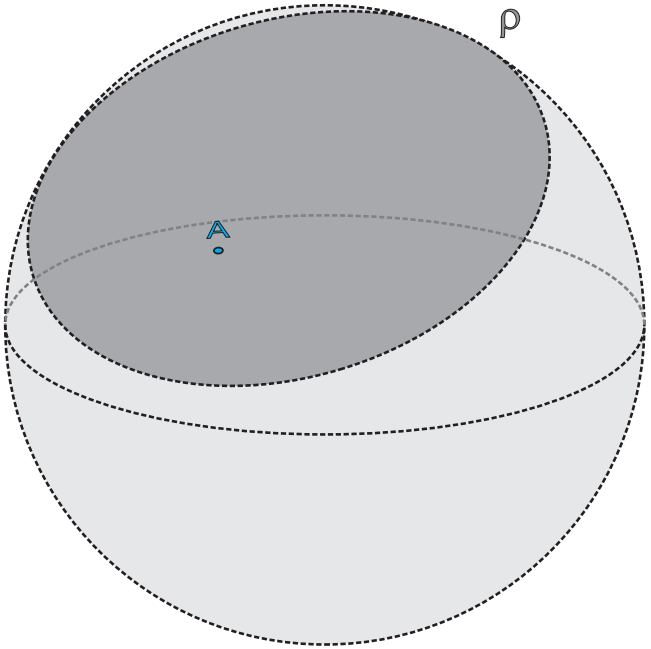
Beltrami-Kleinův model, 5. axiom incidence

$\forall \rho \in \mathbb{R}$



Beltrami-Kleinův model, 5. axiom incidence

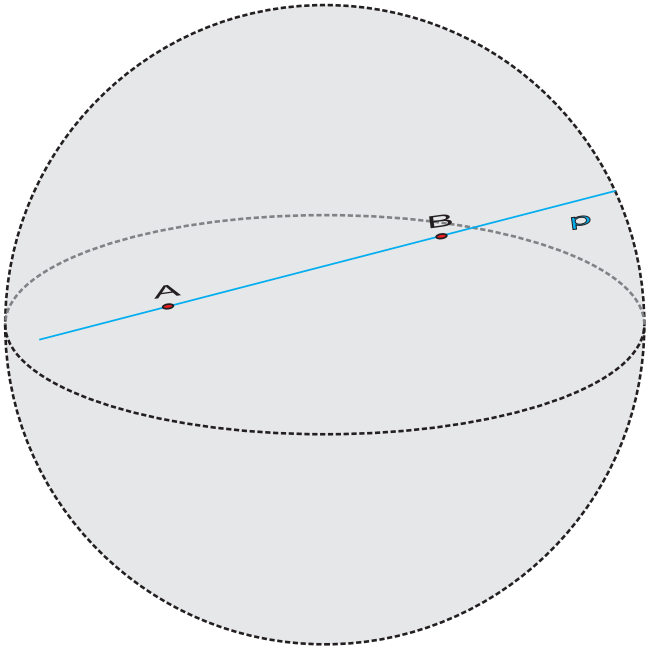
$$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{B} : A \in \rho$$



Beltrami-Kleinův model, 6. axiom incidence

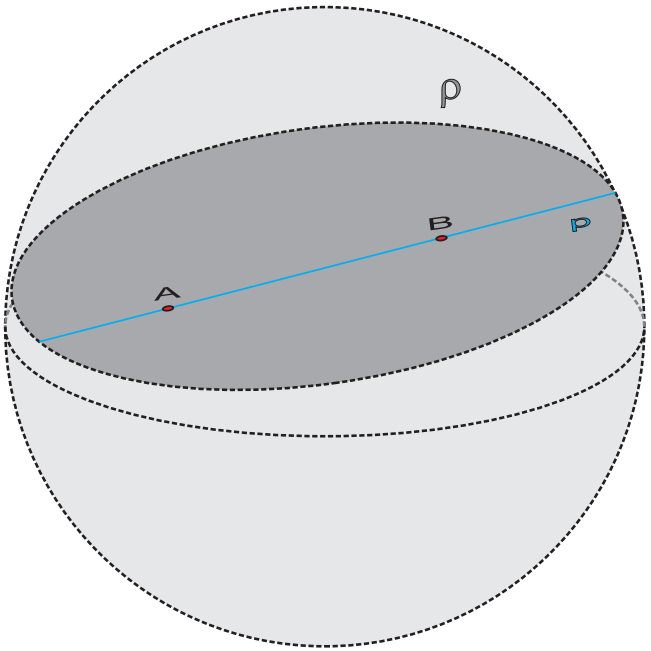
Beltrami-Kleinův model, 6. axiom incidence

$(A \neq B \wedge A, B \in p$



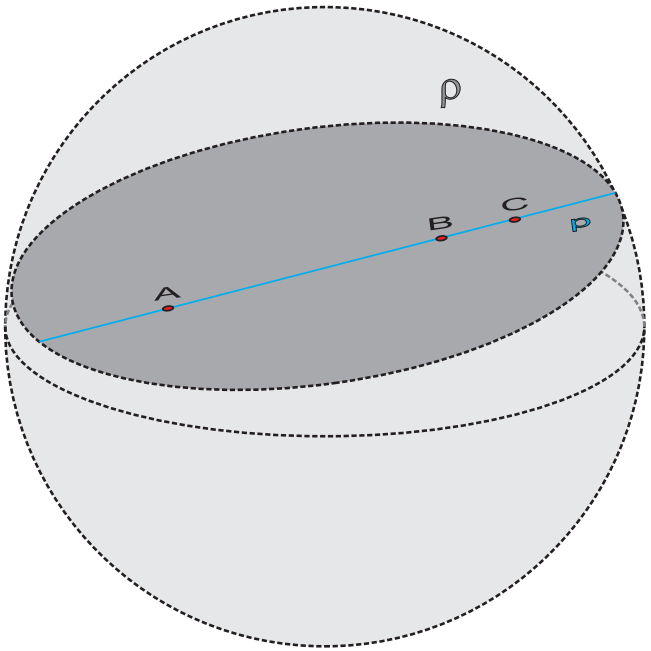
Beltrami-Kleinův model, 6. axiom incidence

$$(A \neq B \ \wedge \ A, B \in p \ \wedge A, B \in \rho)$$



Beltrami-Kleinův model, 6. axiom incidence

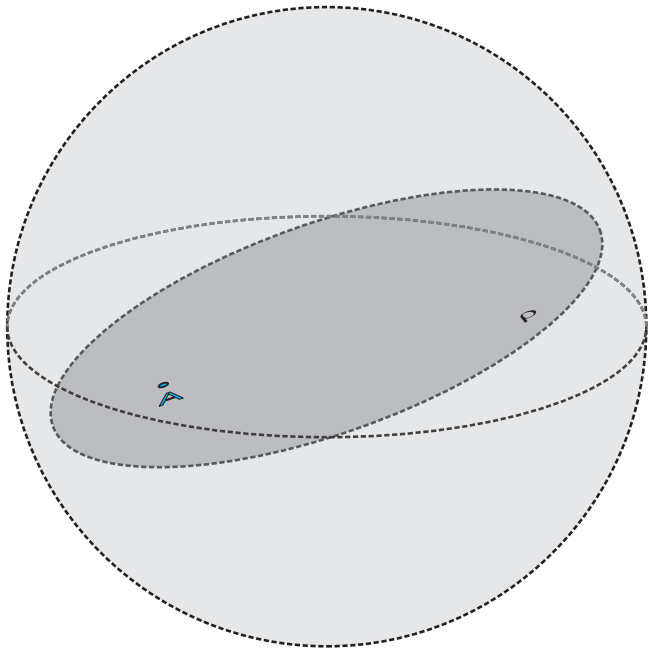
$$(A \neq B \wedge A, B \in p \wedge A, B \in \rho) \Rightarrow (C \in p \Rightarrow C \in \rho)$$



Beltrami-Kleinův model, 7. axiom incidence

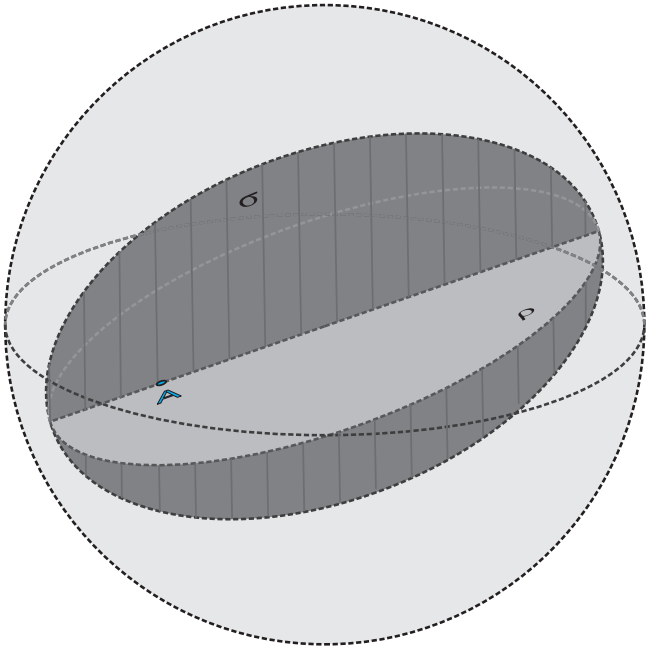
Beltrami-Kleinův model, 7. axiom incidence

$(A \in \rho$



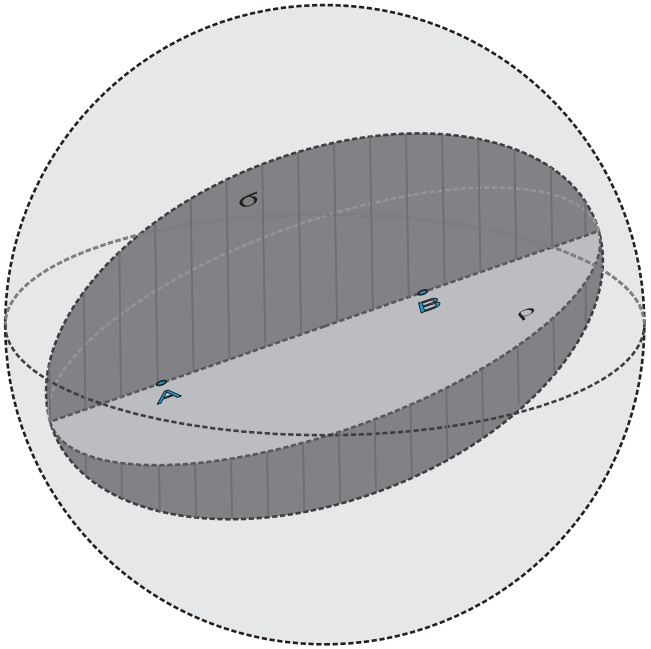
Beltrami-Kleinův model, 7. axiom incidence

$(A \in \rho \;\; A \in \sigma, \rho \neq \sigma)$



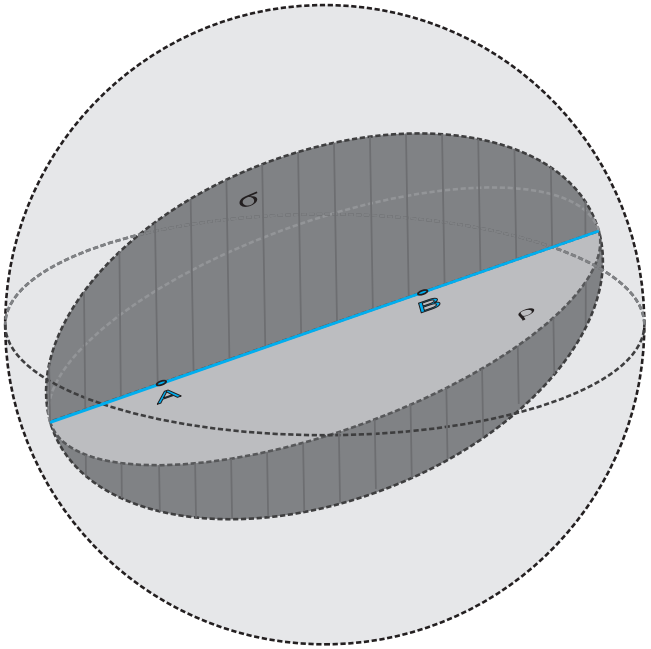
Beltrami-Kleinův model, 7. axiom incidence

$$(A \in \rho \;\; A \in \sigma,\, \rho \neq \sigma) \;\; \exists B \in \mathbb{B},\, B \neq A : (B \in \rho \wedge B \in \sigma)$$



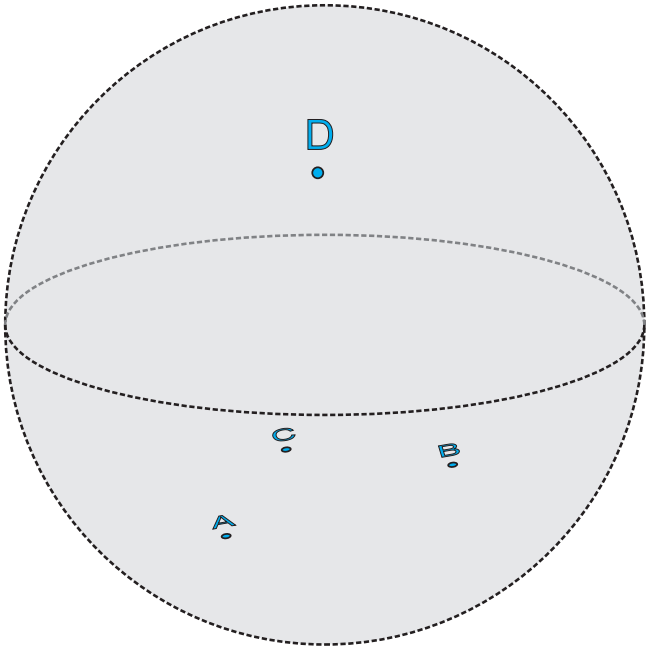
Beltrami-Kleinův model, 7. axiom incidence

$$(A \in \rho \;\; A \in \sigma,\, \rho \neq \sigma) \;\; \exists B \in \mathbb{B},\, B \neq A : (B \in \rho \wedge B \in \sigma)$$



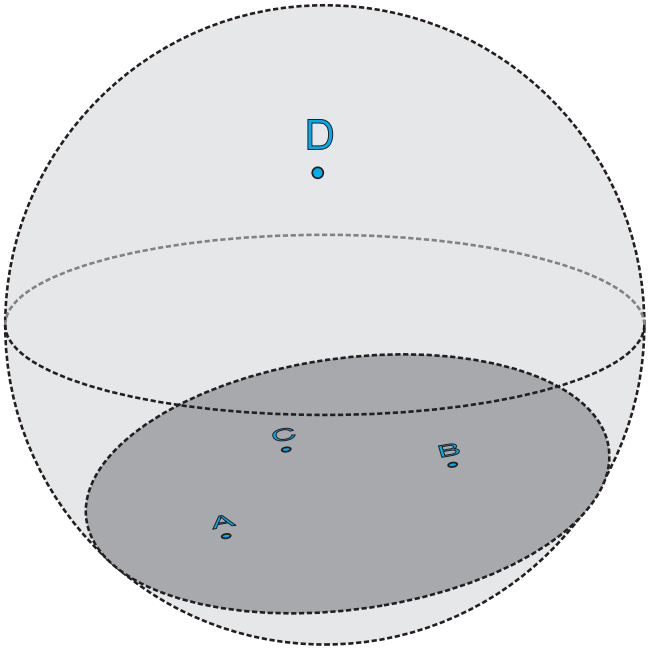
Beltrami-Kleinův model, 8. axiom incidence

$$\exists A, B, C, D \in \mathbb{B} \ : \ D \notin ABC$$



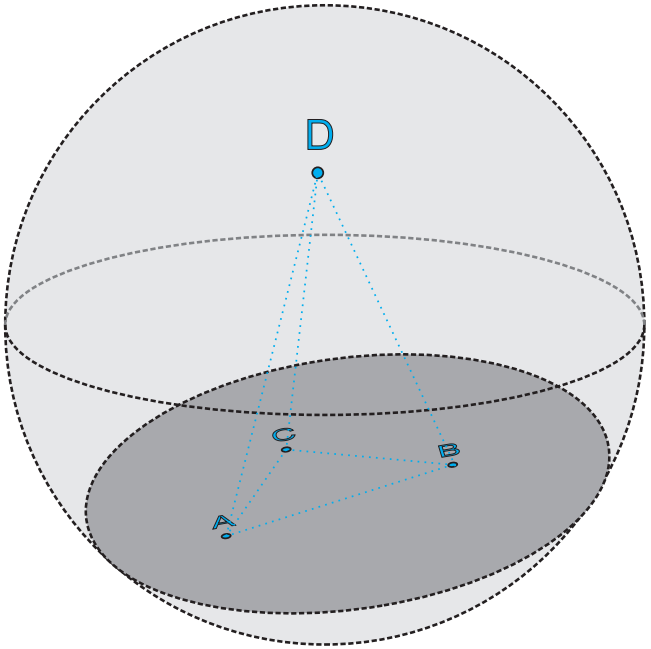
Beltrami-Kleinův model, 8. axiom incidence

$$\exists A, B, C, D \in \mathbb{B} \ : \ D \notin ABC$$



Beltrami-Kleinův model, 8. axiom incidence

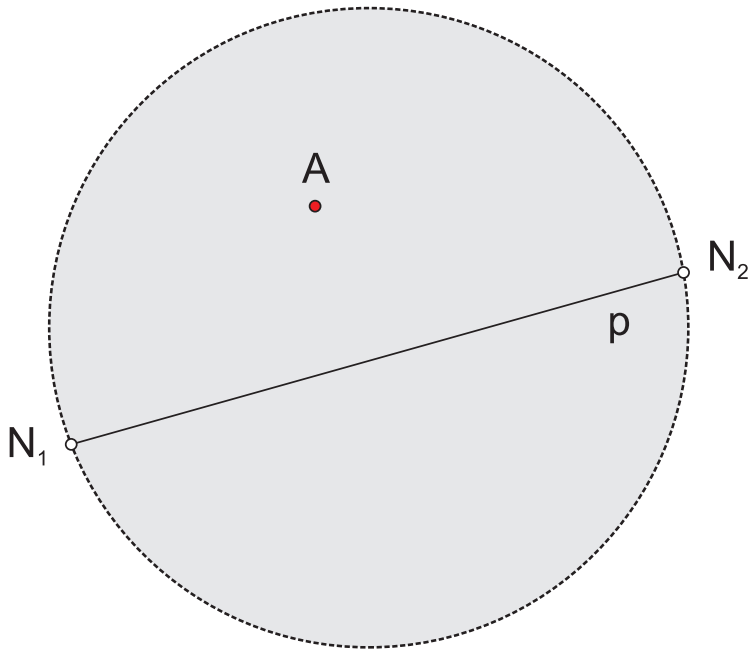
$$\exists A, B, C, D \in \mathbb{B} \ : \ D \notin ABC$$



Beltrami-Kleinův model, Lobačevského axiom

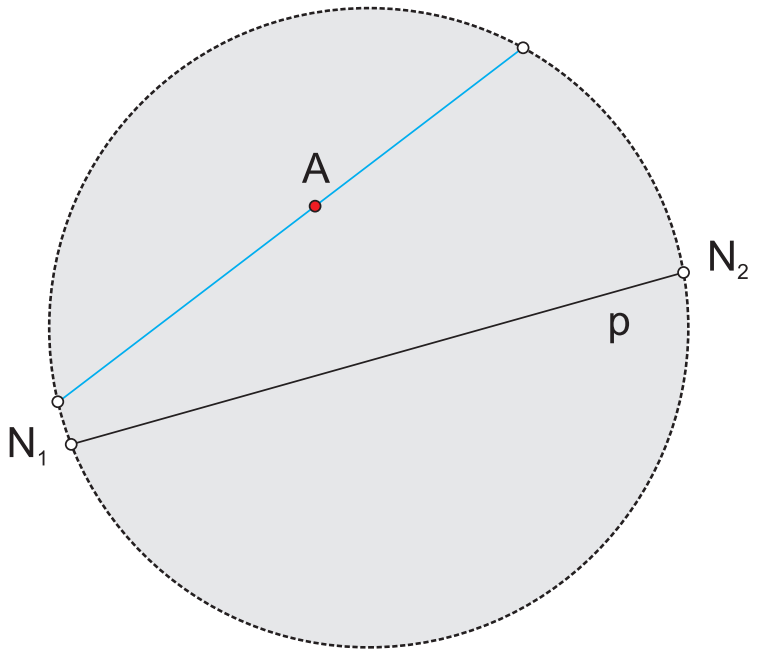
Beltrami-Kleinův model, Lobačevského axiom

Existují přímka p a bod A, který na ní neleží,



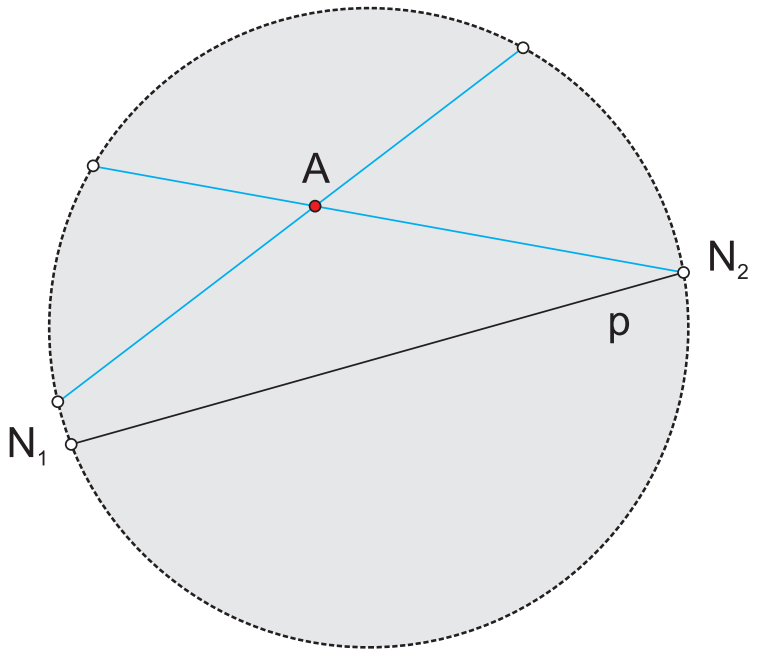
Beltrami-Kleinův model, Lobačevského axiom

Existují přímka p a bod A, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem A neprotínají přímku p.



Beltrami-Kleinův model, Lobačevského axiom

Existují přímka p a bod A, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem A neprotínají přímku p.



Beltrami-Kleinův model, Lobačevského axiom

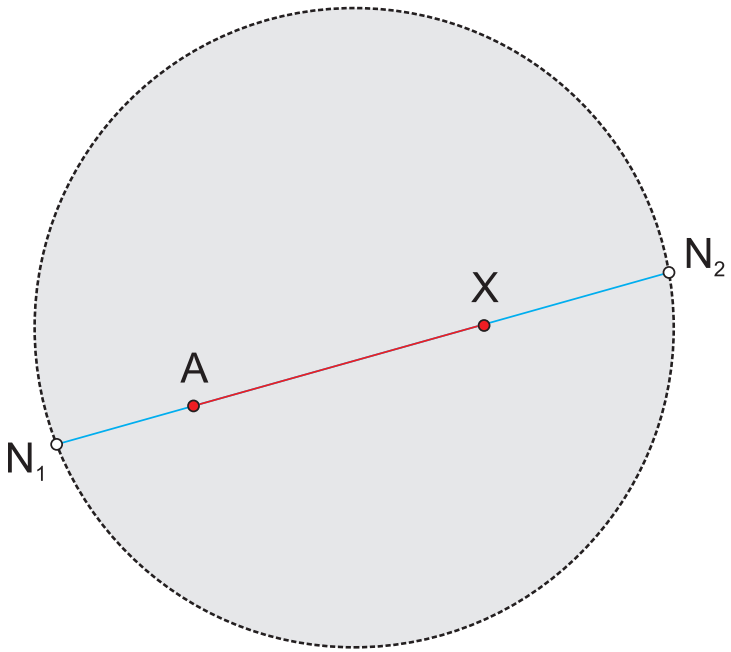
Euklidův pátý postulát není možné odvodit z axiomů incidence Euklidovské geometrie!

Beltrami-Kleinův model, Lobačevského axiom

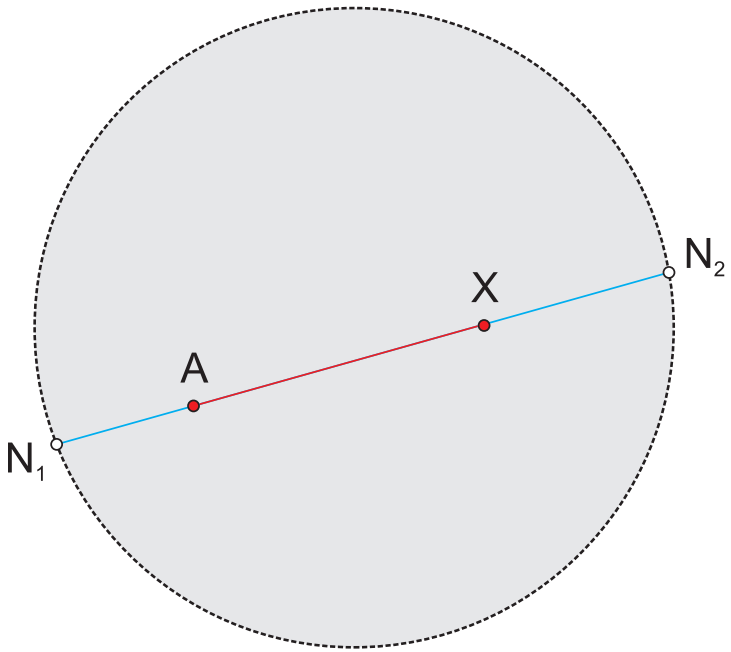
Euklidův pátý postulát není možné odvodit z axiomů incidence Euklidovské geometrie! A ani z jiných!

Beltrami-Kleinův model - vzdálenosti

Beltrami-Kleinův model - vzdálenosti



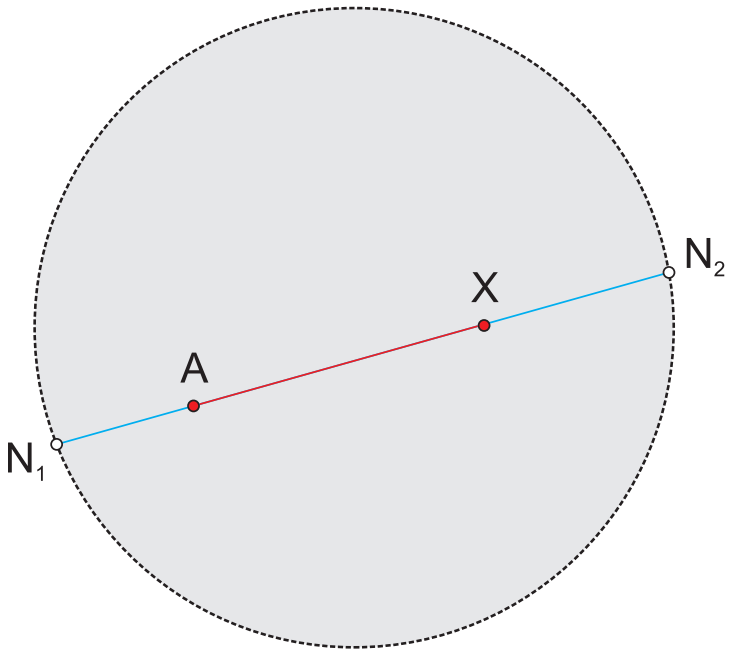
Beltrami-Kleinův model - vzdálenosti



Délku úsečky AB definujme:

$$|AX|_h = \left| \ln \left(\frac{|AN_1|}{|AN_2|} \frac{|XN_2|}{|XN_1|} \right) \right|$$

Beltrami-Kleinův model - vzdálenosti

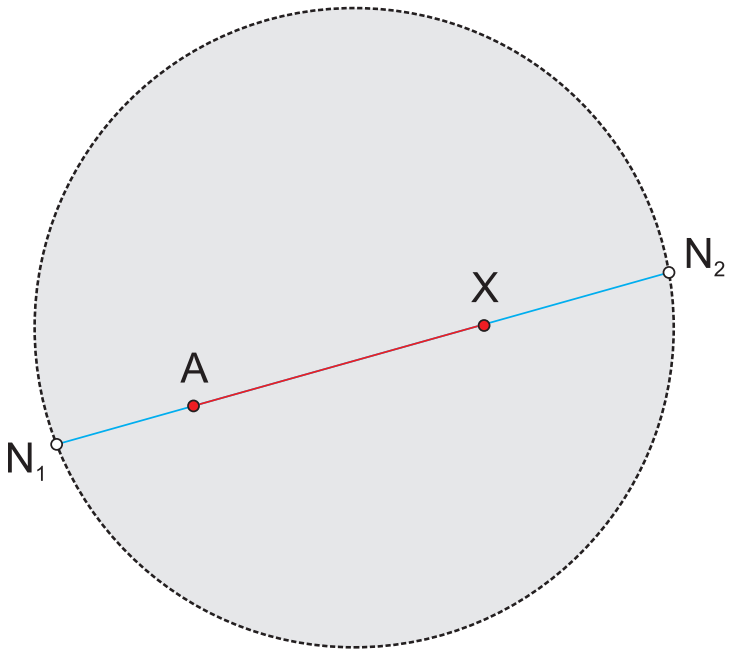


Délku úsečky AB definujme:

$$|AX|_h = \left|\ln\left(\frac{|AN_1|}{|AN_2|}\frac{|XN_2|}{|XN_1|}\right)\right|$$

$$|XN_2| \to 0$$

Beltrami-Kleinův model - vzdálenosti

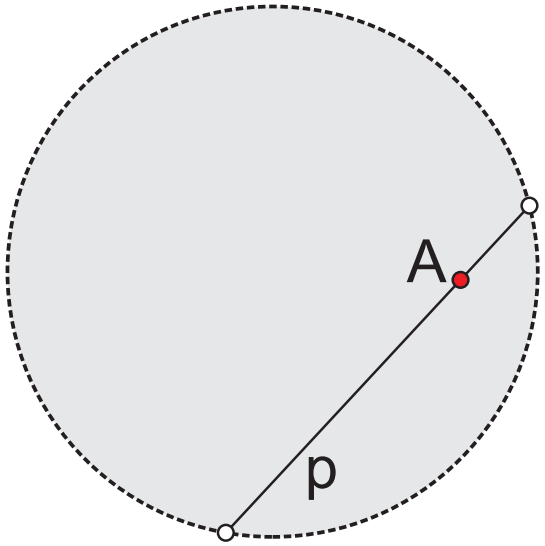


Délku úsečky AB definujme:

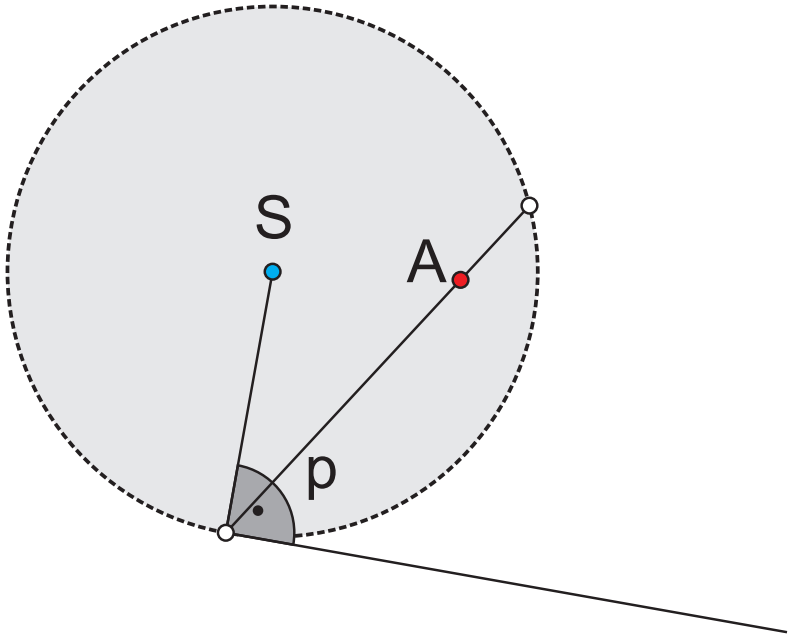
$$|AX|_h = \left|\ln\left(\frac{|AN_1|}{|AN_2|}\frac{|XN_2|}{|XN_1|}\right)\right|$$

$$|XN_2| \to 0 \Rightarrow |AX|_h \to \infty$$

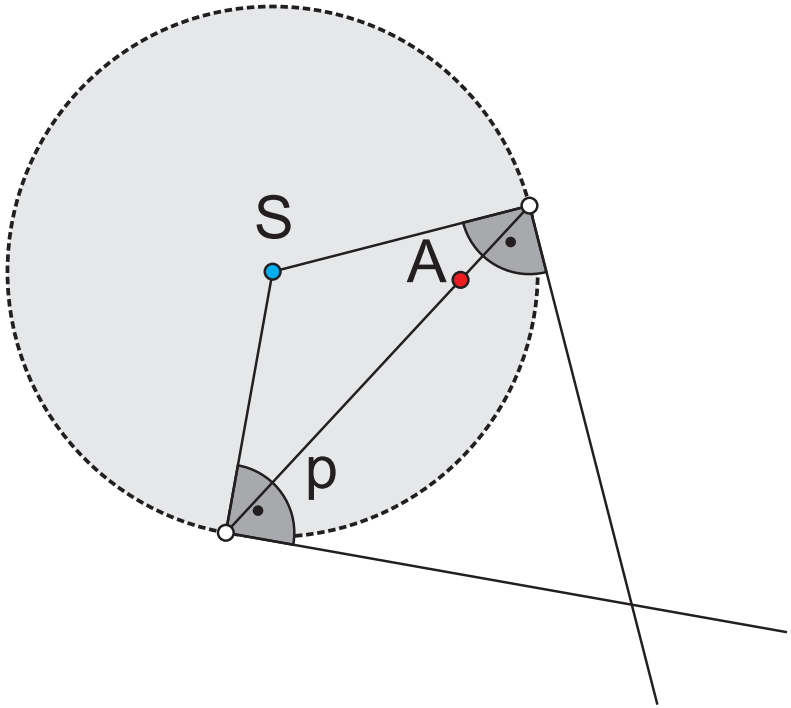
Beltrami-Kleinův model - kolmice



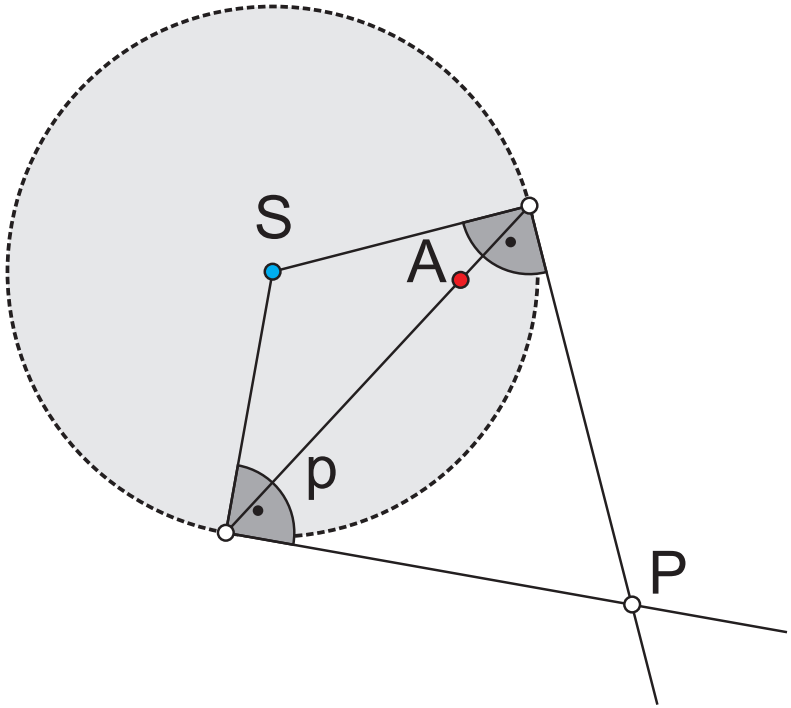
Beltrami-Kleinův model - kolmice



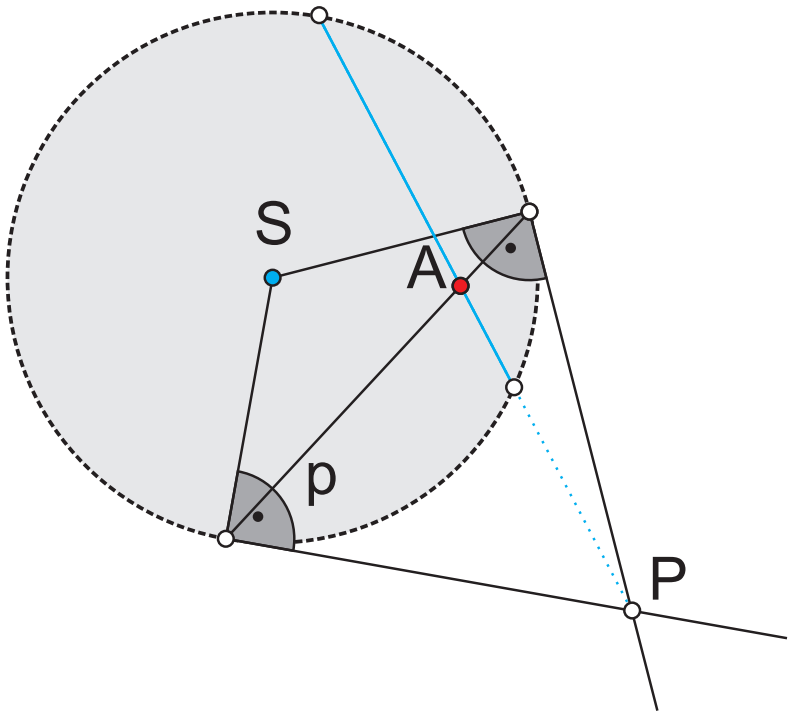
Beltrami-Kleinův model - kolmice



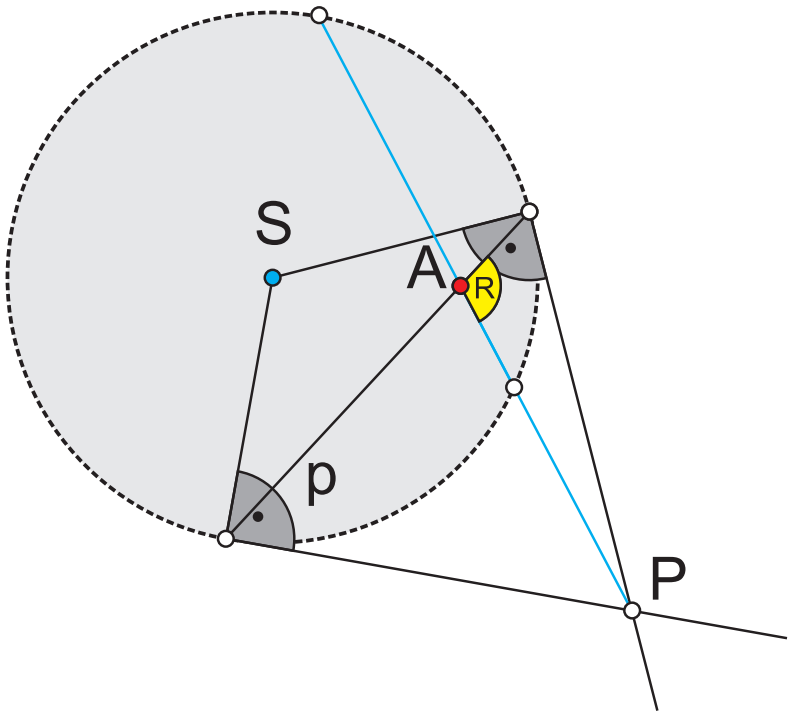
Beltrami-Kleinův model - kolmice



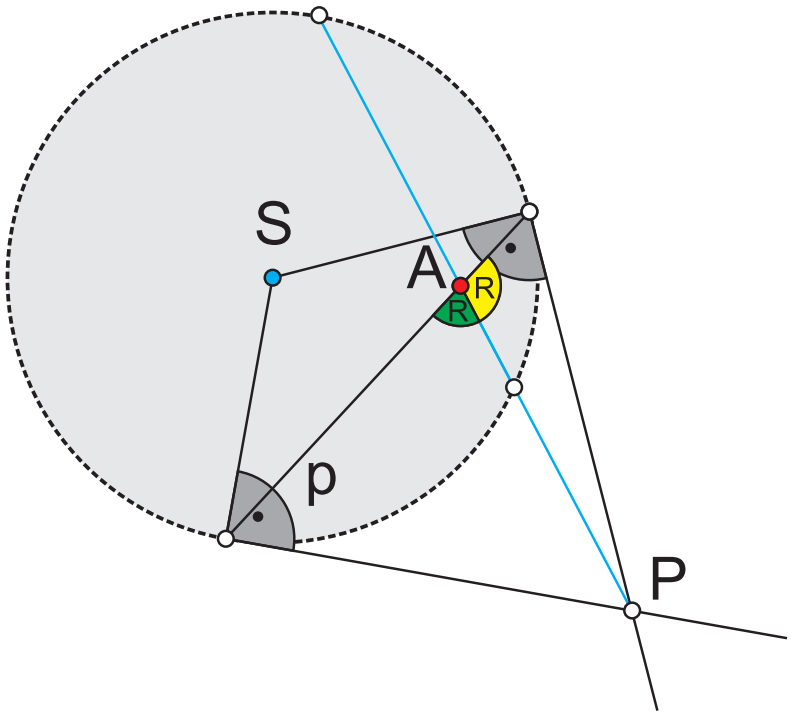
Beltrami-Kleinův model - kolmice



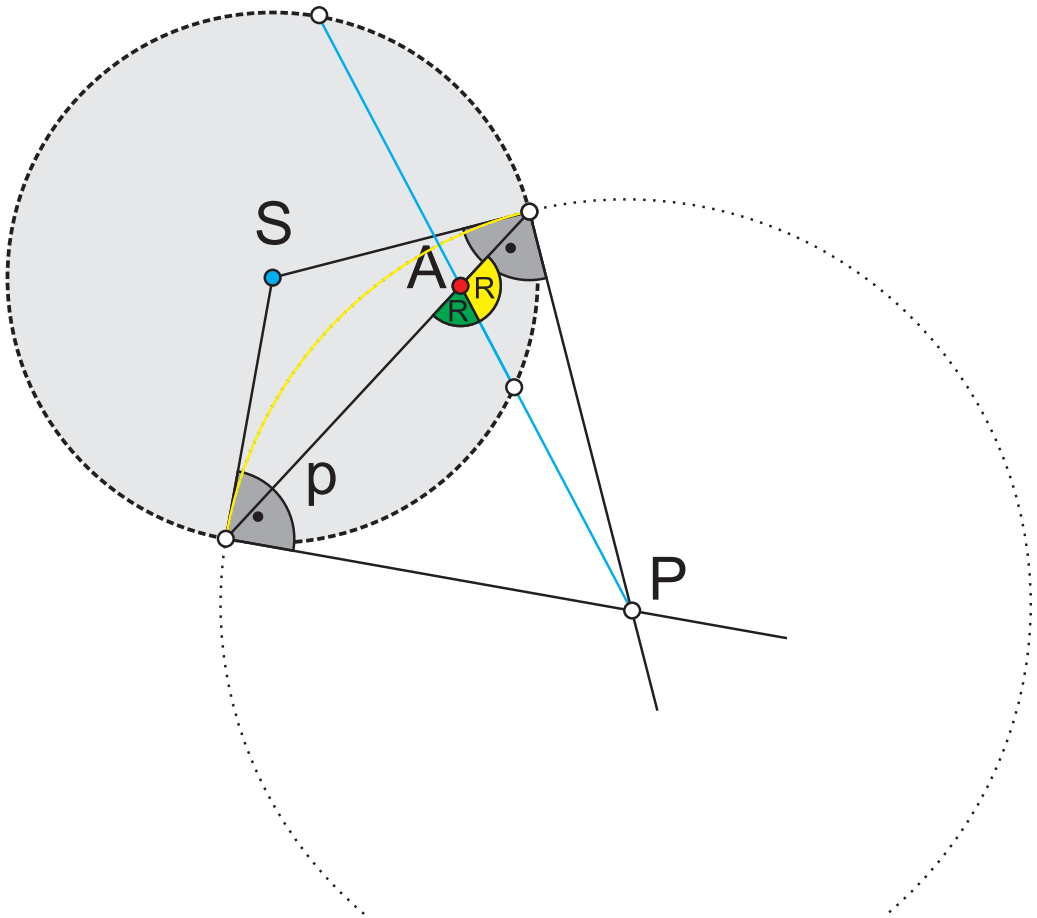
Beltrami-Kleinův model - kolmice



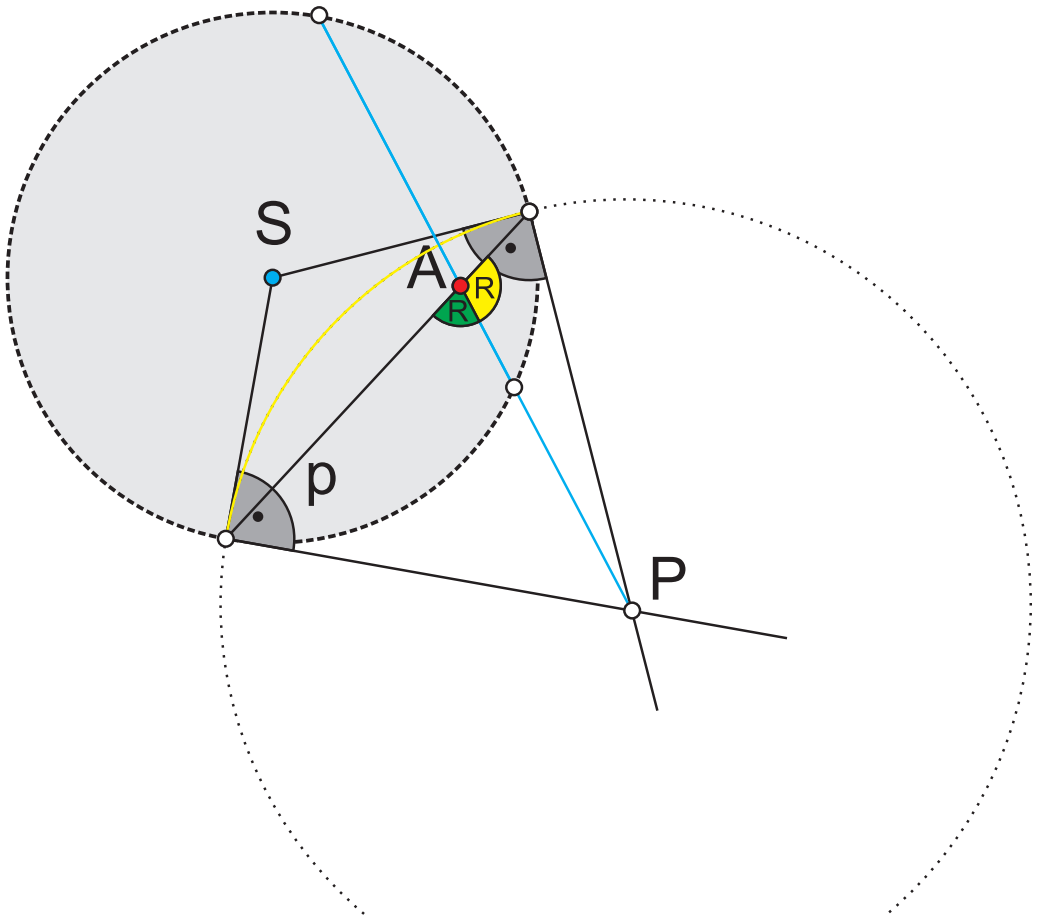
Beltrami-Kleinův model - kolmice



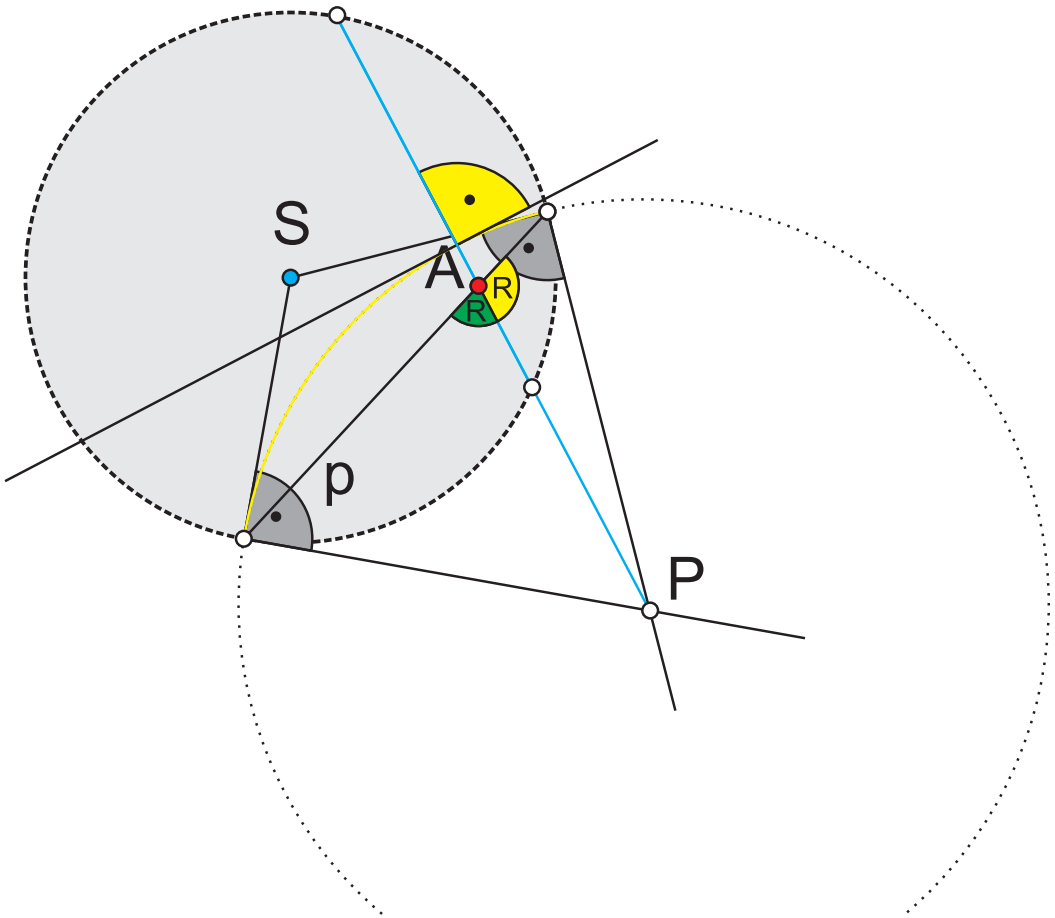
Beltrami-Kleinův model - kolmice



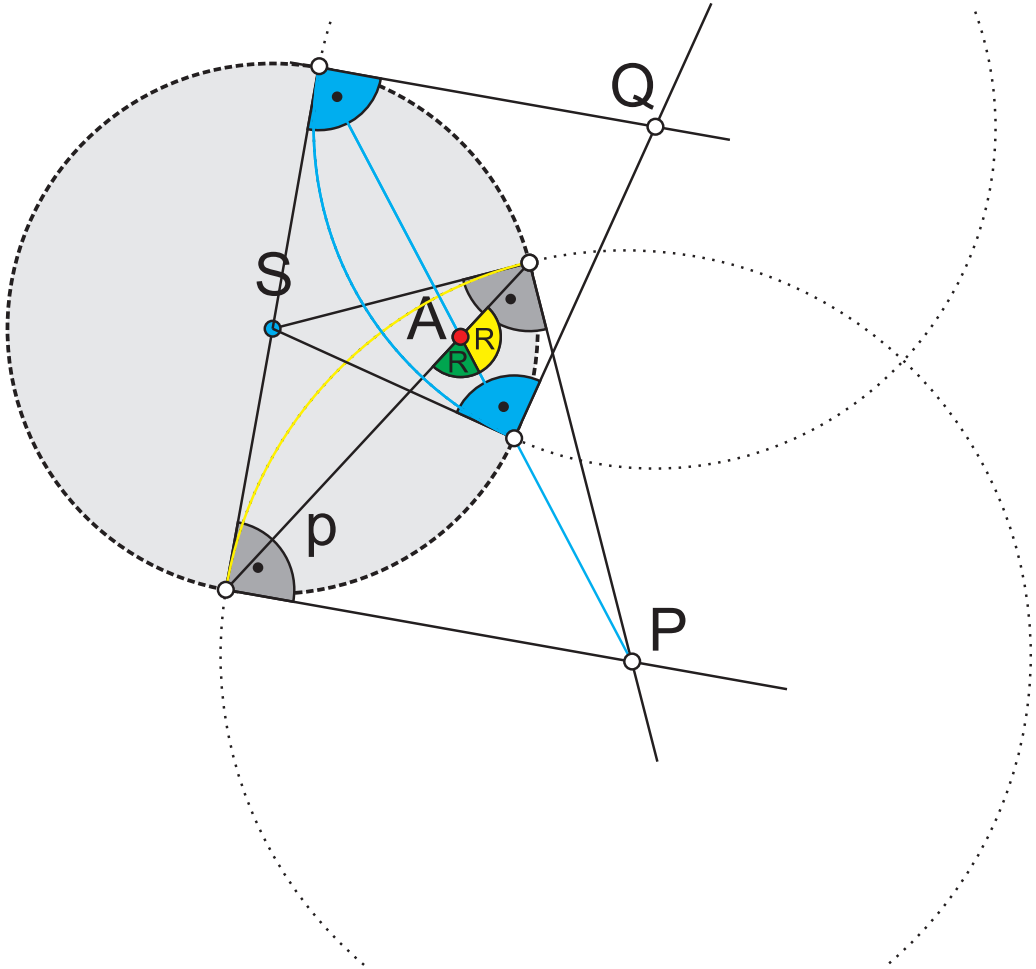
Beltrami-Kleinův model - kolmice



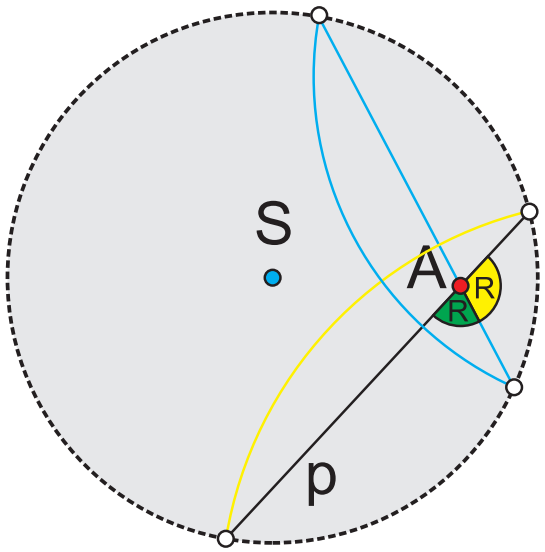
Beltrami-Kleinův model - kolmice



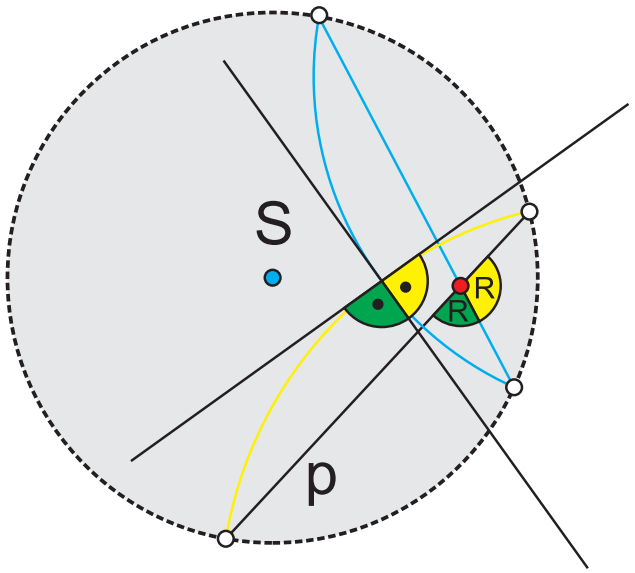
Beltrami-Kleinův model - kolmice



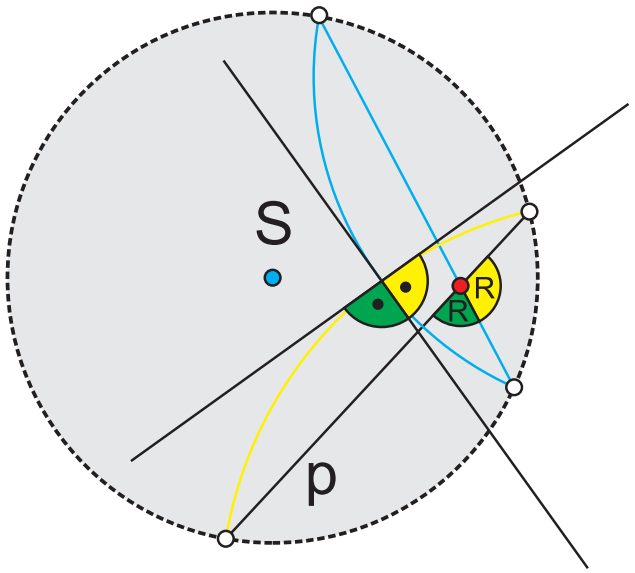
Beltrami-Kleinův model - kolmice



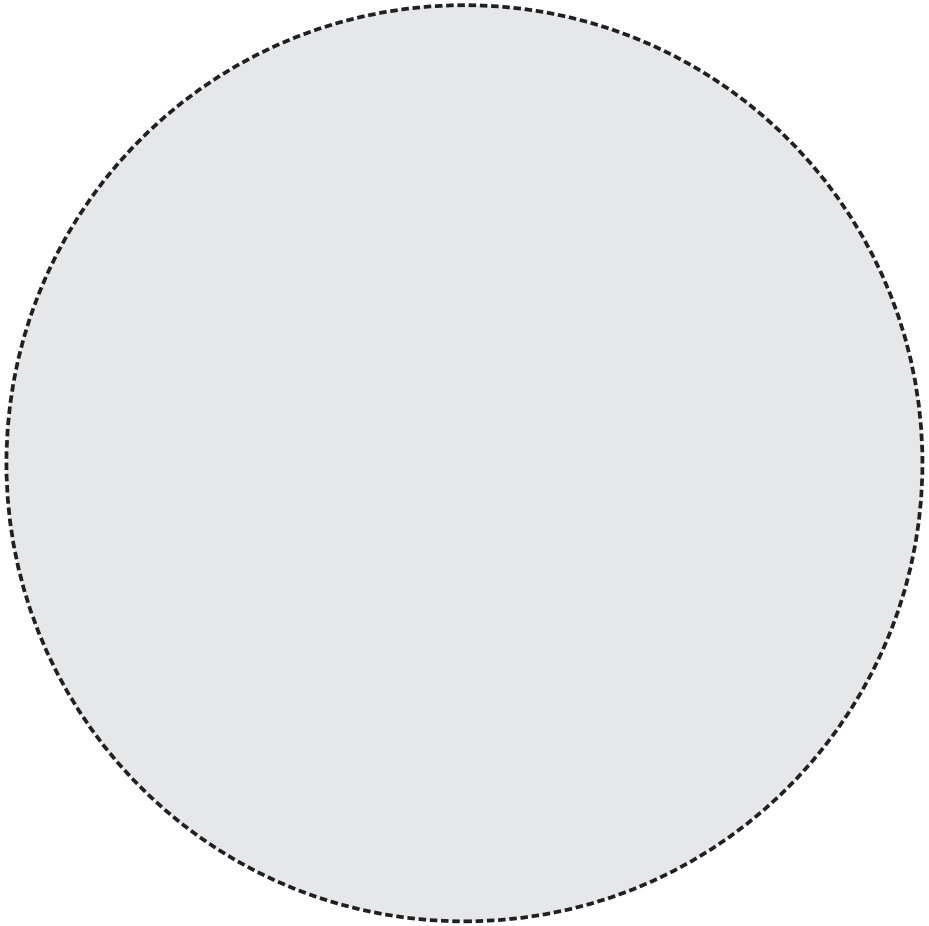
Beltrami-Kleinův model - kolmice



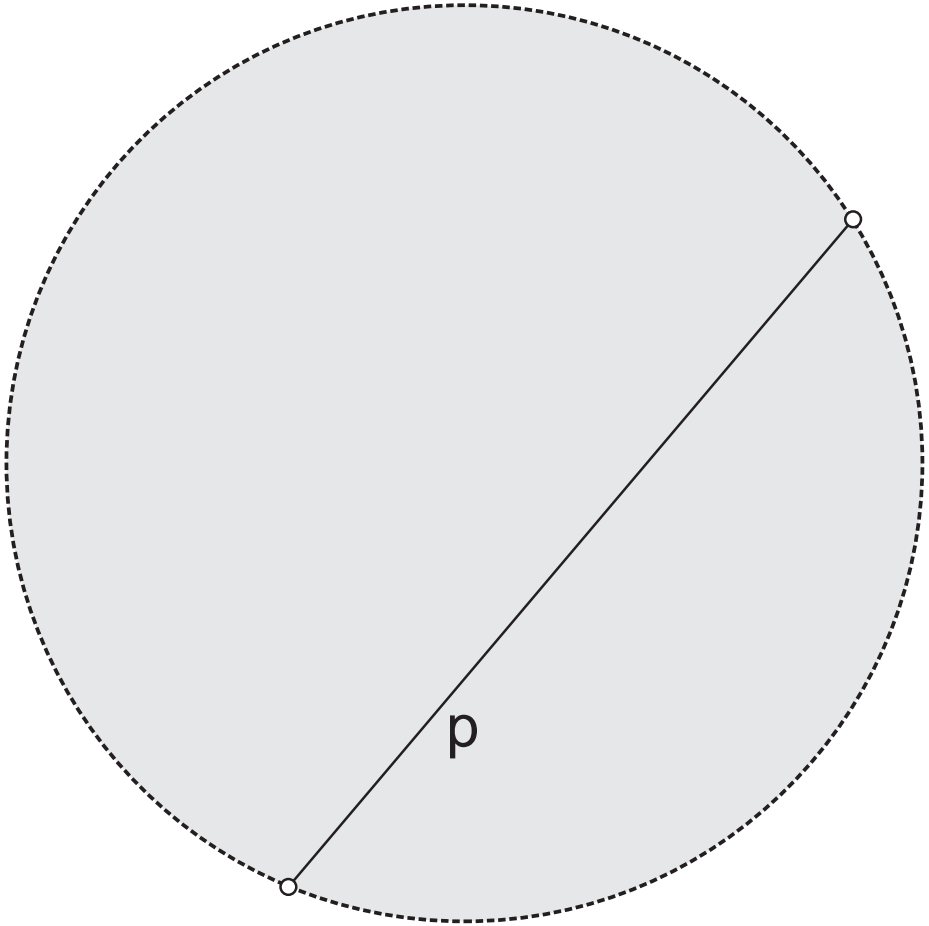
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



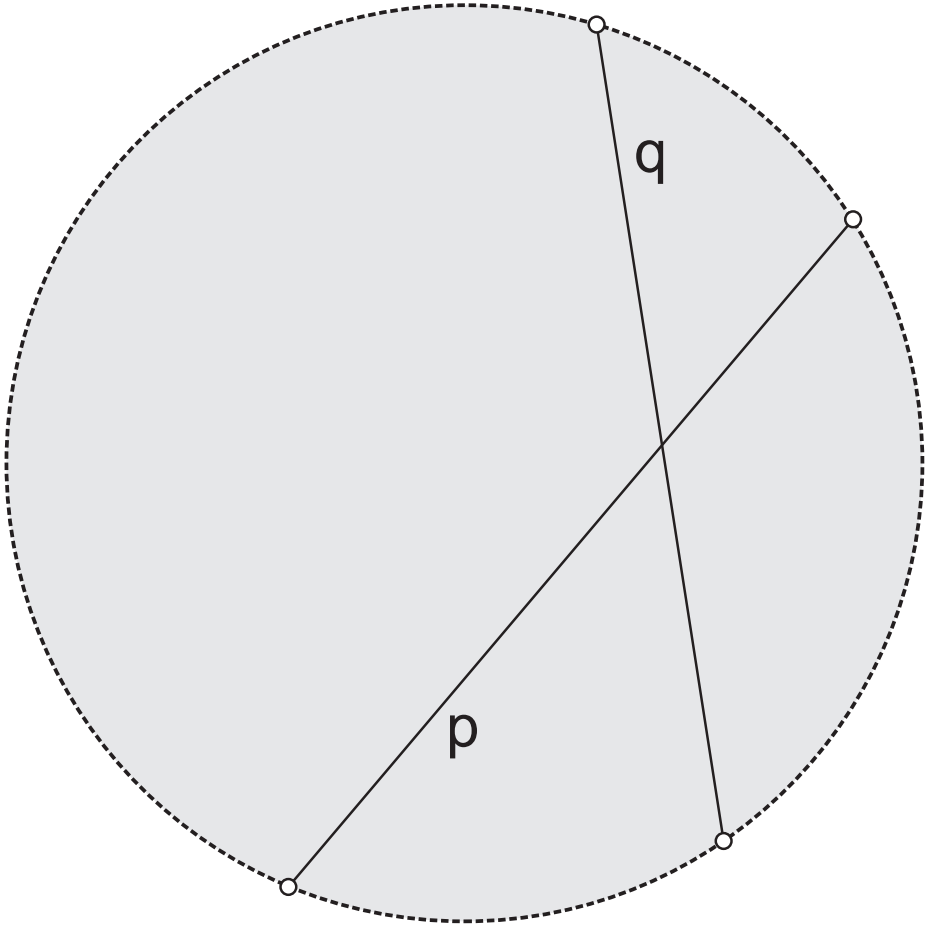
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



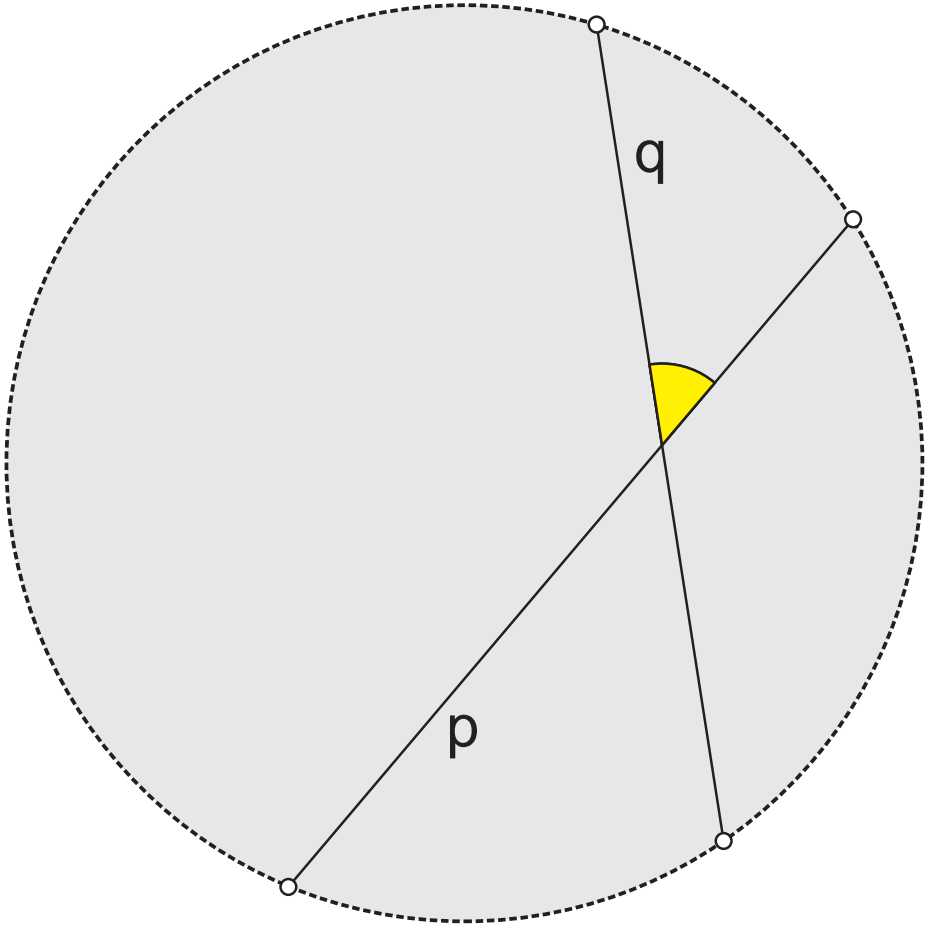
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



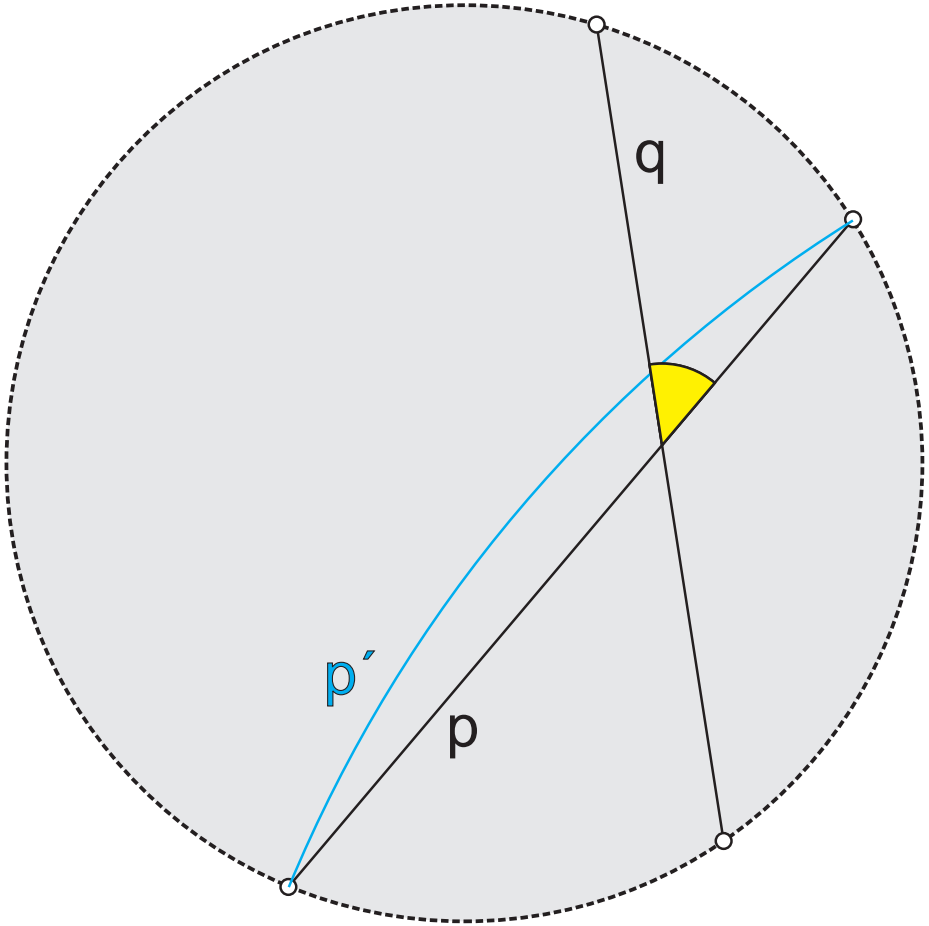
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



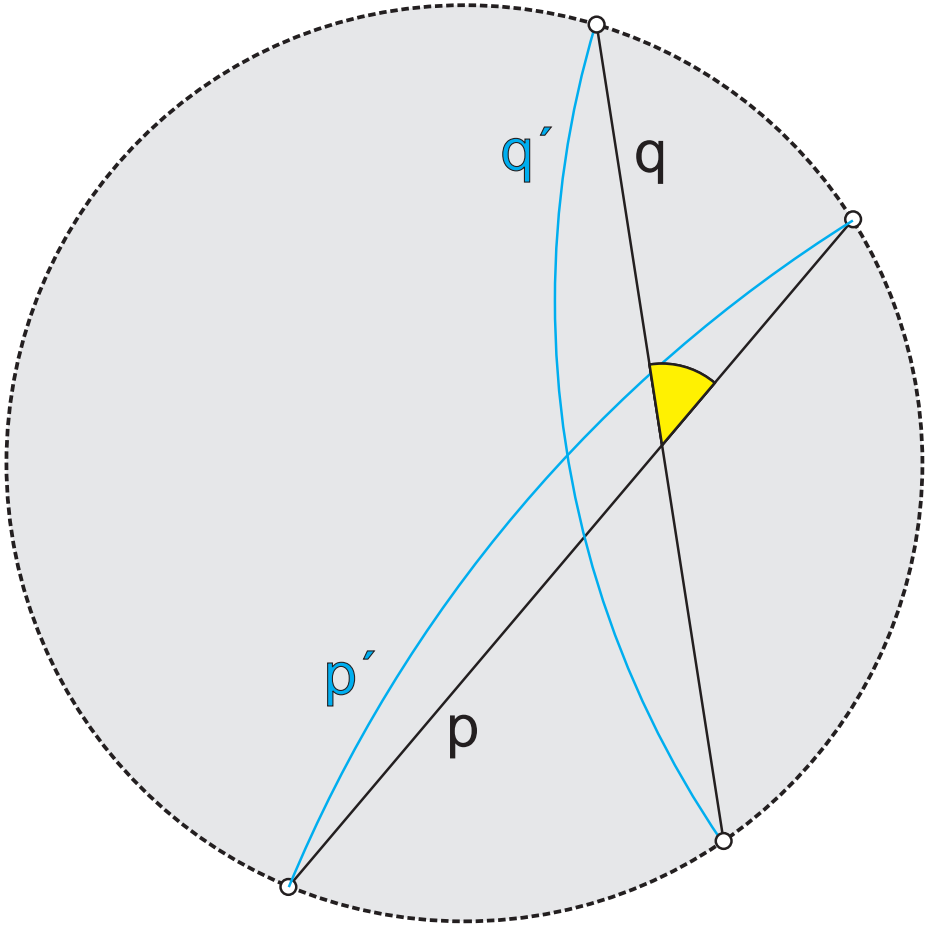
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



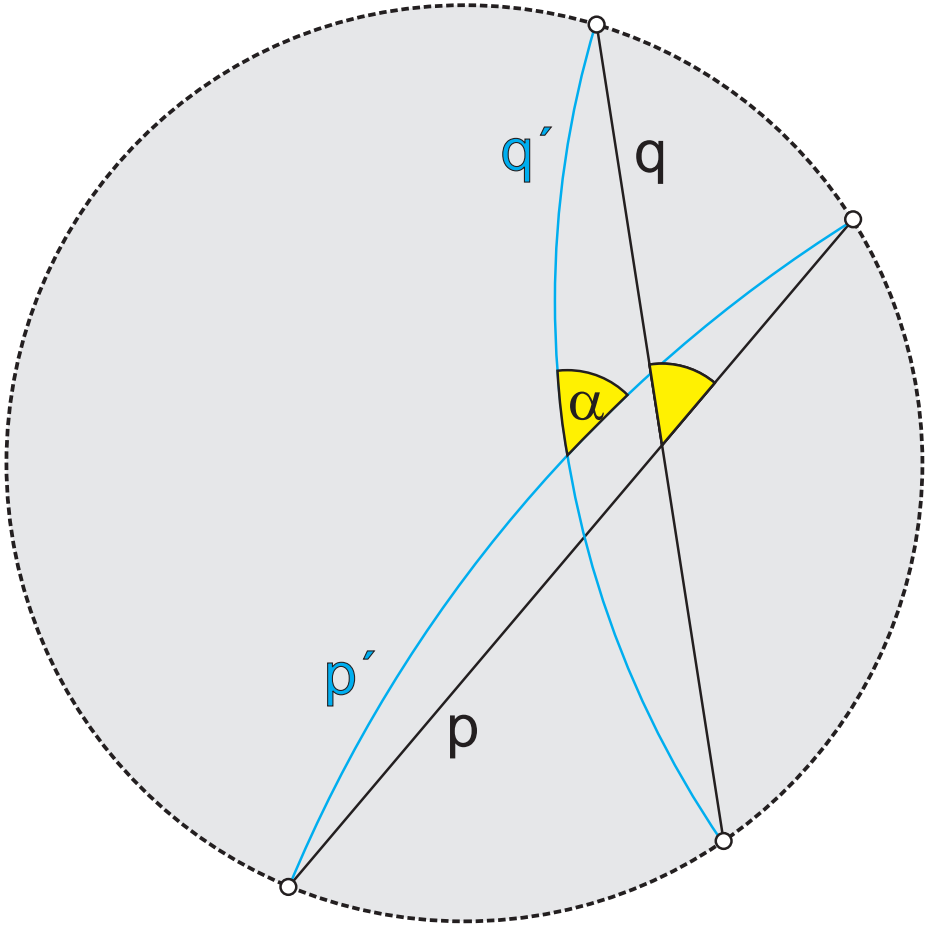
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



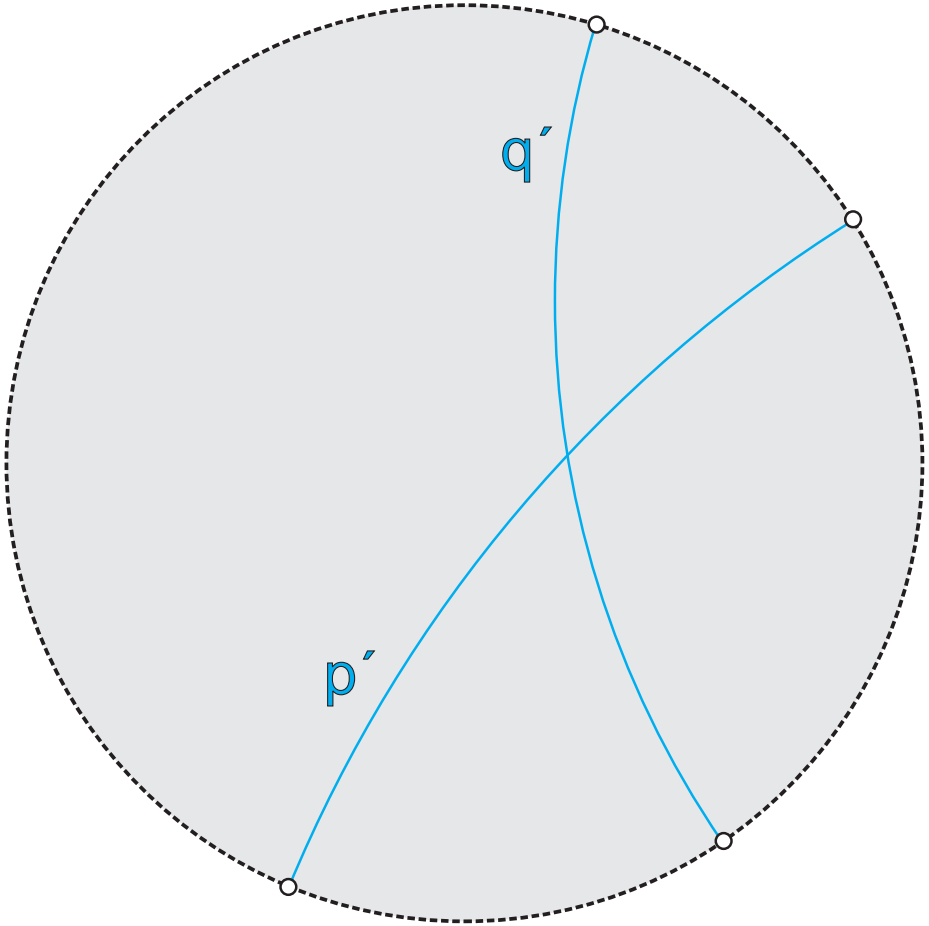
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



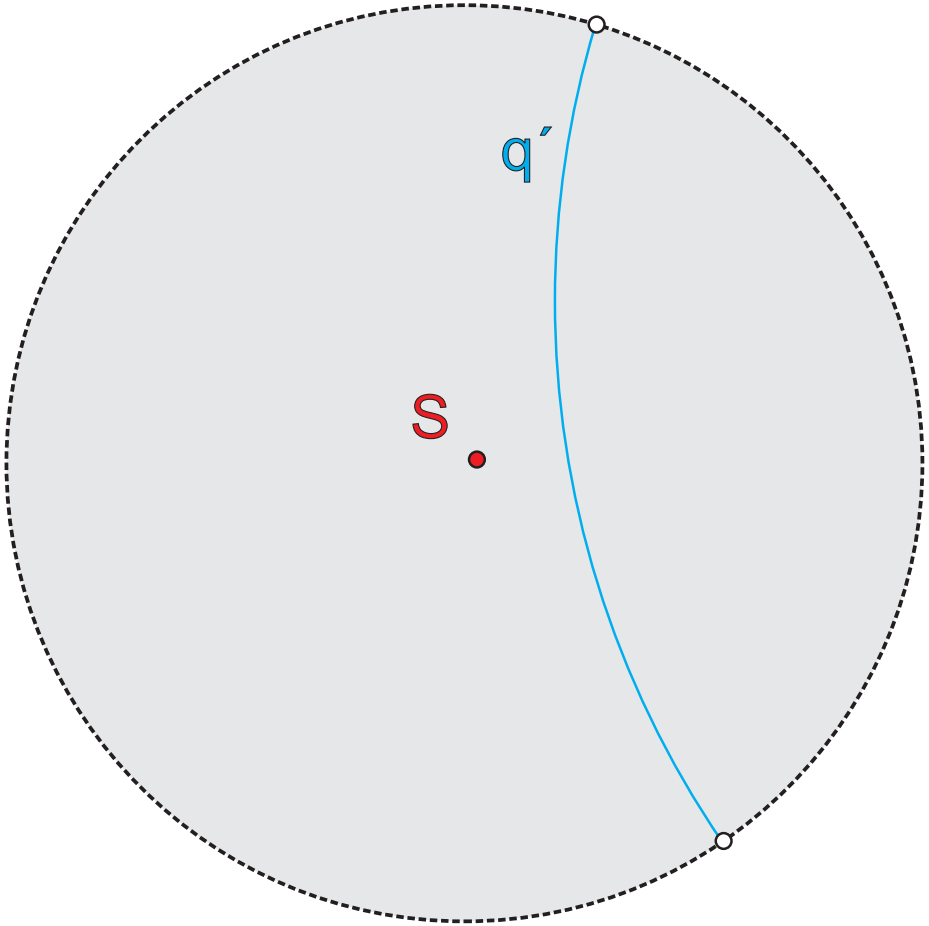
Beltrami-Kleinův model - měření úhlů



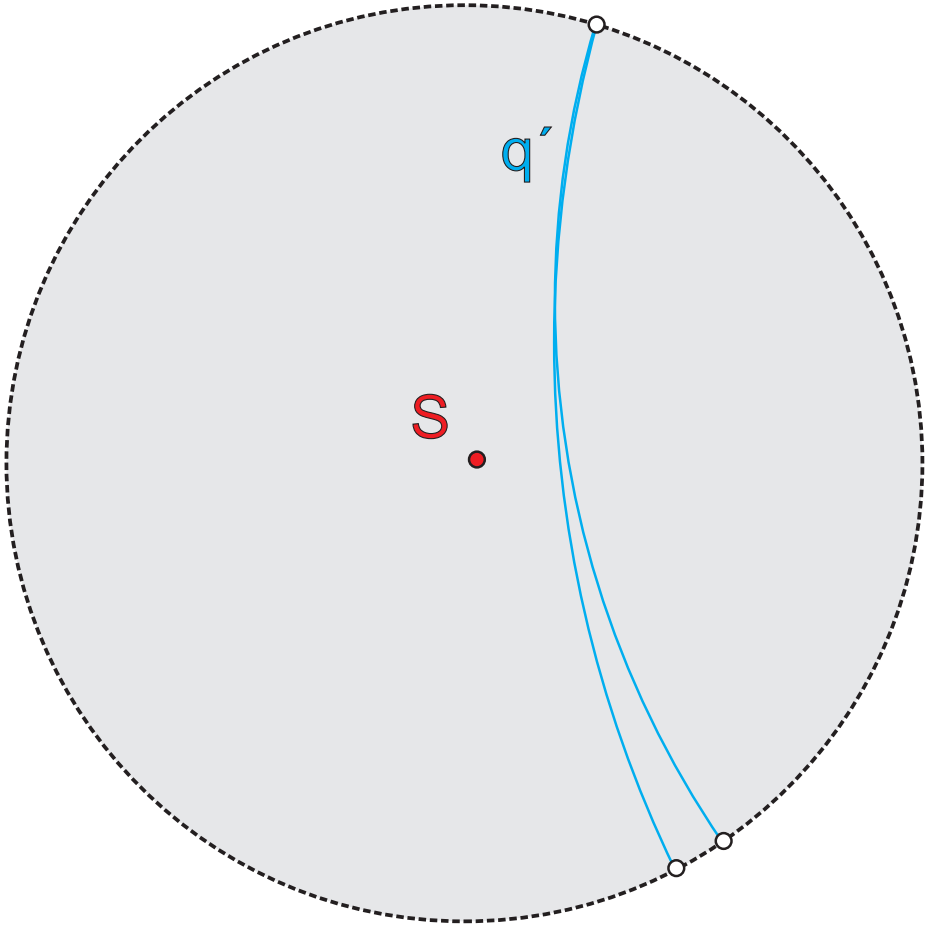
Poincarého model hyperbolické roviny



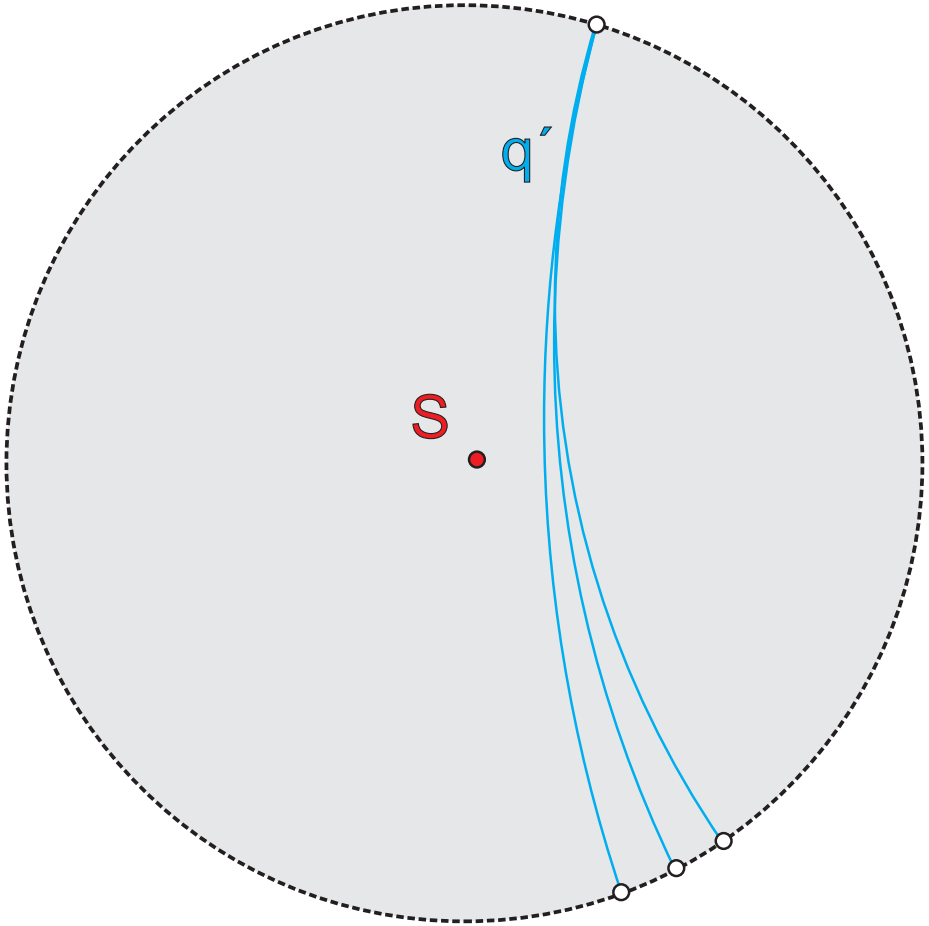
Poincarého model hyperbolické roviny



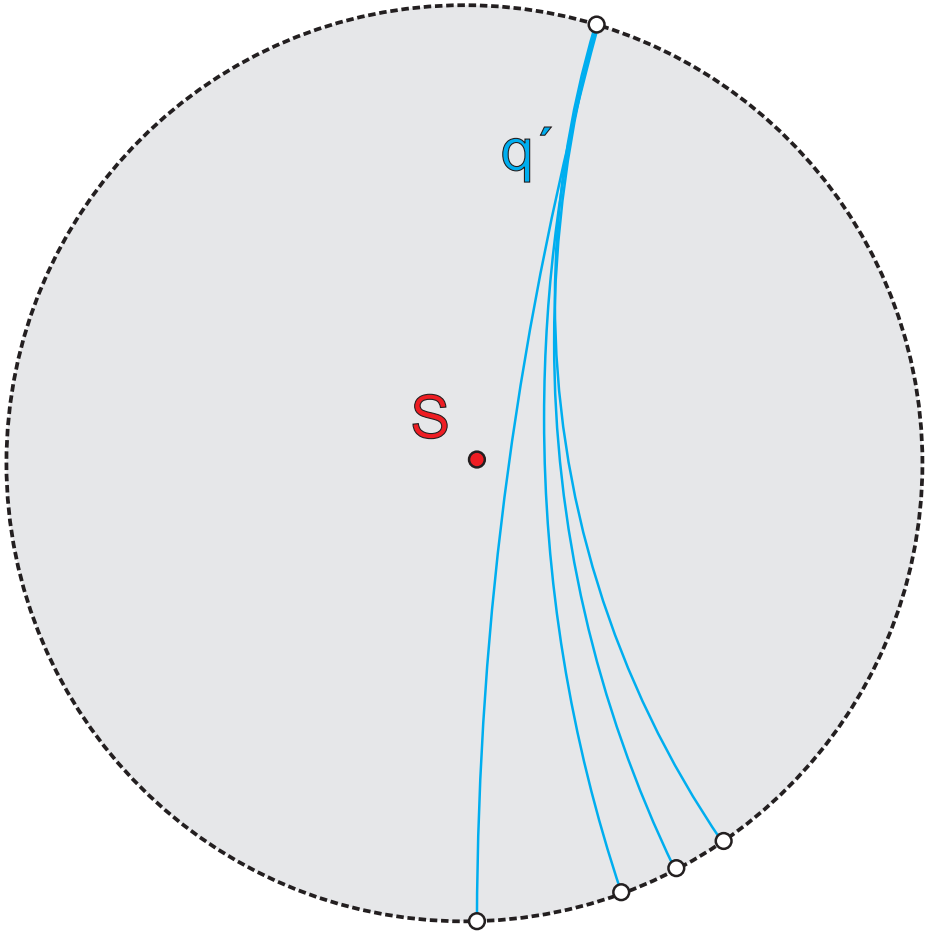
Poincarého model hyperbolické roviny



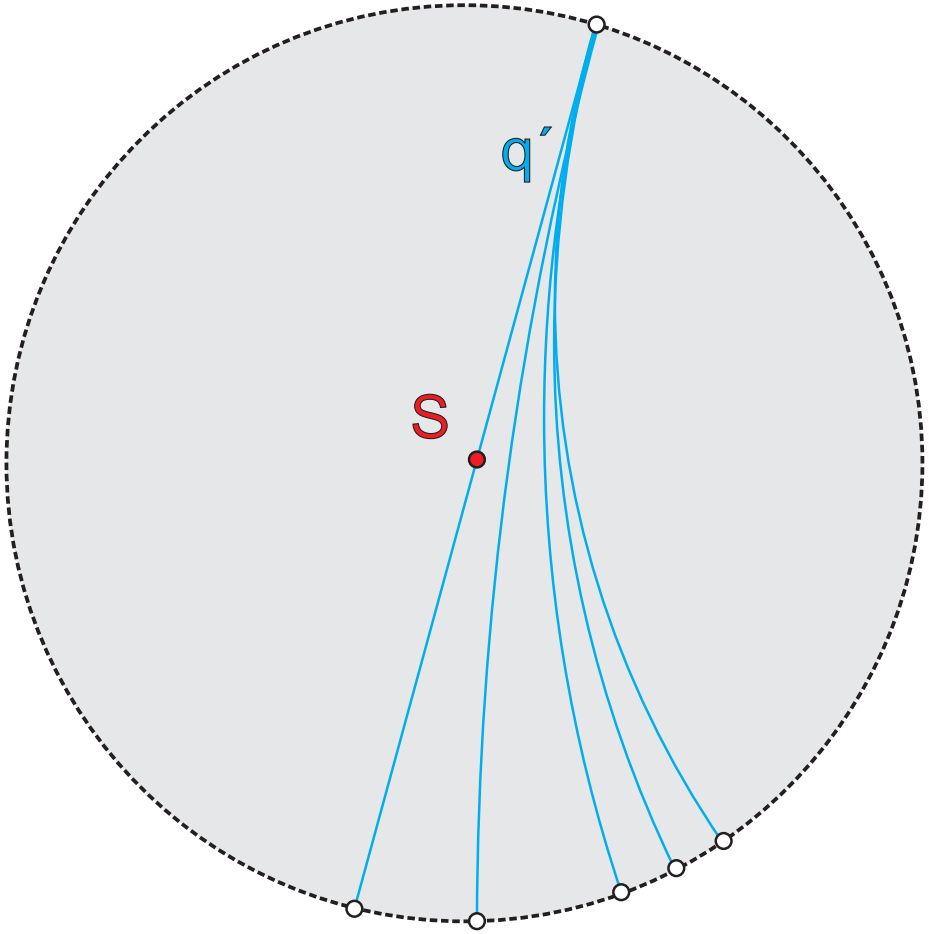
Poincarého model hyperbolické roviny



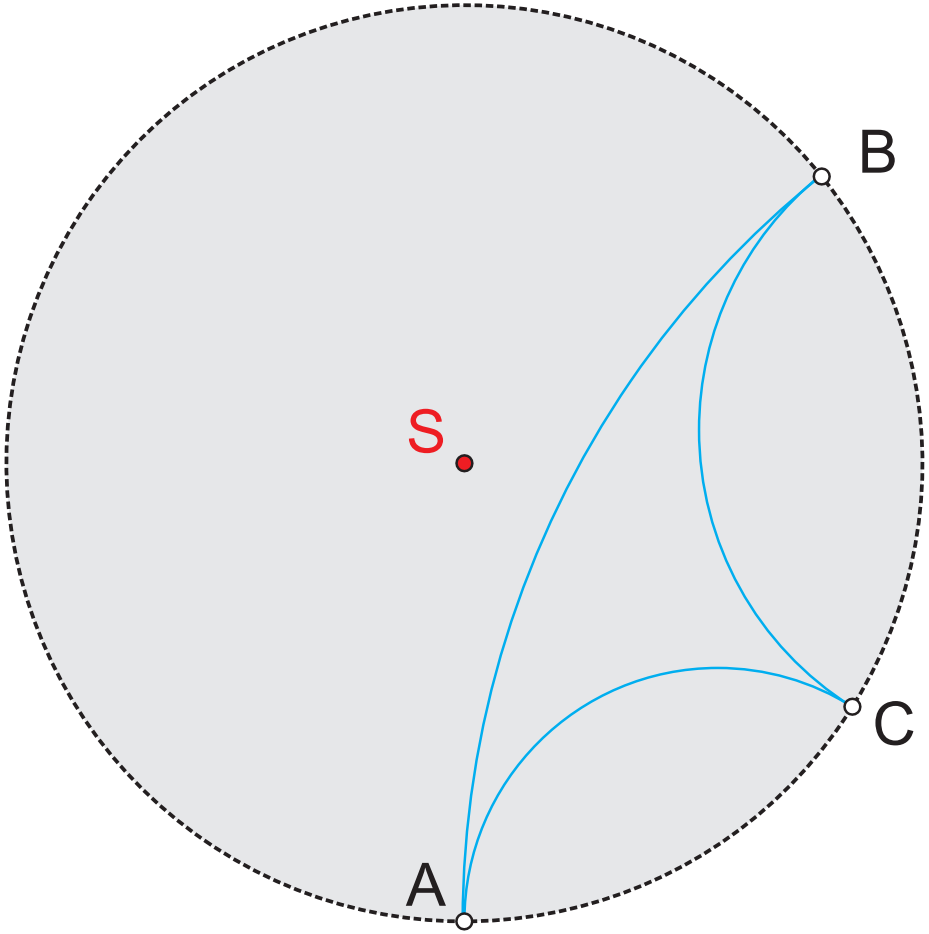
Poincarého model hyperbolické roviny



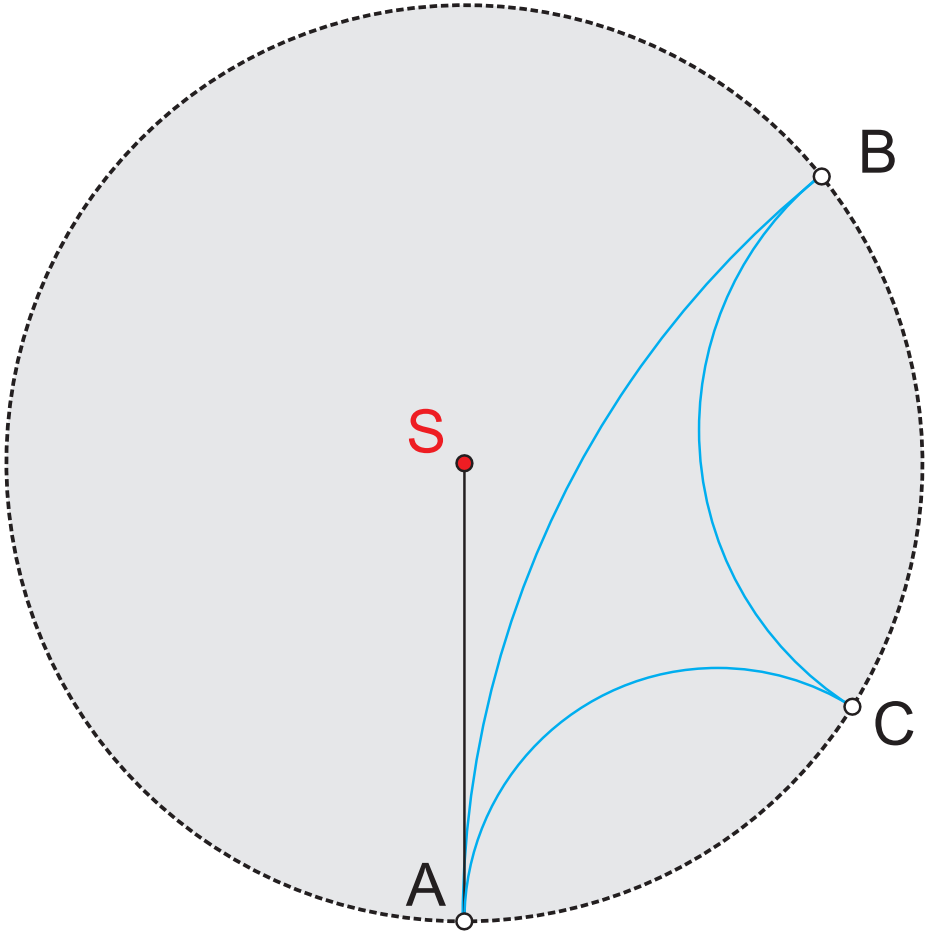
Poincarého model hyperbolické roviny



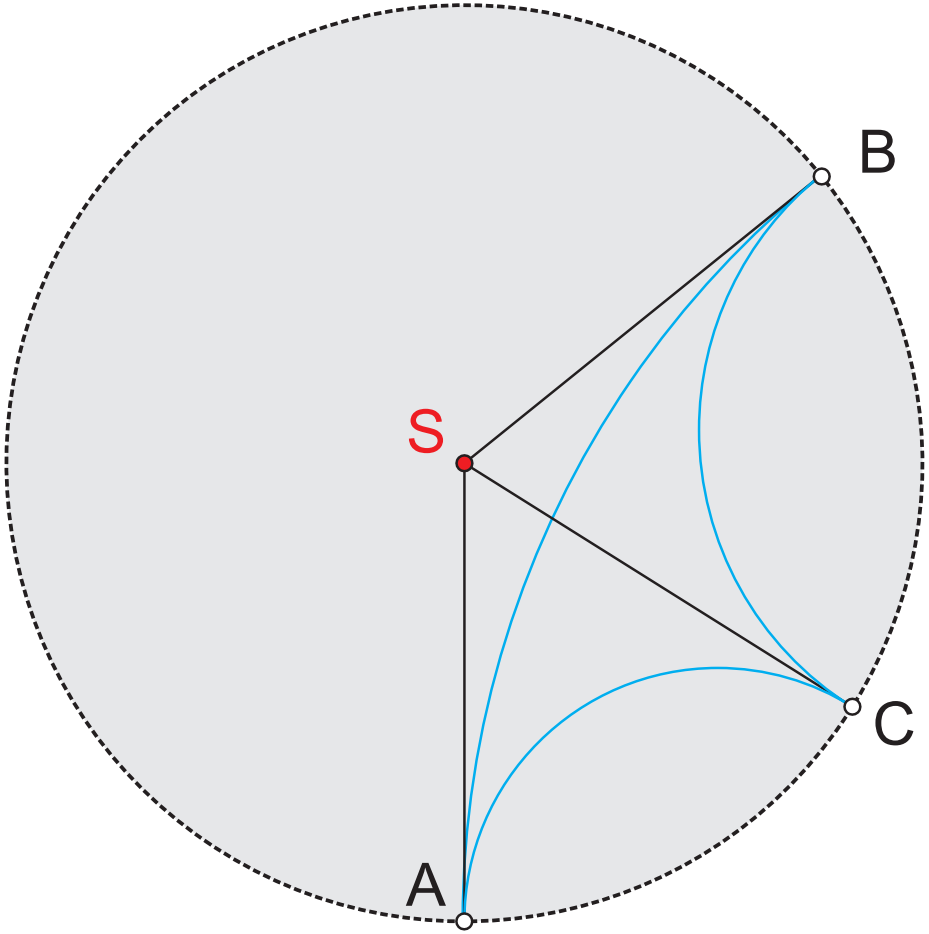
Poincarého model - součet úhlů v trojúhelníku



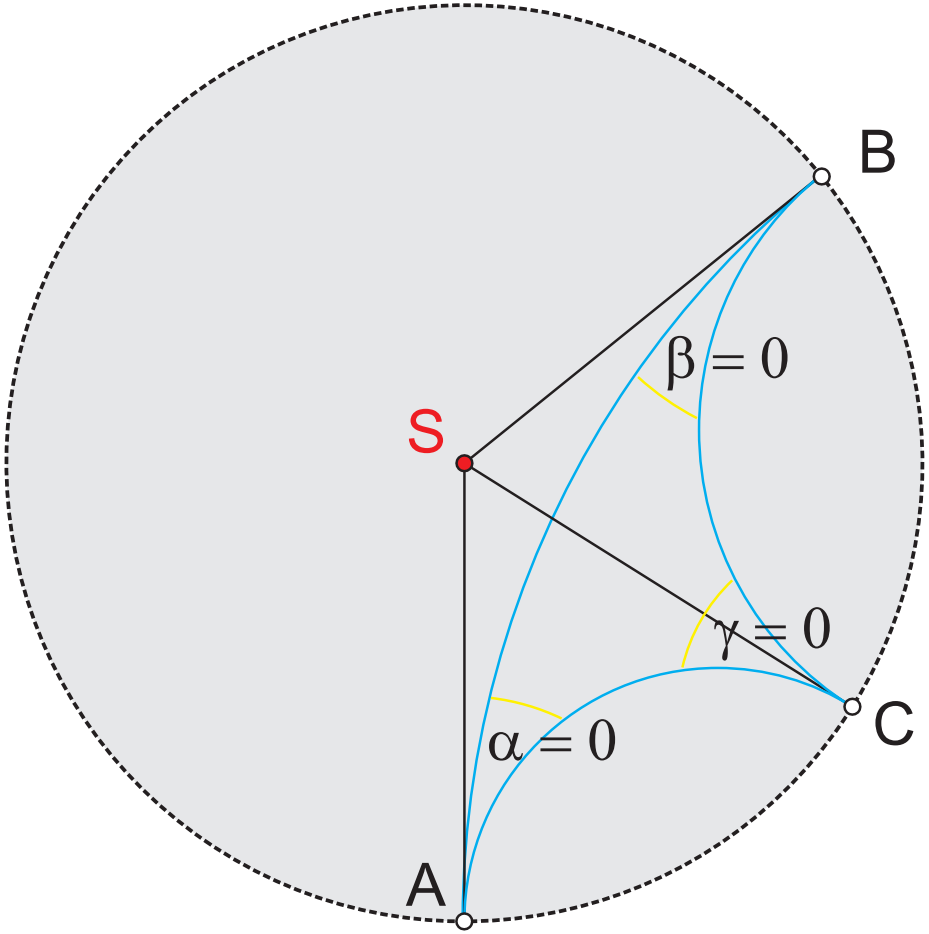
Poincarého model - součet úhlů v trojúhelníku



Poincarého model - součet úhlů v trojúhelníku

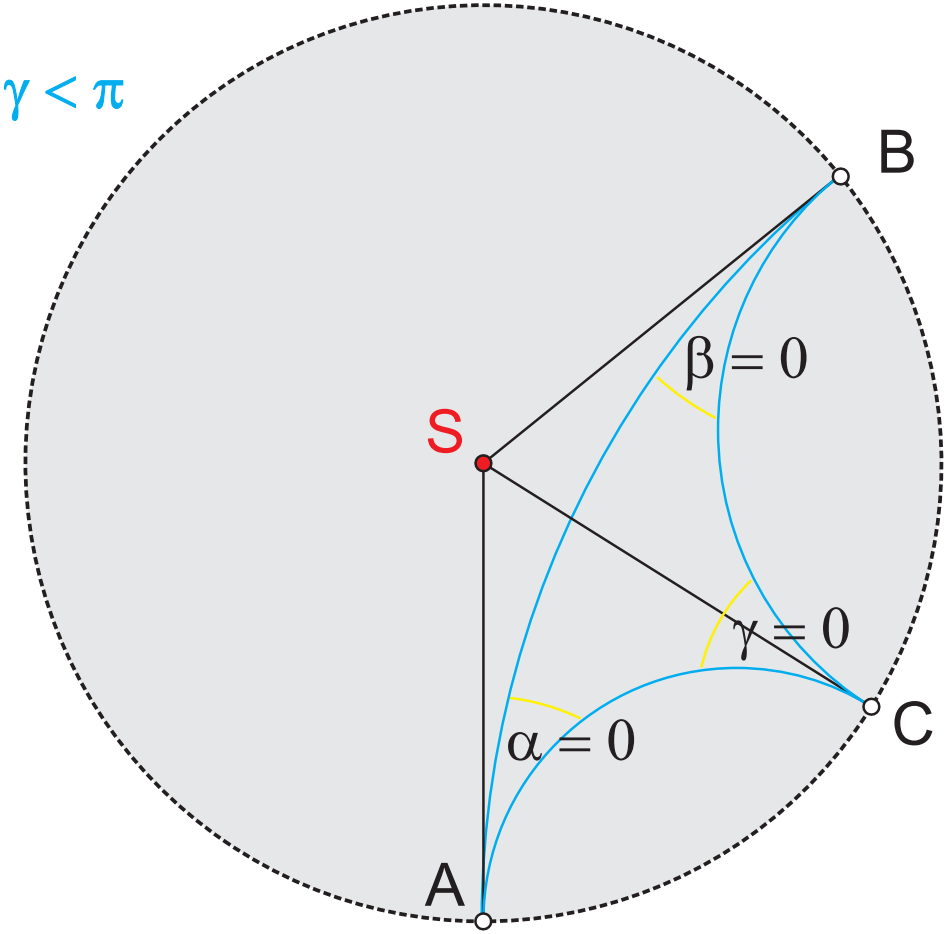


Poincarého model - součet úhlů v trojúhelníku



Poincarého model - součet úhlů v trojúhelníku

$\alpha + \beta + \gamma < \pi$



Eliptická geometrie

Axiom rovnoběžnosti: R: Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.

Eliptická geometrie

Axiom rovnoběžnosti: R: Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.

A lze dokázat, že pak taková přímka existuje právě jedna.

Eliptická geometrie

Axiom rovnoběžnosti: R: Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.
A lze dokázat, že pak taková přímka existuje právě jedna.

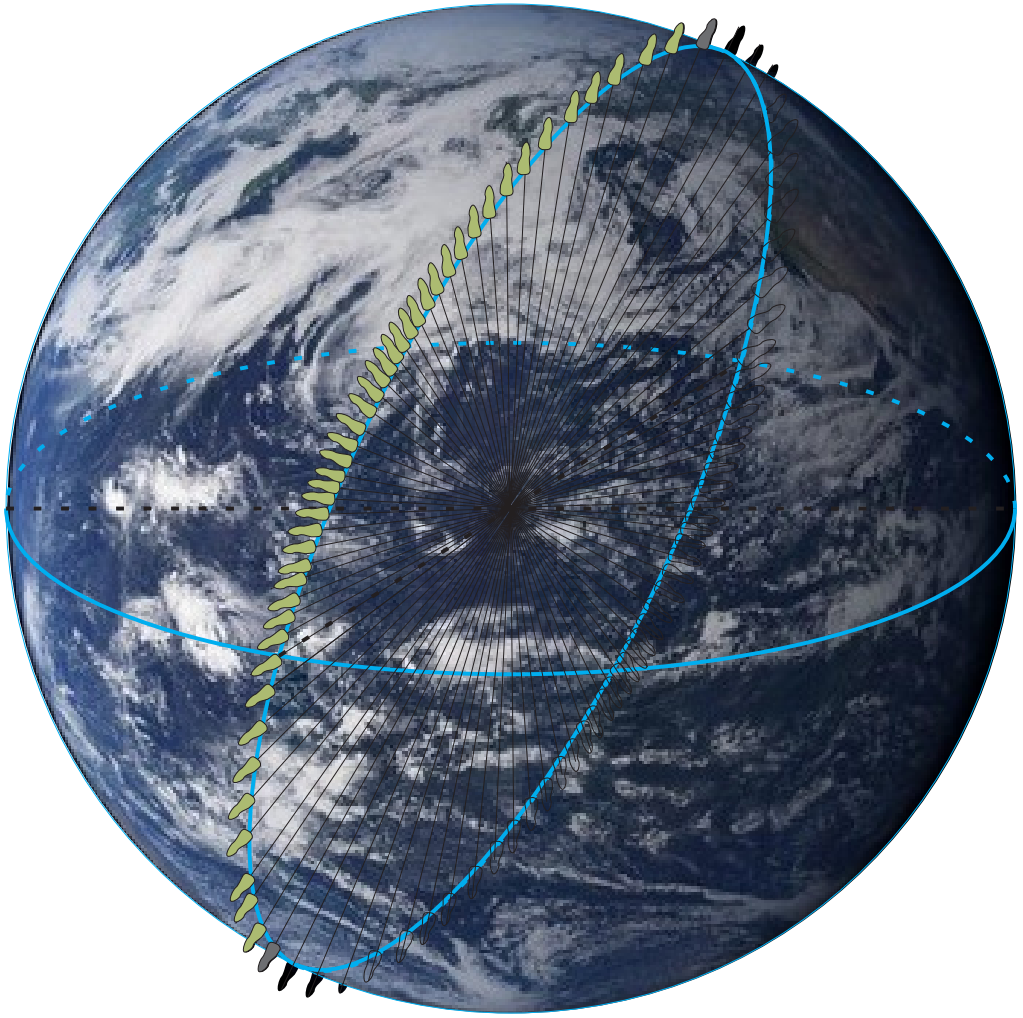
Lobačevského axiom: L: Existují přímka p a bod A, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem A neprotínají přímku p.

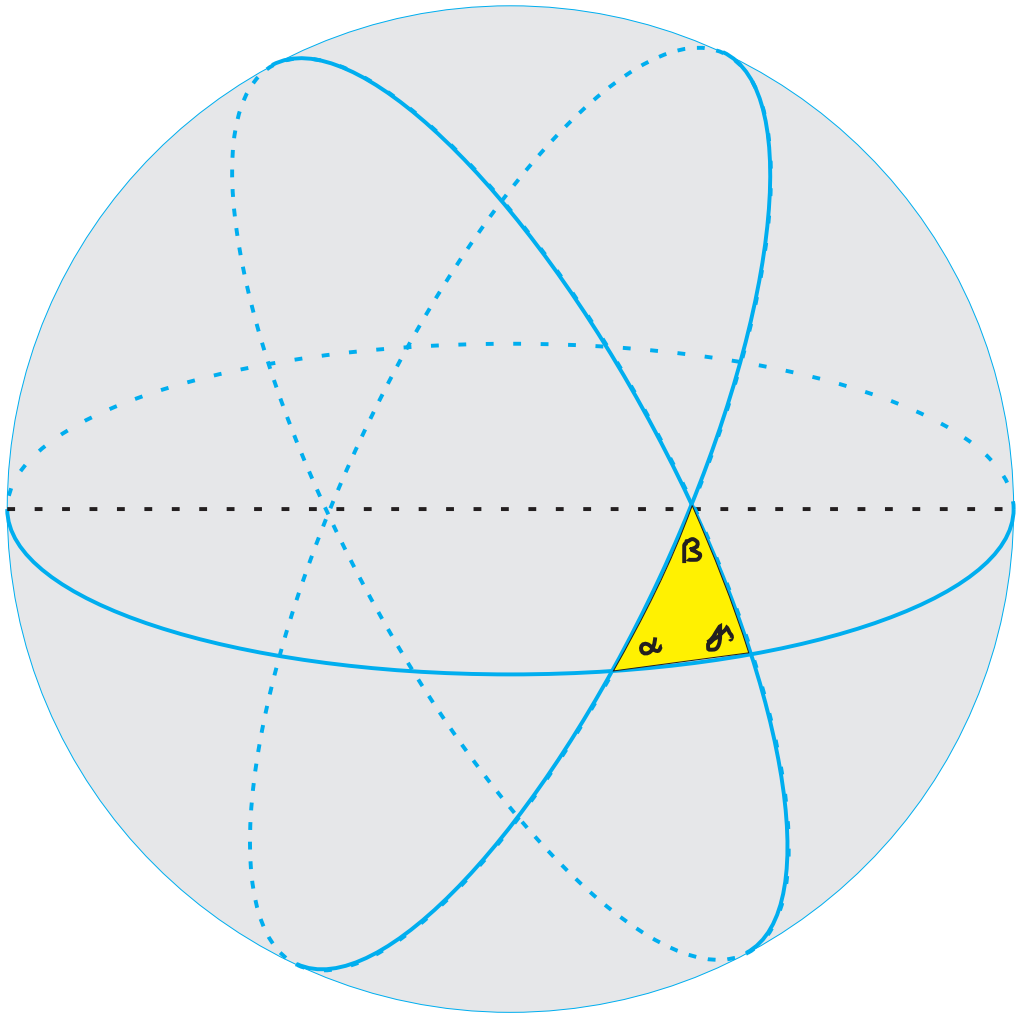
Eliptická geometrie

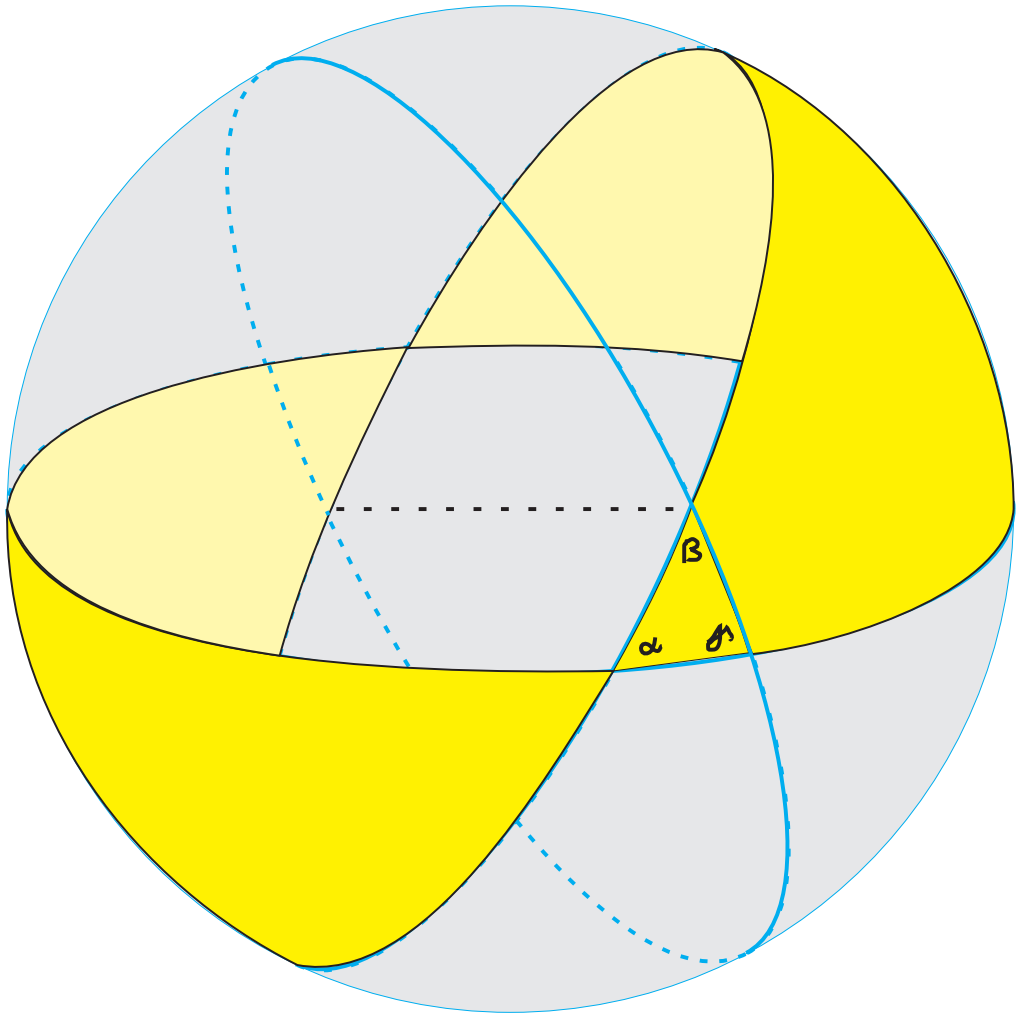
Axiom rovnoběžnosti: R: Nechť jsou dány přímka p a bod $A \notin p$. Potom v rovině Ap existuje nejvýše jedna přímka r taková, že $A \in r$ a $p \cap r = \emptyset$.
A lze dokázat, že pak taková přímka existuje právě jedna.

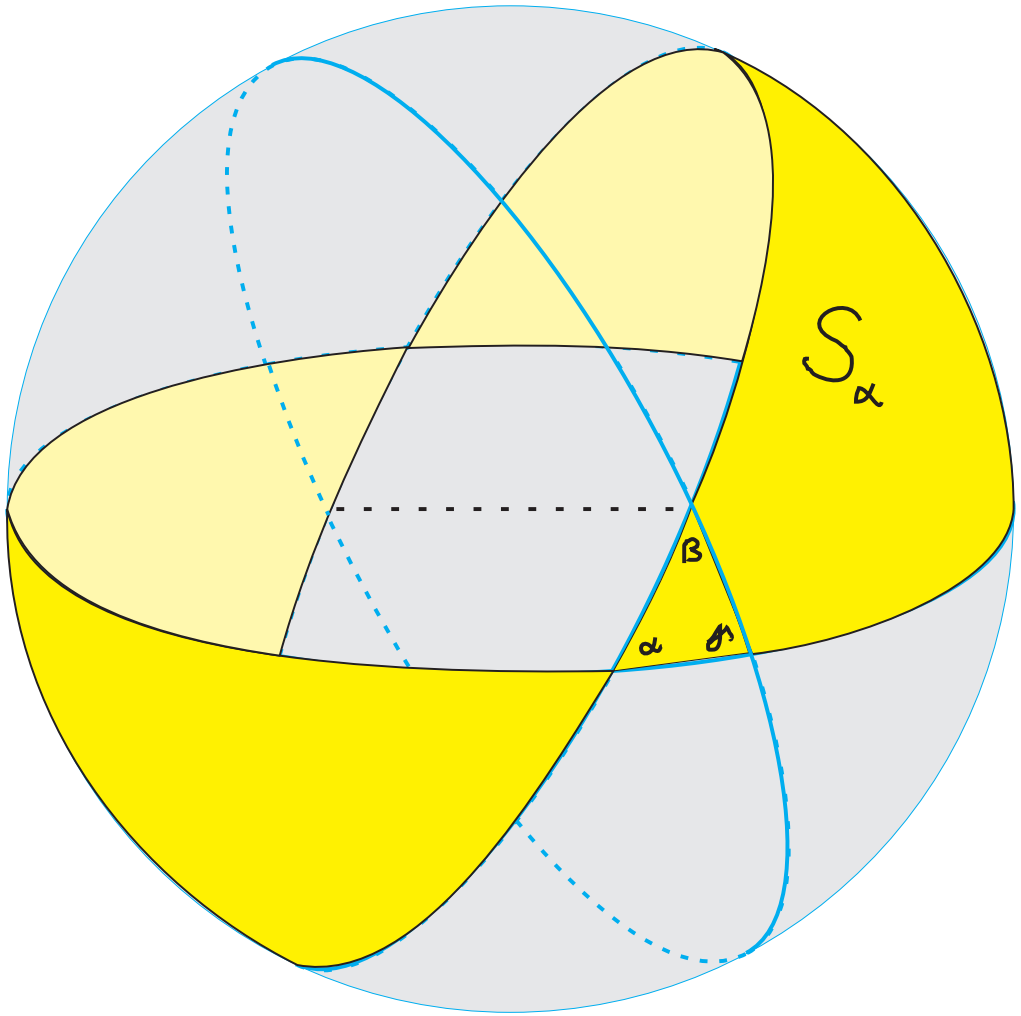
Lobačevského axiom: L: Existují přímka p a bod A, který na ní neleží, takové, že alespoň dvě různé přímky jdoucí bodem A neprotínají přímku p.

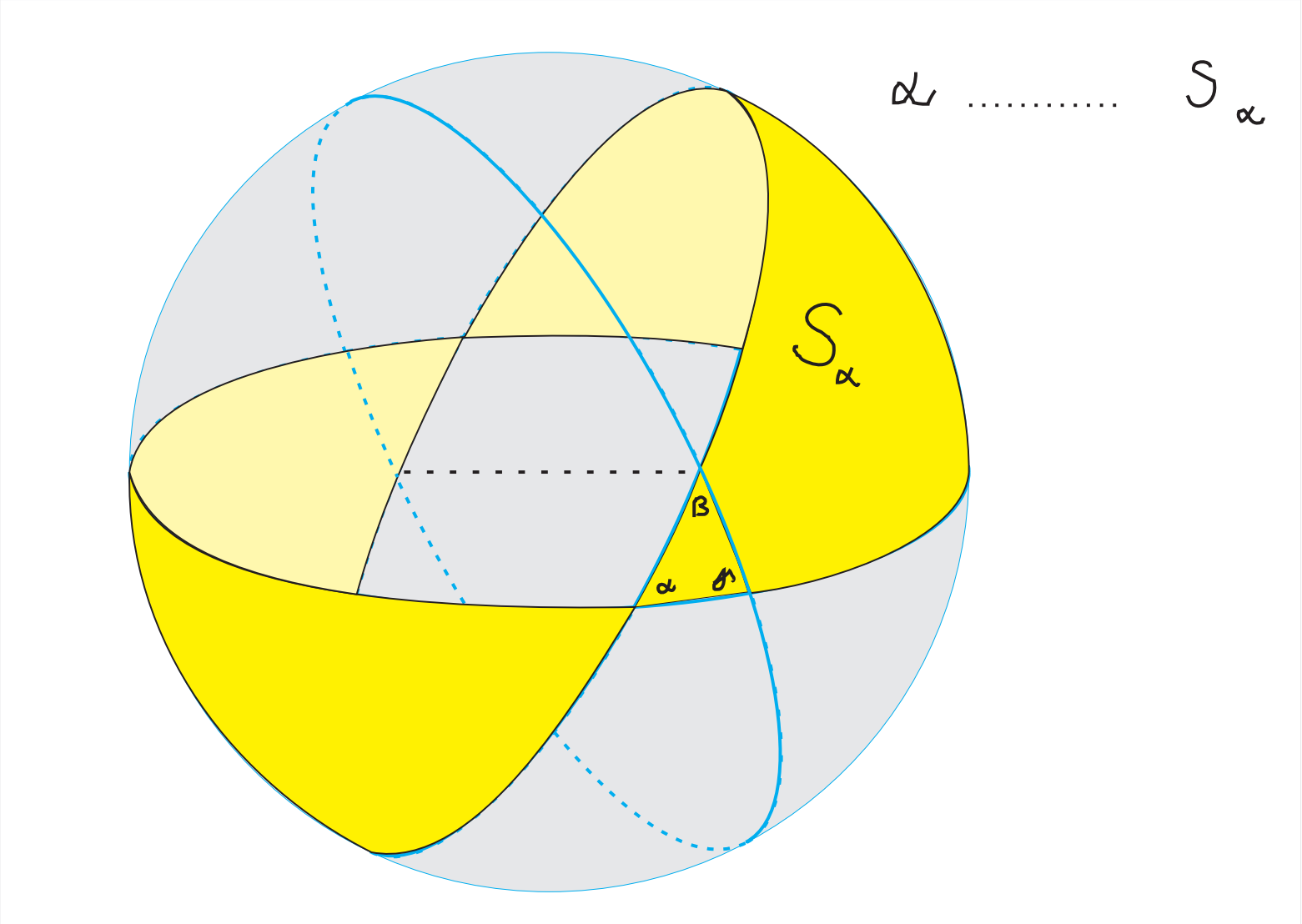
E: Existují přímka p a bod A, který na ní neleží, takové, že všechny přímky jdoucí bodem A přímku p protínají.

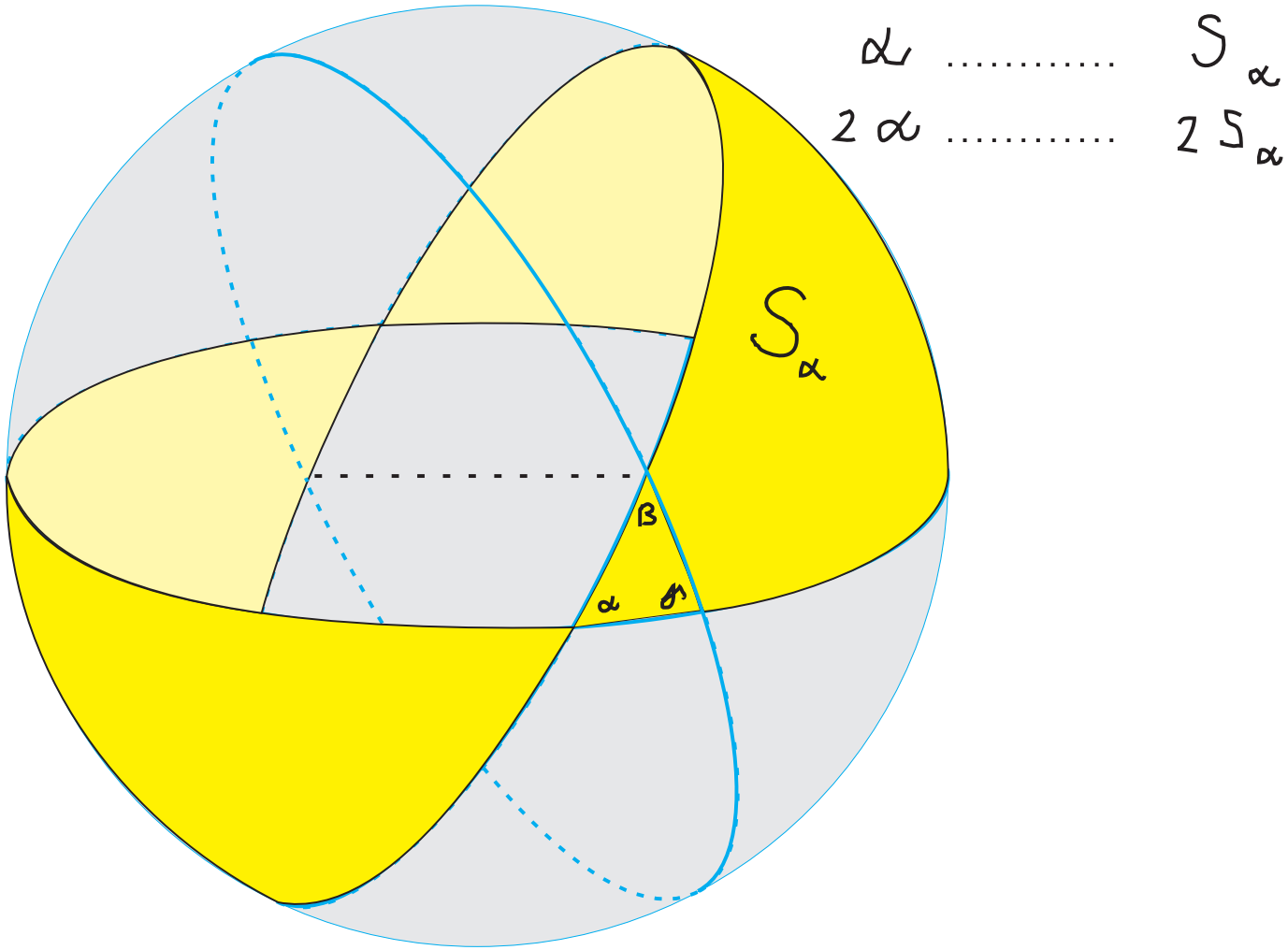


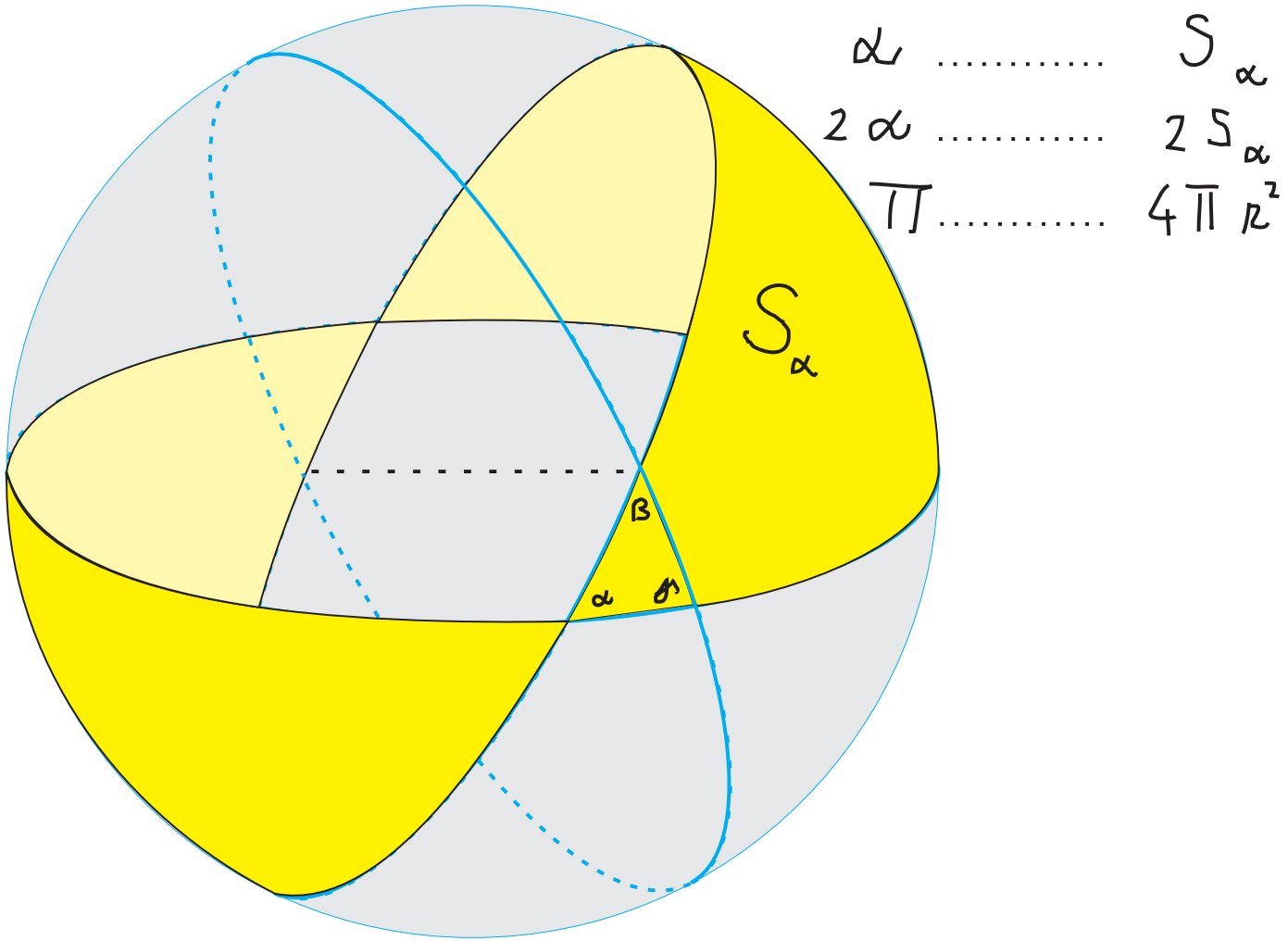

β
α
γ


β
α
γ


S_α
β
α
γ


α ..... S α
S α
β
α
δ

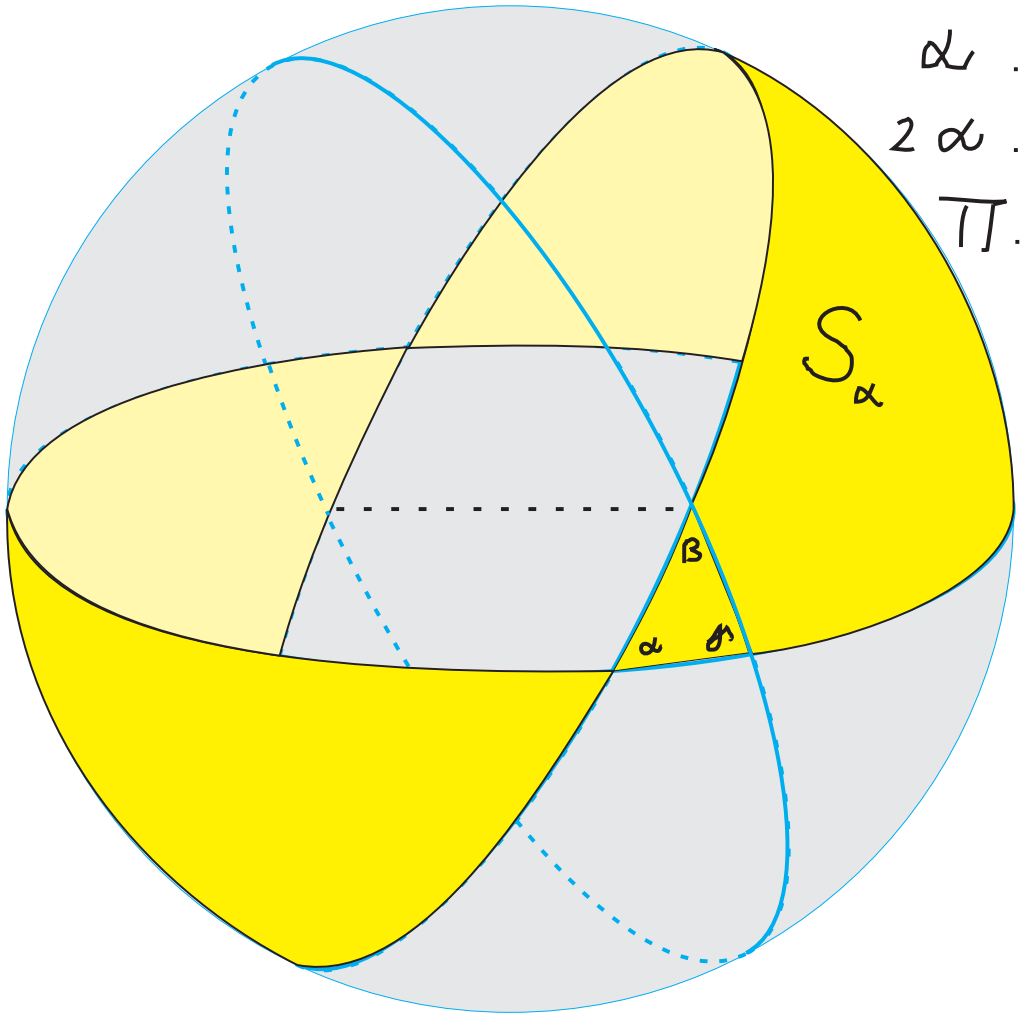

α ..... S α
2 α ..... 2 S α
S α
β
α



α ..... S_α

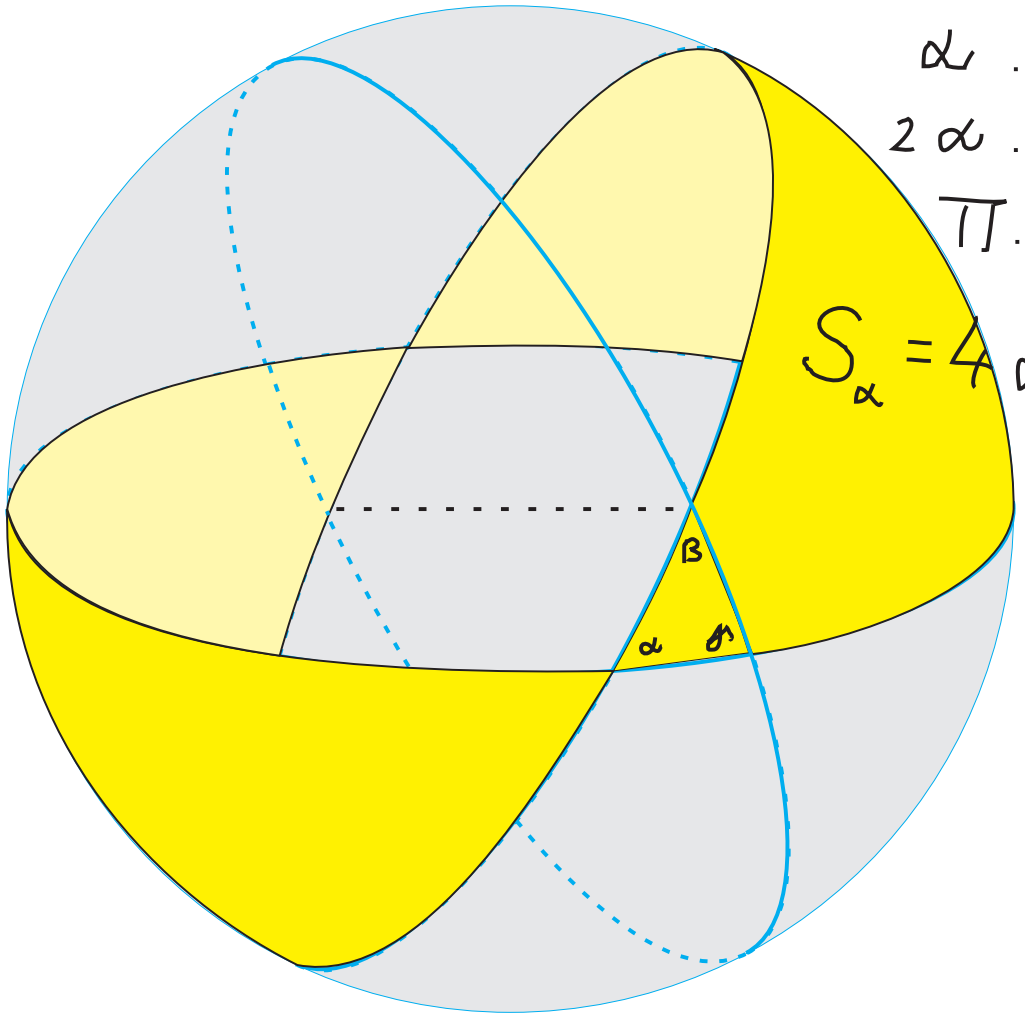
2α ..... $2S_\alpha$

π ..... $4\pi r^2$



$$\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; S_\alpha$$
$$2\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2S_\alpha$$
$$\pi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 4\pi r^2$$

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{S_\alpha}{4\pi r^2}$$

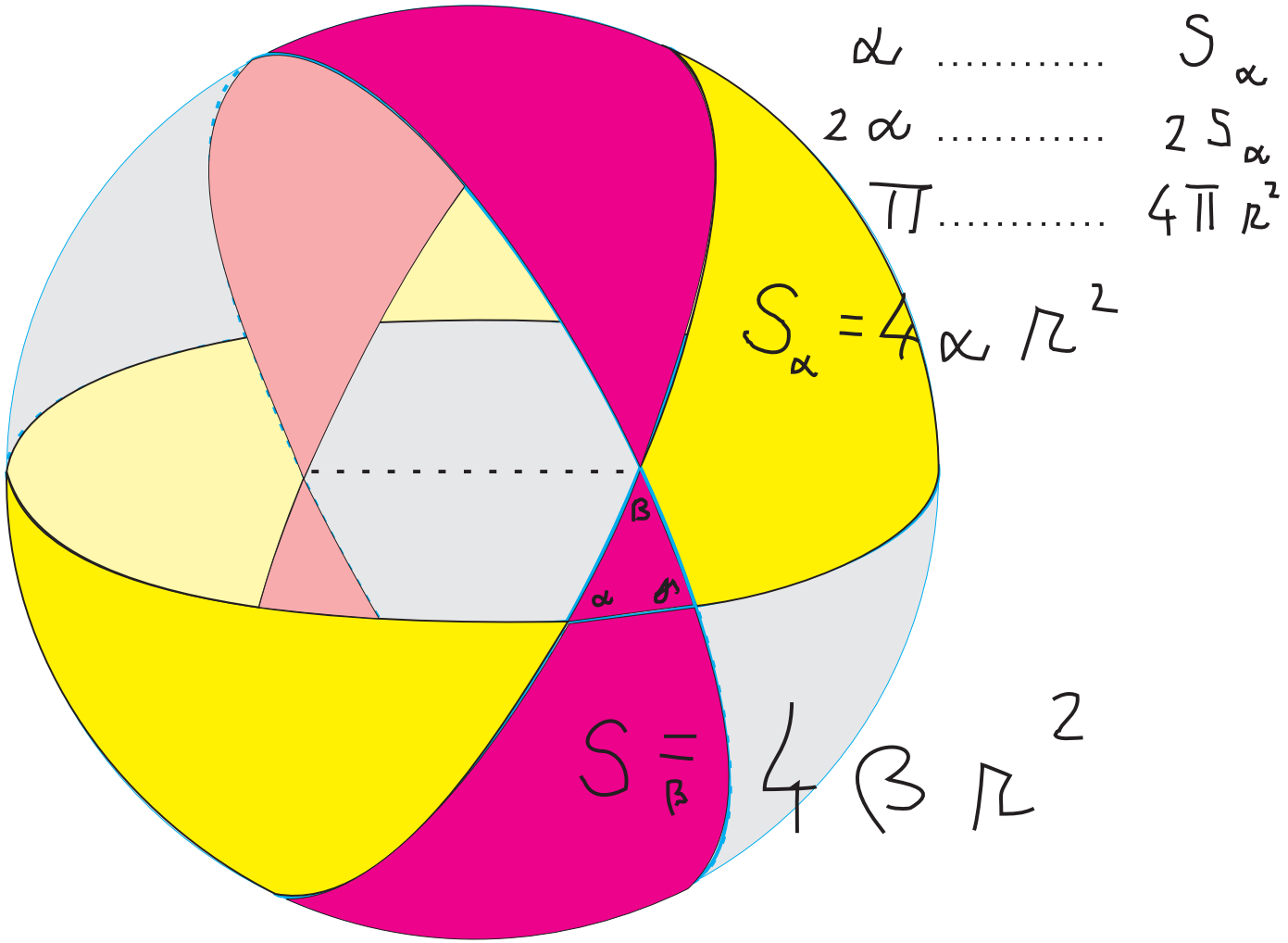


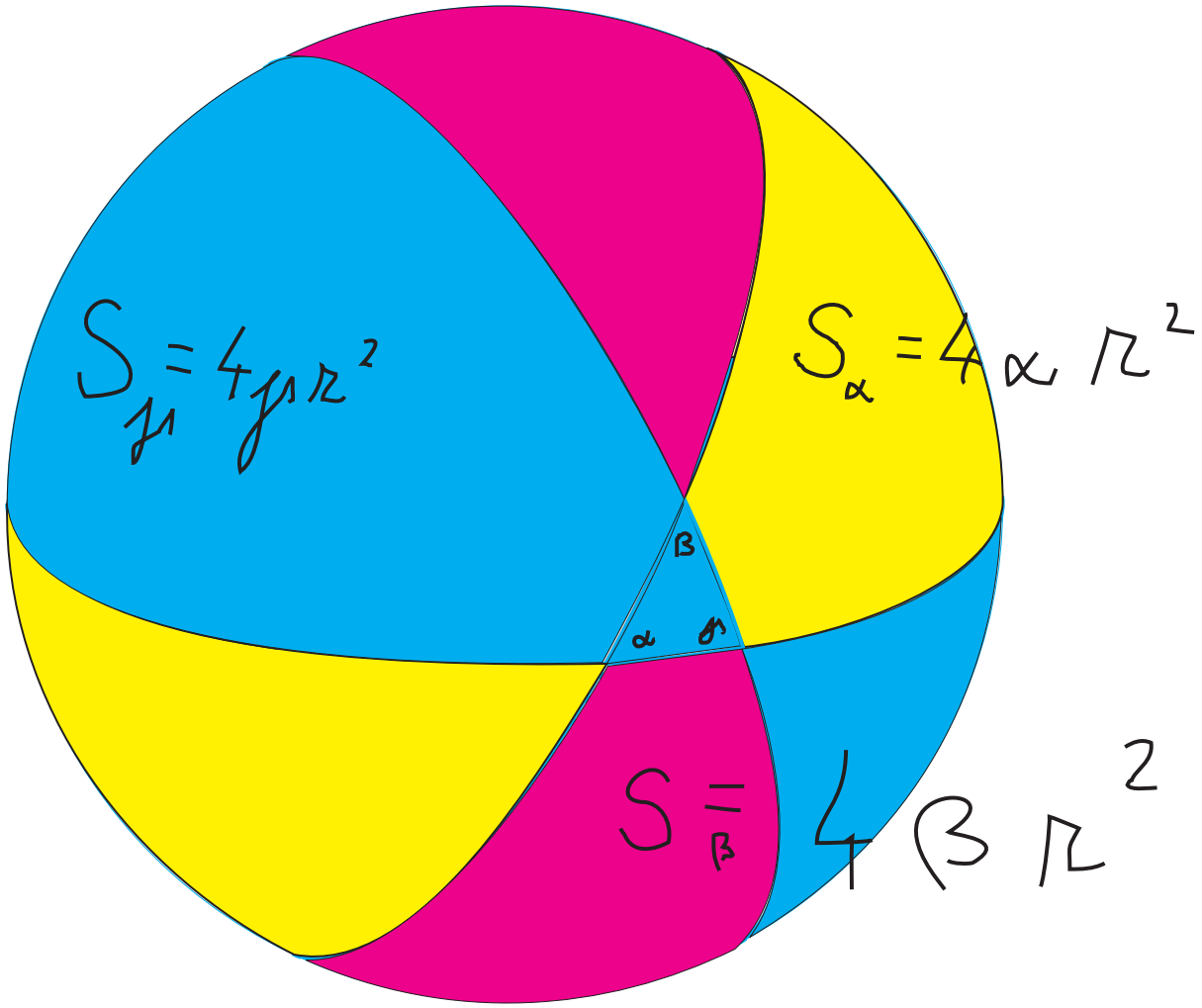
α ..... S_α

2α ..... $2S_\alpha$

π ..... $4\pi r^2$

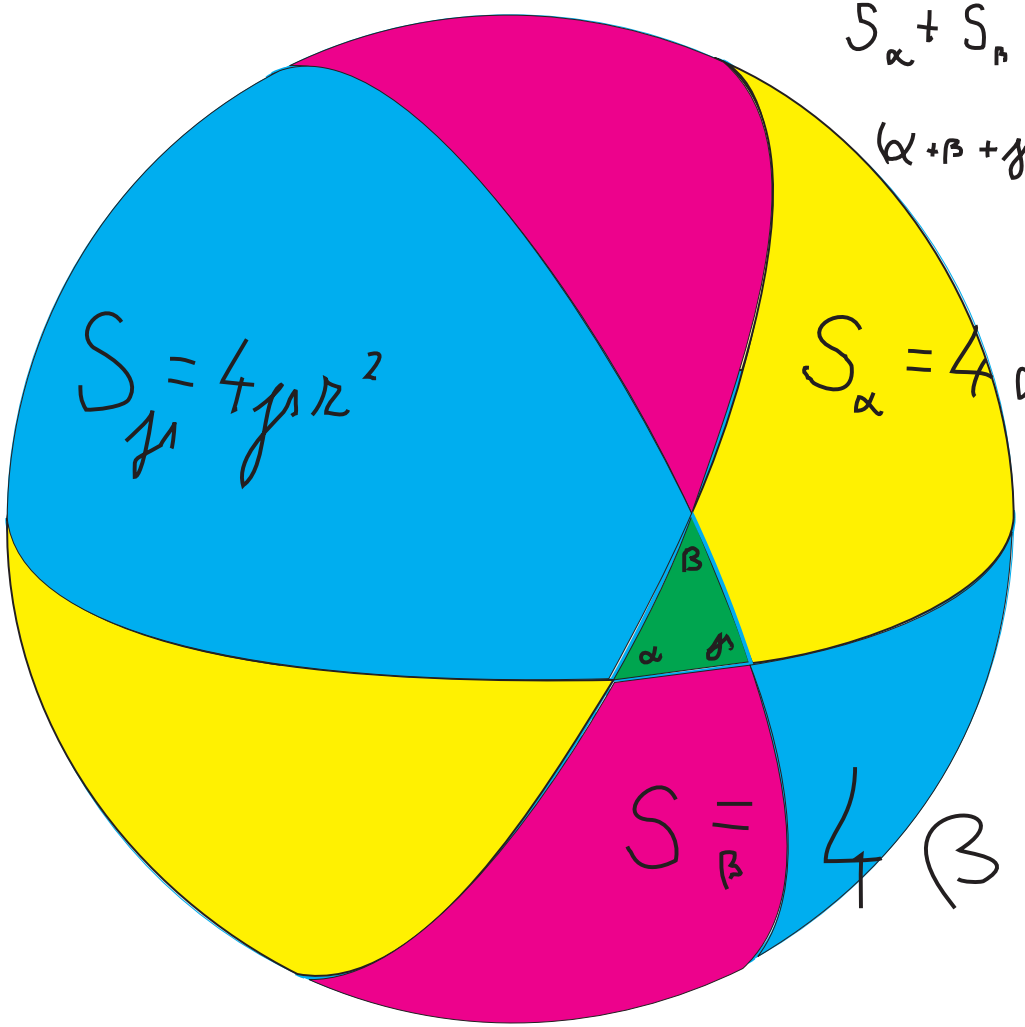
$$S_\alpha = 4\alpha r^2$$

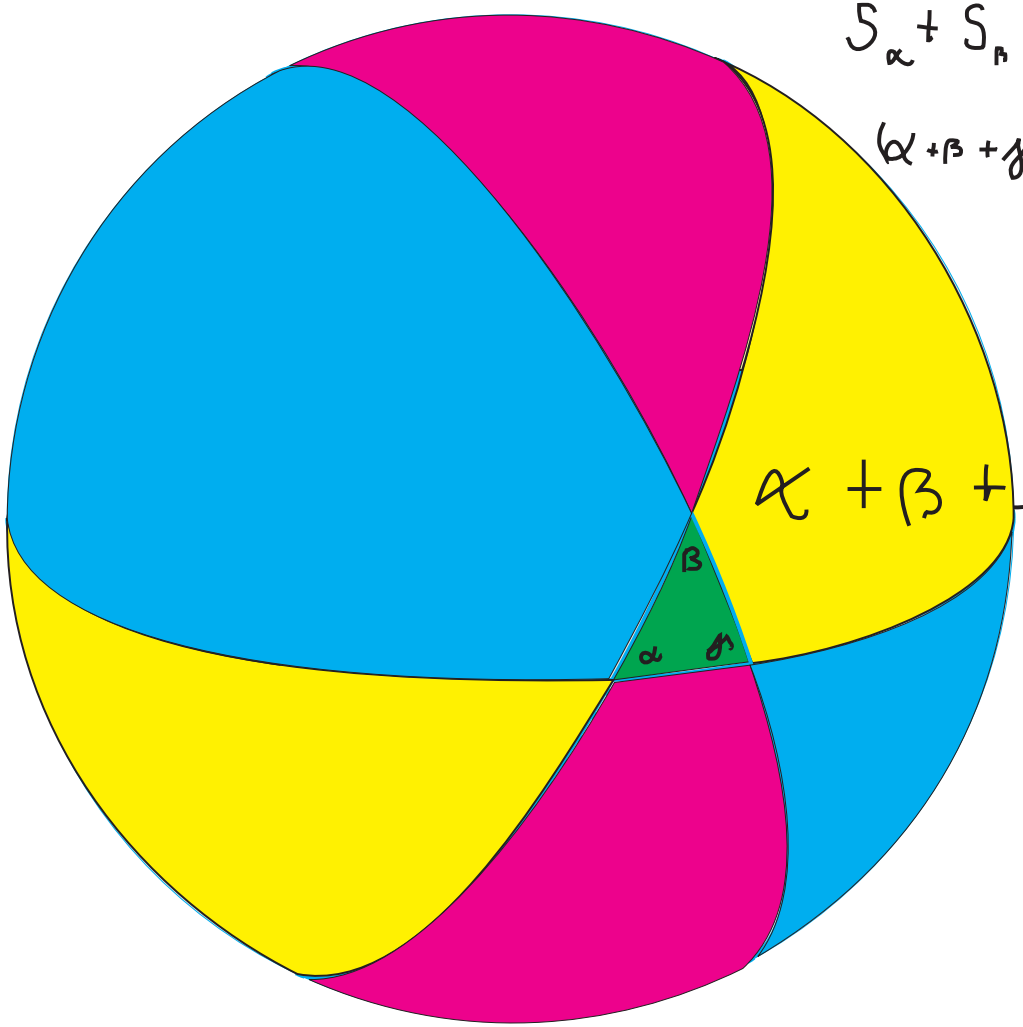

α ..... S_α
2α ..... 2S_α
π 4πr²
S_α = 4αr²
β
α
S_β = 4βr²


$S_\gamma = 4\gamma r^2$
$S_\alpha = 4\alpha r^2$
β
α
γ
$S_\beta = 4\beta r^2$

$$S_\alpha + S_\beta + S_\gamma = 4\pi r^2 + 4S_\Delta$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)4r^2 = 4\pi r^2 + 4S_\Delta$$





$$S_\alpha + S_\beta + S_\gamma = 4\pi r^2 + 4S_\Delta$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)4r^2 = 4\pi r^2 + 4S_\Delta$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S_\Delta}{r^2}$$