O Jensenově nerovnosti

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

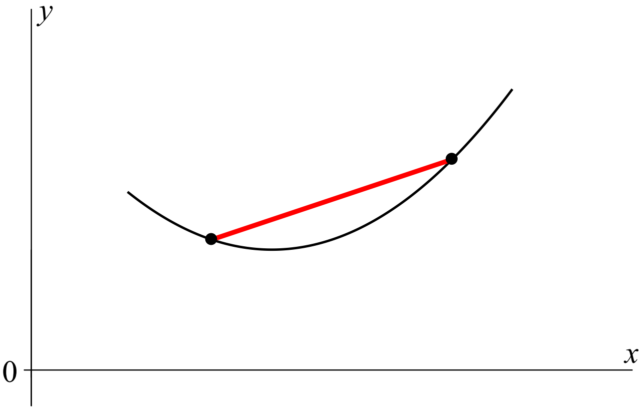
Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

Katedra
aplikované
matematiky

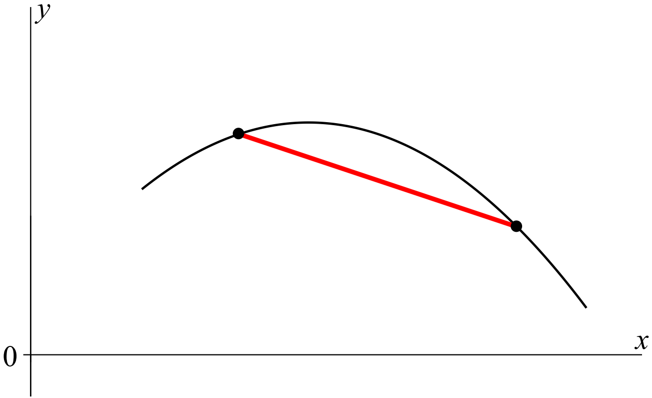
Ostrava, 28.1. 2019

(ŠKOMAM 2019)

Ryze konvexní funkce



Ryze konkávní funkce



Věta (Jensenova nerovnost)

Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

resp.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Věta (Jensenova nerovnost)

Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

resp.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Rovnost přitom nastane, právě když platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Věta (Jensenova nerovnost)

Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, platí

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

resp.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Rovnost přitom nastane, právě když platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz.

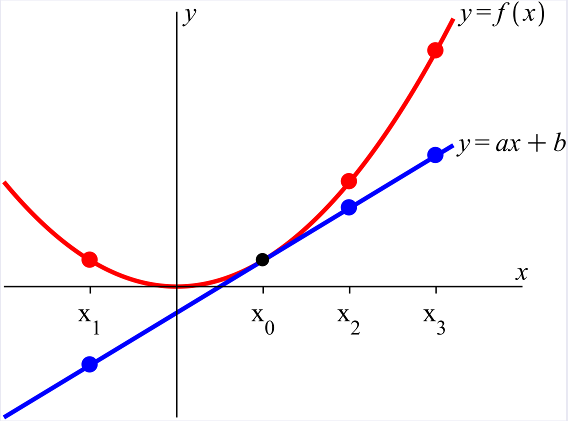
Lze provést např. indukcí vzhledem k n. $\square$

Důkaz.

My si ukážeme jiný (pěknější) důkaz.

Důkaz.

My si ukážeme jiný (pěknější) důkaz.



□

Důsledek

Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Důsledek

Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důsledek

Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ platí

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz.

Tvrzení plyne přímo z Jensenovy nerovnosti. Stačí zvolit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}.$$

□

Věta (AG–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \tag{AG}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Věta (AG–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{AG}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz.

Použijeme důsledek Jensenovy nerovnosti a ryzí konkávnosti funkce $f(x) = \log x$ na intervalu $(0, +\infty)$. Pro libovolná kladná $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tedy platí

$$\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n}{n},$$

což po úpravě dává AG–nerovnost (pro kladná $x_1, x_2, \ldots, x_n$). $\square$

Věta (AK–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{AK}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$*.*

Věta (AK–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{AK}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz.

V první řadě si uvědomme, že funkce $f(x) = x^2$ je ryze konvexní.

Věta (AK–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \tag{AK}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz.

V první řadě si uvědomme, že funkce $f(x) = x^2$ je ryze konvexní.
Poté použijeme nerovnost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

ze které plyne

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}.$$

$\square$

Příklad

Uvažujme (velmi důležitou) posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Dokažte, že tato posloupnost je rostoucí, tzn. pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} > a_n$.

Příklad

Uvažujme (velmi důležitou) posloupnost $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Dokažte, že tato posloupnost je rostoucí, tzn. pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} > a_n$.

Důkaz.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ krát}} \overset{\text{AG}}{<}$$

$$\overset{\text{AG}}{<} \left(\frac{1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

□

Příklad

Ze všech trojúhelníků s vnitřními úhly α, β, γ *najděte ten, pro který je hodnota výrazu* $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ *maximální.*

Příklad

Ze všech trojúhelníků s vnitřními úhly α, β, γ *najděte ten, pro který je hodnota výrazu* $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ *maximální.*

Řešení.

Použijeme AG–nerovnost a poté důsledek Jensenovy nerovnosti pro funkci $\sin x$, která je ryze konkávní na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Máme tedy

$$\sqrt[3]{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \overset{\text{AG}}{\leq} \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \overset{\text{Jensen}}{\leq}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Příklad

Ze všech trojúhelníků s vnitřními úhly α, β, γ najděte ten, pro který je hodnota výrazu $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ maximální.

Řešení.

Použijeme AG–nerovnost a poté důsledek Jensenovy nerovnosti pro funkci $\sin x$, která je ryze konkávní na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Máme tedy

$$\sqrt[3]{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \overset{\text{AG}}{\leq} \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \overset{\text{Jensen}}{\leq}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Příklad

Ze všech trojúhelníků s vnitřními úhly α, β, γ *najděte ten, pro který je hodnota výrazu* $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$ *maximální.*

Řešení.

Použijeme AG–nerovnost a poté důsledek Jensenovy nerovnosti pro funkci $\sin x$, která je ryze konkávní na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Máme tedy

$$\sqrt[3]{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \overset{\text{AG}}{\leq} \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \overset{\text{Jensen}}{\leq}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, tj. právě když se jedná o rovnostranný trojúhelník. $\square$

Příklad

Najděte obdélník daného obvodu o, jehož úhlopříčka má minimální velikost.

Příklad

Najděte obdélník daného obvodu o, jehož úhlopříčka má minimální velikost.

Nápověda.

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \overset{\text{AK}}{\geq} \sqrt{2}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{o\sqrt{2}}{4}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. $\square$

Příklad

Najděte obdélník daného obvodu o, jehož úhlopříčka má minimální velikost.

Nápověda.

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \overset{\text{AK}}{\geq} \sqrt{2}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{o\sqrt{2}}{4}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. □

Příklad

Najděte trojúhelník daného obvodu $o = 2s$, který má největší obsah.

Příklad

Najděte obdélník daného obvodu o, jehož úhlopříčka má minimální velikost.

Nápověda.

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \overset{\text{AK}}{\geq} \sqrt{2}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{o\sqrt{2}}{4}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. □

Příklad

Najděte trojúhelník daného obvodu $o = 2s$, který má největší obsah.

Nápověda.

$$S^2 = s \cdot (s-a)(s-b)(s-c) \overset{\text{AG}}{\leq} s \cdot \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^4}{27}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b = c$, tj. když se jedná o rovnostranný trojúhelník. □

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Důkaz.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a-2x)^2 \cdot x$.

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Důkaz.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a-2x)^2 \cdot x$.

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{\mathrm{AG}}{\leq} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3.$$

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Důkaz.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a-2x)^2 \cdot x$.

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a - 2x = 4x$, tj. $x = \frac{a}{6}$. □

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Důkaz.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a-2x)^2 \cdot x$.

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{AG}{\leq} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a-2x = 4x$, tj. $x = \frac{a}{6}$. $\square$

Poznámka

Můžete se zkusit zamyslet nad tím, jak by se řešil případ, kdyby původní plech nebyl čtvercový, ale obdélníkový (např. 7×15).

Příklad

Do daného kruhu vepište n–úhelník ($n \geq 3$ je dané) tak, aby jeho obvod byl maximální.

Příklad

Do daného kruhu vepište n–úhelník ($n \geq 3$ je dané) tak, aby jeho obvod byl maximální.

Důkaz.

$$o = 2R \cdot \left(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} + \cdots + \sin\frac{\alpha_n}{2}\right) \overset{\text{Jensen}}{\leq}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} 2R \cdot n \sin\left(\frac{\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2}}{n}\right) = 2R \cdot n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Příklad

Do daného kruhu vepište n–úhelník ($n \geq 3$ je dané) tak, aby jeho obvod byl maximální.

Důkaz.

$$o = 2R \cdot \left(\sin\frac{\alpha_1}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} + \cdots + \sin\frac{\alpha_n}{2}\right) \overset{\text{Jensen}}{\leq}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} 2R \cdot n \sin\left(\frac{\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2}}{n}\right) = 2R \cdot n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Rovnost nastane, právě když $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, tj. když je n–úhelník pravidelný. □

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Důkaz.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$.

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Důkaz.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$.

Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{\text{AG}}{\geq} 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Důkaz.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$.

Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Rovnost nastane, právě když $2\pi r^2 = \frac{V}{r}$, tj. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$ (tzv. rovnostranný válec). □

Příklad

Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v je vepsán rotační válec s maximálním objemem. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.

Příklad

Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v je vepsán rotační válec s maximálním objemem. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.

Příklad

Do elipsy o poloosách a, b vepište obdélník tak, aby jeho strany byly rovnoběžné s osami elipsy a přitom jeho obsah byl maximální.

ŠKOMAM CUP

Najděte největší hodnotu výrazu $a^b \cdot b^a$, kde a a b jsou kladná reálná čísla splňující $a + b = 3$.

Děkuji za pozornost.