Jak vznikají diferenciální rovnice

Mgr. Bohumil KRAJC, Ph.D., KAM FEI, VŠB-TUO
bohumil.krajc@vsb.cz

Derivace funkce

Obyčejné diferenciální rovnice

- Rozpad radioaktivních látek
- Určení doby úmrtí

Derivace funkce

Derivace jako směrnice tečny:

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivace jako okamžitá rychlost:

$$f'(t_0) = \frac{\mathrm{d}f(t_0)}{\mathrm{d}t} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Derivací identity je 1

$$f(t) = t \Rightarrow$$

$$f'(t_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{t - t_0}{t - t_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Derivací konstanty je 0

$$f(t) = C \Rightarrow$$

$$f'(t_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{t - t_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Aditivita derivace

Derivace součtu je
rovna součtu derivací.

Derivace rozdílu je
rovna rozdílu derivací.

$$(f(t)+g(t))' = f'(t)+g'(t)$$

$$(f(t)-g(t))' = f'(t)-g'(t)$$

Konstantu při derivování lze vytknout

$$\forall C \in \Re :$$

$$(C \cdot f(t))' = C \cdot f'(t)$$

Exponenciále derivování nevadí

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{t})}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}$$

Důsledek

$$\forall C \in \Re :$$

$$\frac{\mathrm{d}(C\,\mathrm{e}^t)}{\mathrm{d}t} = C\,\mathrm{e}^t$$

Derivace složené funkce 1

Problém odlišného měření času:

Pozorovatel G měří čas třikrát pomaleji než F

$g(t)$ $\qquad f(x)$ $\qquad x = 3 \cdot t$

$$g(t) = f(3 \cdot t)$$

$$x = 3 \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$g'(t) = 3 \cdot f'(x)\Big|_{x=3t} = 3 \cdot f'(3t)$$

Derivace složené funkce 2

$$g(t) = f\left(C \cdot t\right) \Rightarrow g'(t) = C \cdot f'(Ct)$$

$$g(t) = f\left(y(t)\right) \Rightarrow g'(t) = f'(y(t)) \cdot y'(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(y(t))}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

Důsledek

$$\forall C \in \Re :$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{Ct}\right)}{\mathrm{d}t} = C\,\mathrm{e}^{Ct}$$

$$\forall C \in (0,\infty)\forall x \in (0,\infty) :$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\ln(Ct)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{Ct} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(Ct\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{Ct} \cdot C = \frac{1}{t}$$

Derivace součinu

$$f > 0, g > 0, \exists f', g', (f \cdot g)':$$

$$(\ln(f \cdot g))' = (\ln f)' + (\ln g)'$$

$$(\ln(f \cdot g))' = \frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g}, \quad (\ln f)' = \frac{f'}{f}, (\ln g)' = \frac{g'}{g}$$

$$\frac{(f \cdot g)'}{f \cdot g} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

Derivace kvadrátu

$$(t^2)' = (t \cdot t)' = (t)' \cdot t + t \cdot (t)' = 1 \cdot t + t \cdot 1 = 2t$$

$$\boxed{(t^n)' = n \cdot t^{n-1}}$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Neznámou je funkce jedné proměnné.

V rovnici se vyskytuje derivace této funkce.

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y' = f(x, y)$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y' = f(t, y)$$

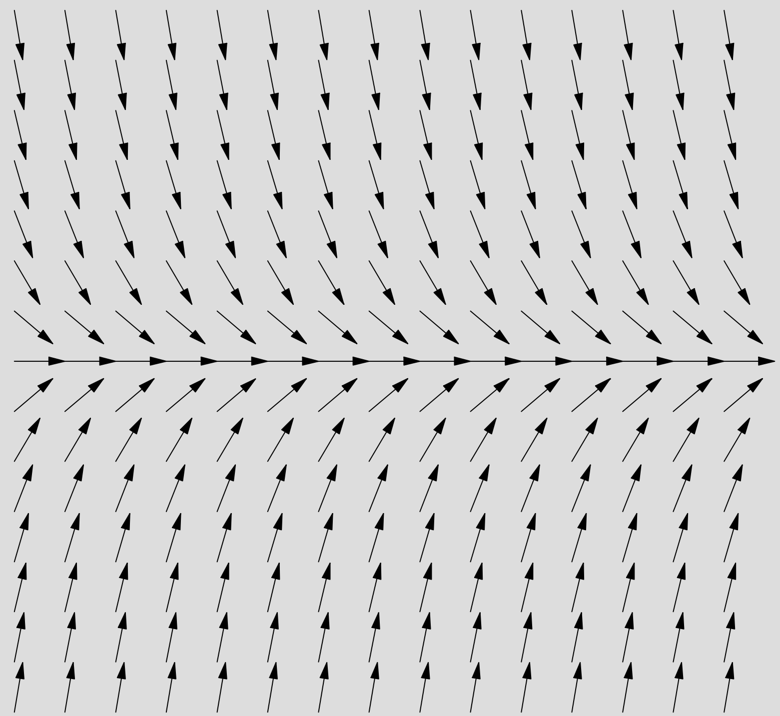
$$y'(t) = 2ty(t) \qquad y' = 2ty$$

$$y'(t) = y(t) \qquad y(t) = \mathrm{e}^t$$

Směrová pole 1:

$$y'(x) = -2y(x),$$

$$y' = -2y$$

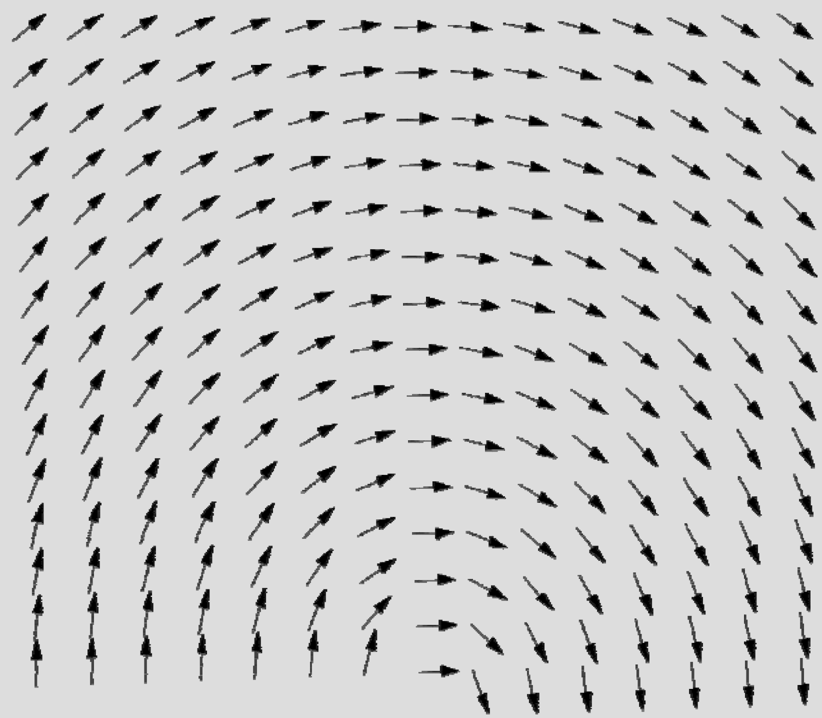


$$y(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

Směrová pole 2:

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$



Separace proměnných

$$g(y(t)) \cdot y'(t) = h(t)$$

$$\boxed{G'(y) = g(y), H'(t) = h(t)}$$

$$\boxed{G(y(t)) = H(t) + C}$$

$$(G(y(t)))' = G'(y(t) \cdot y'(t) = H'(t) + 0$$

$$g(y(t)) \cdot y'(t) = h(t)$$

Příklad

$$\frac{1}{y(t)} \cdot y'(t) = 2, \quad y(t) > 0$$

$$G'(y) = \frac{1}{y}, H'(t) = 2$$

$$\ln(y(t)) = 2t + C$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t+c} = D \cdot \mathrm{e}^{2t}$$

Thorium 234

$$y' = -ky, \quad k = 0{,}02828 \ldots (y > 0)$$

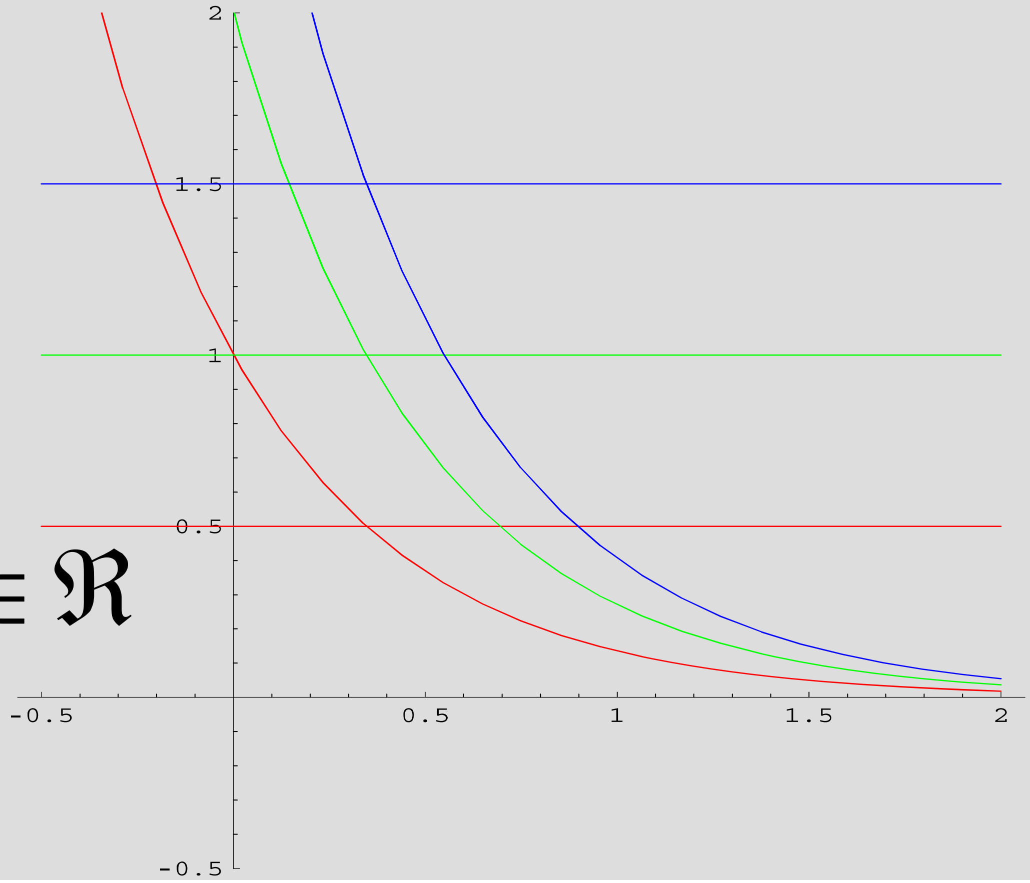
$$\frac{1}{y(t)} y'(t) = -k$$

$$\ln y(t) = -k \cdot t + C$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{-kt+C}$$

$$y(t) = D\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad D \in \Re$$

$$D = y(0)$$



Poločas rozpadu

Neměl by záviset na množství látky.

$$y' = -ky, \qquad y(t) = y(0)\,\mathrm{e}^{-kt},$$

$$\frac{y(0)}{2} = y(0)\,\mathrm{e}^{-kt^*}, \; -\ln(2) = -kt^*$$

$$t^* = \frac{\ln(2)}{k}$$

U Thoria 234:

Počet dní:

$$t^* \cong \frac{\ln(2)}{0{,}02828} \cong 24{,}5$$

Určení času úmrtí

Newtonův zákon ochlazování:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -k(\Theta - T),$$

$$\Theta(t) = T + (\Theta_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad t_1 \ldots \Theta_1,$$

$$k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{\Theta_1 - T}{\Theta_0 - T},$$

Pro teplotu 37 stupňů

$$\Theta(t) = T + (\Theta_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad t_u \ldots 37,$$

$$37 = T + (\Theta_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt},$$

$$t_u = -\frac{1}{k}\ln\frac{37 - T}{\Theta_0 - T}$$