S Pythagorem přesně a rychle

ŠKOMAM 2020, 28. ledna

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky, FEI
VŠB-TU Ostrava

web: http://homel.vsb.cz/~luk76
email: dalibor.lukas@vsb.cz

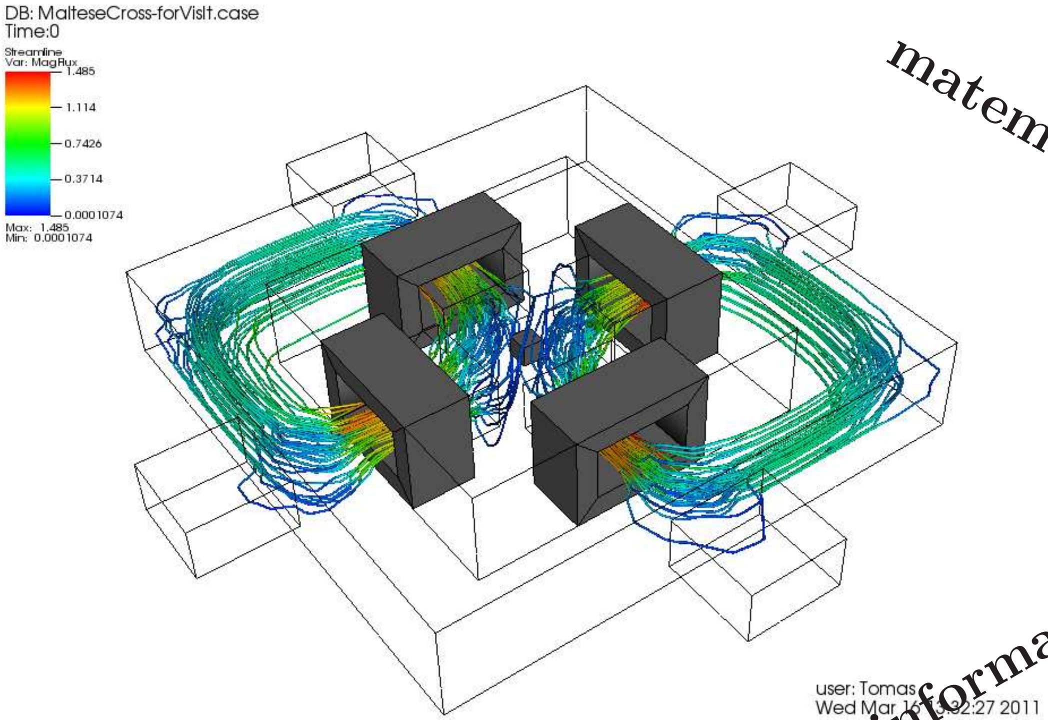
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

S Pythagorem přesně a rychle

Matematika pro řešení náročných technických úloh

aplikace

matematika



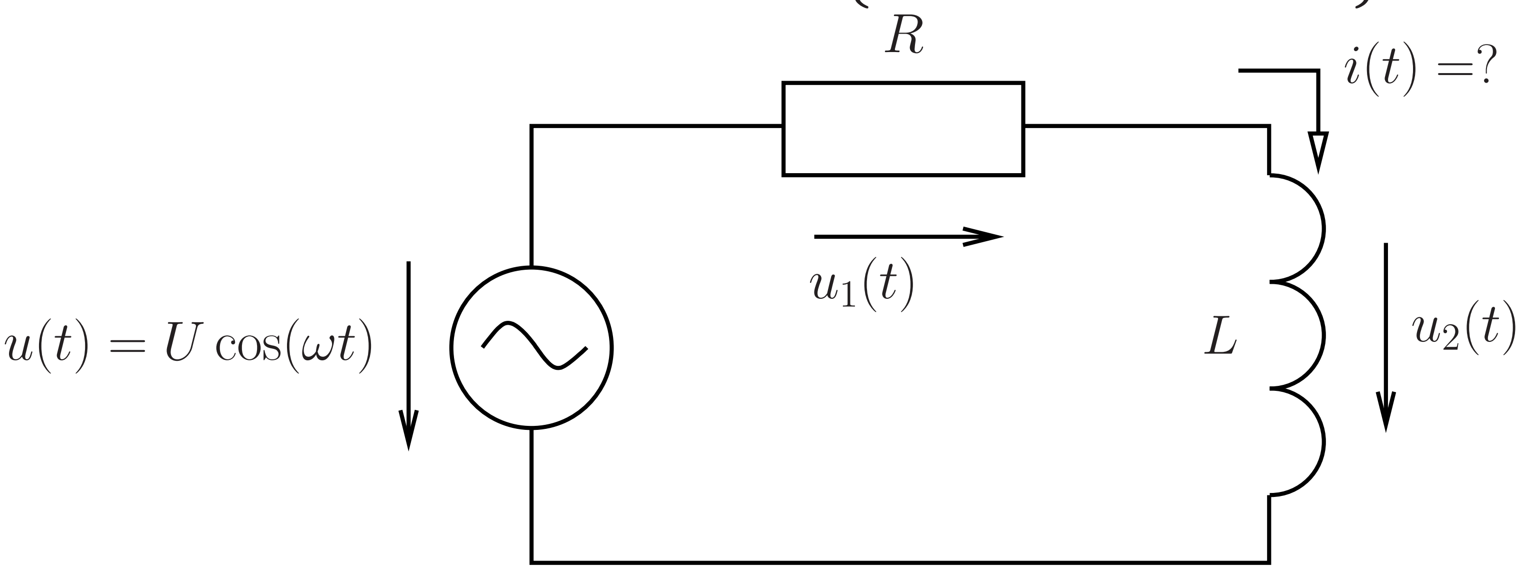
fyzika

informatika

S Pythagorem přesně a rychle

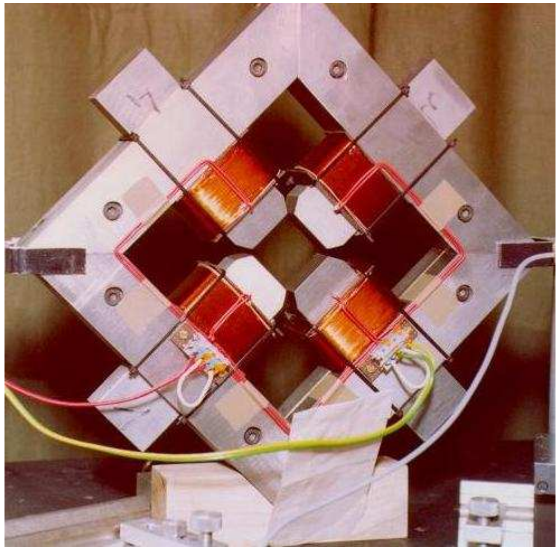
Soustavy lineárních rovnic: RL obvod — 1 rovnice/neznámá

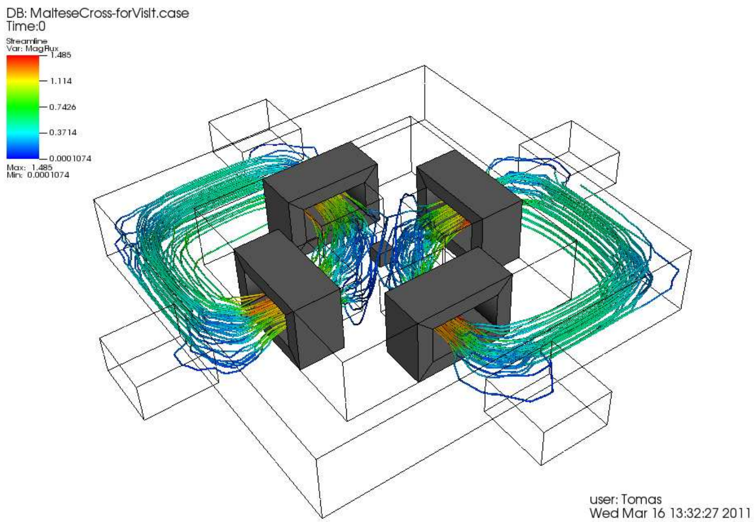
$$(R + \imath\omega L)\widehat{I} = U \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = \mathrm{Re}\left\{\widehat{I}(\cos(\omega t) + \imath\,\sin(\omega\,t)\right\}$$



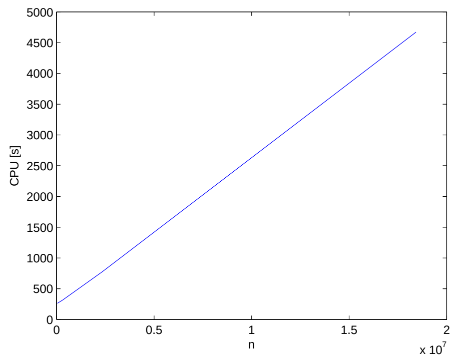
S Pythagorem přesně a rychle

Soustavy lin. rovnic: mag. pole elektromagnetu — 18 milionů rovnic/neznámých





úroveň	počet hran	PCG iter.	CPU	Mem
0	39.310	1	4 min 23 s	269 MB
1	299.166	3	5 min 20 s	834 MB
2	2.333.312	3	13 min	5,14 GB
3	18.428.912	3	1 h 18 min	39,64 GB



1 hodina na notebooku — 18 GFlops: Multigrid vyřeší 14 milionů rovnic

S Pythagorem přesně a rychle

Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz www.top500.org, počítač na světě, americký Summit, Kramerovým pravidlem bez použití řádkových úprav, uvažujeme-li pouze instrukce sčítání, odčítání, násobení a dělení, kterých provede $200{,}8 \cdot 10^{15}$ za sekundu?

S Pythagorem přesně a rychle

Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic: počet operací

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých mající právě jedno řešení.

Kramerovo pravidlo

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n$$

vyžaduje n dělení a výpočet $n+1$ determinantů řádu n. Např. pro $n = 3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

je třeba $\mathrm{N}(3) = 3 + 3\,\mathrm{N}(2) = 3 + 3 \cdot 2$ násobení a $\mathrm{M}(3) = 2 + 3\,\mathrm{M}(2)$ sčítání/odčítání.

Kramerovo pravidlo s výpočtem determinantů rozvojem podle řádků vyžaduje

- n dělení,
- $(n+1)\,\mathrm{N}(n)$ násobení, kde $\mathrm{N}(n) = n\,(1 + \mathrm{N}(n-1))$ a $\mathrm{N}(1) = 0$ a
- $(n+1)\,\mathrm{M}(n)$ sčítání/odčítání, kde $\mathrm{M}(n) = n - 1 + n\,\mathrm{M}(n-1)$ a $\mathrm{M}(1) = 0$.

S Pythagorem přesně a rychle

Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic: počet operací

Kramerovo pravidlo s výpočtem determinantů rozvojem podle řádků vyžaduje

$$\mathrm{Op}(n) = n + (n+1)\,(\mathrm{N}(n) + \mathrm{M}(n)) \text{ operací}, \quad \mathrm{CPU}(n) = \frac{\mathrm{Op}(n)}{33{,}8\mathrm{e}15}[\mathrm{s}],$$

kde $\mathrm{N}(n) = n\,(1 + \mathrm{N}(n-1))$, $\mathrm{N}(1) = 0$ a $\mathrm{M}(n) = n\,(1 + \mathrm{M}(n-1)) - 1$, $\mathrm{M}(1) = 0$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N(n)	0	2	9	40	205	1236	8659	69280	623529	6236300
M(n)	0	1	5	23	119	719	5039	40319	362879	3628799
Op(n)	1	11	59	319	1949	13691	109591	986399	9864089	108505099
CPU(n)	5,0e-18	5,5e-17	2,9e-16	1,6e-15	9,7e-15	6,8e-14	5,4e-13	4.9e-12	4,9e-11	5,4e-10

n	11	12	13	14	15	...	18	19	20	21
N(n)	6,9e7	8,2e8	1,1e10	1,5e11	2,2e12	...	1,1e16	2,1e17	4,2e18	8,8e19
M(n)	4,0e7	4,8e8	6,2e9	8,7e10	1,3e12	...	0,6e16	1,2e17	2,4e18	5,1e19
Op(n)	1,3e9	1,7e10	2,4e11	3,6e12	5,7e13	...	3,3e17	6,6e18	1,4e20	3,1e21
CPU(n)	6,5e-9	8,4e-8	1,2e-6	1,8e-5	2,8e-4	...	1,65	32,9	691,6	1,5e4

S Pythagorem přesně a rychle

Kramerovo pravidlo pro řešení soustav lin. rovnic

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz www.top500.org, počítač na světě, americký Summit, Kramerovým pravidlem bez použití řádkových úprav, uvažujeme-li pouze instrukce sčítání, odčítání, násobení a dělení, kterých provede $200,8 \cdot 10^{15}$ za sekundu?

20 rovnic

Motto

„Raději budu počítat na starém počítači novou metodou než naopak."

Prof. Philippe Toint

S Pythagorem přesně a rychle

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

S Pythagorem přesně a rychle

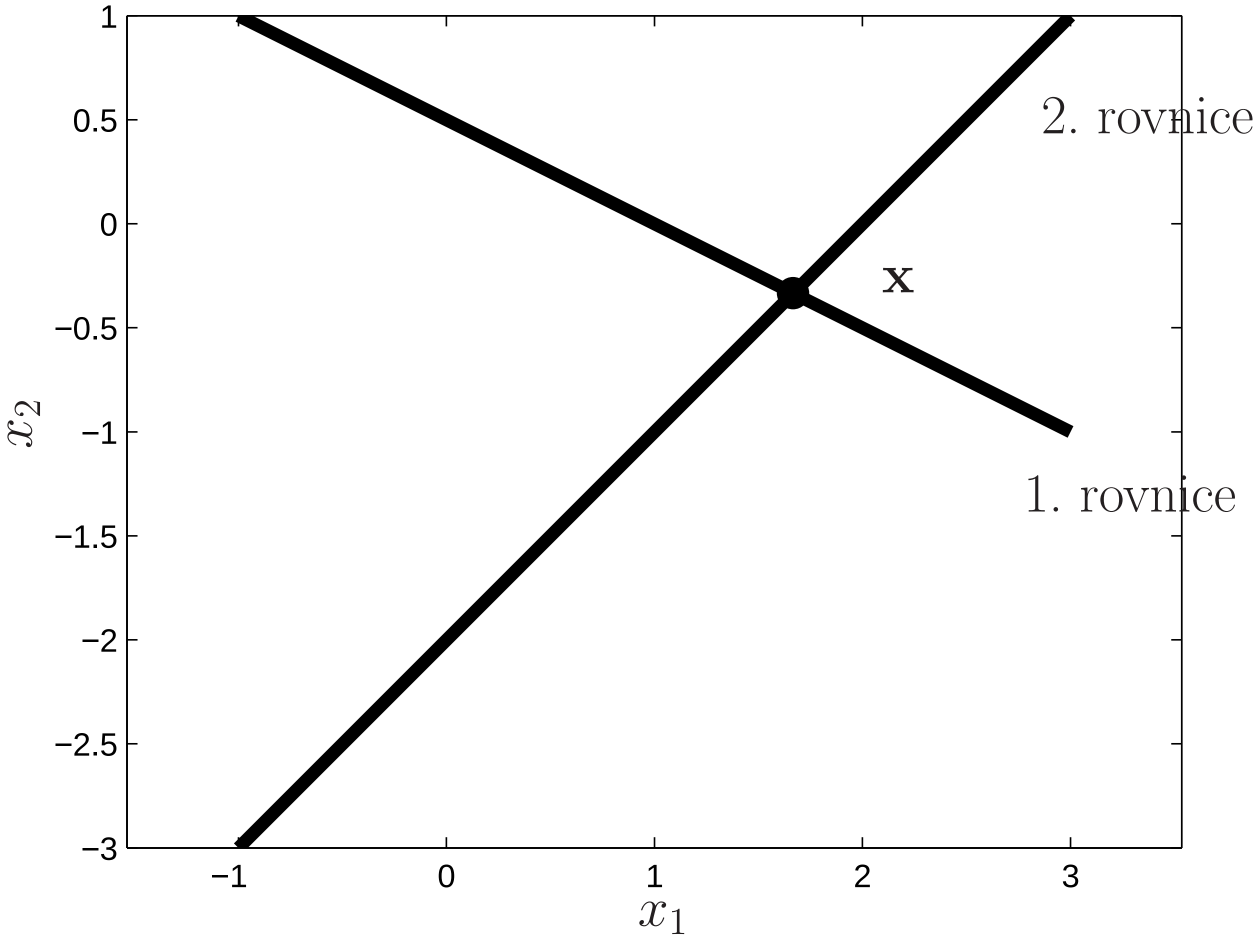
Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

Geometrie soustav lineárních rovnic

Pohled po řádcích

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 1 \\
x_1 - x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

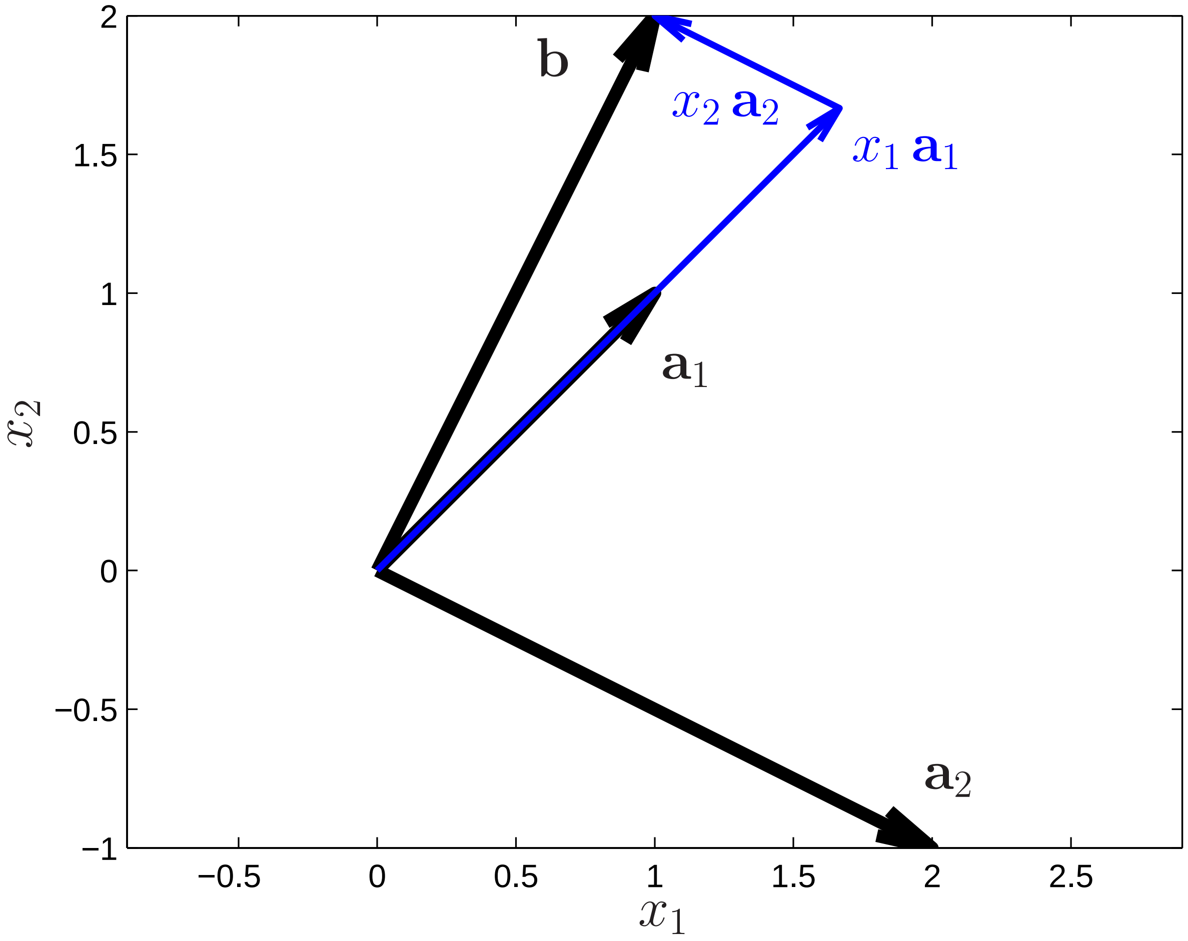


Geometrie soustav lineárních rovnic

Pohled po sloupcích

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2\,x_2 &= 1 \\
x_1 - x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}
$$

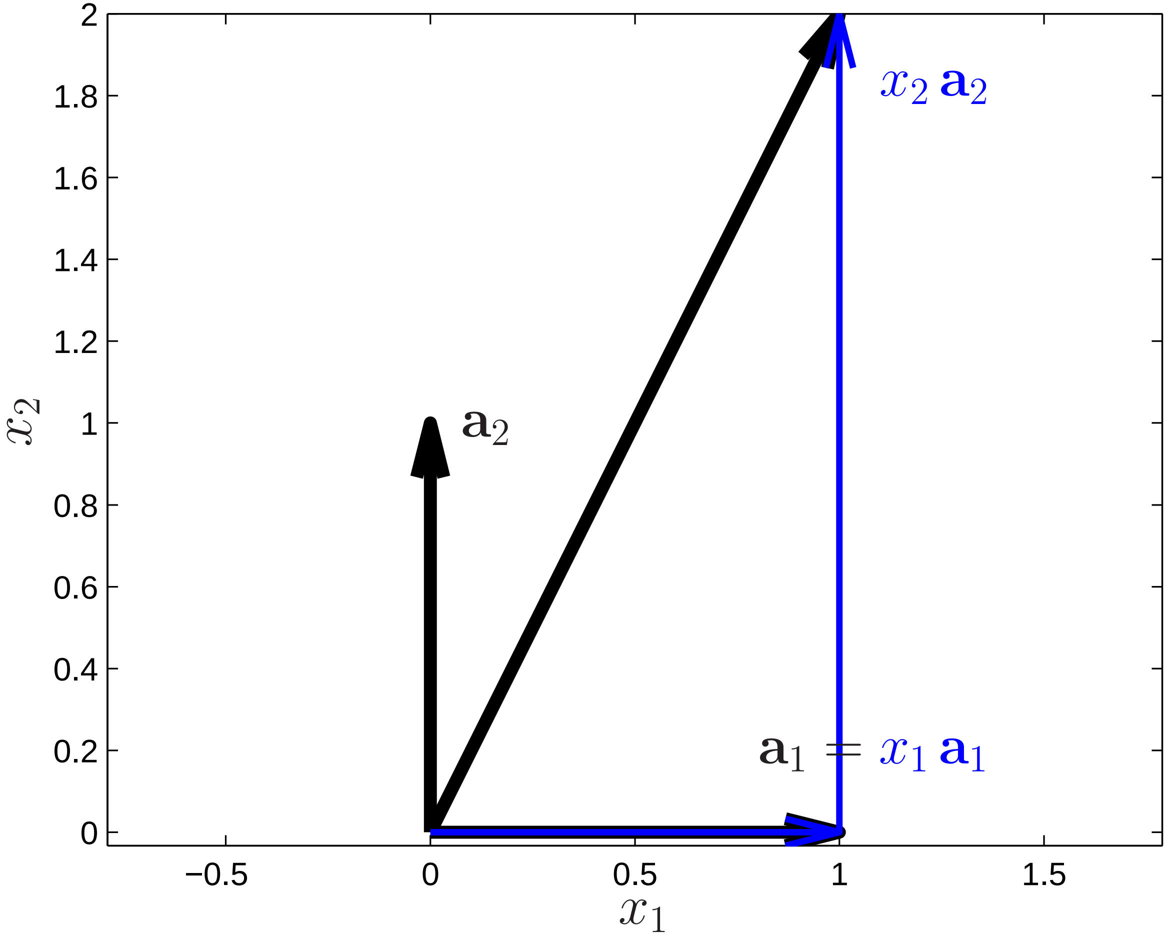


Geometrie soustav lineárních rovnic

Nejjednodušší soustavy: x_1, x_2 „řešíme" nezávisle

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$

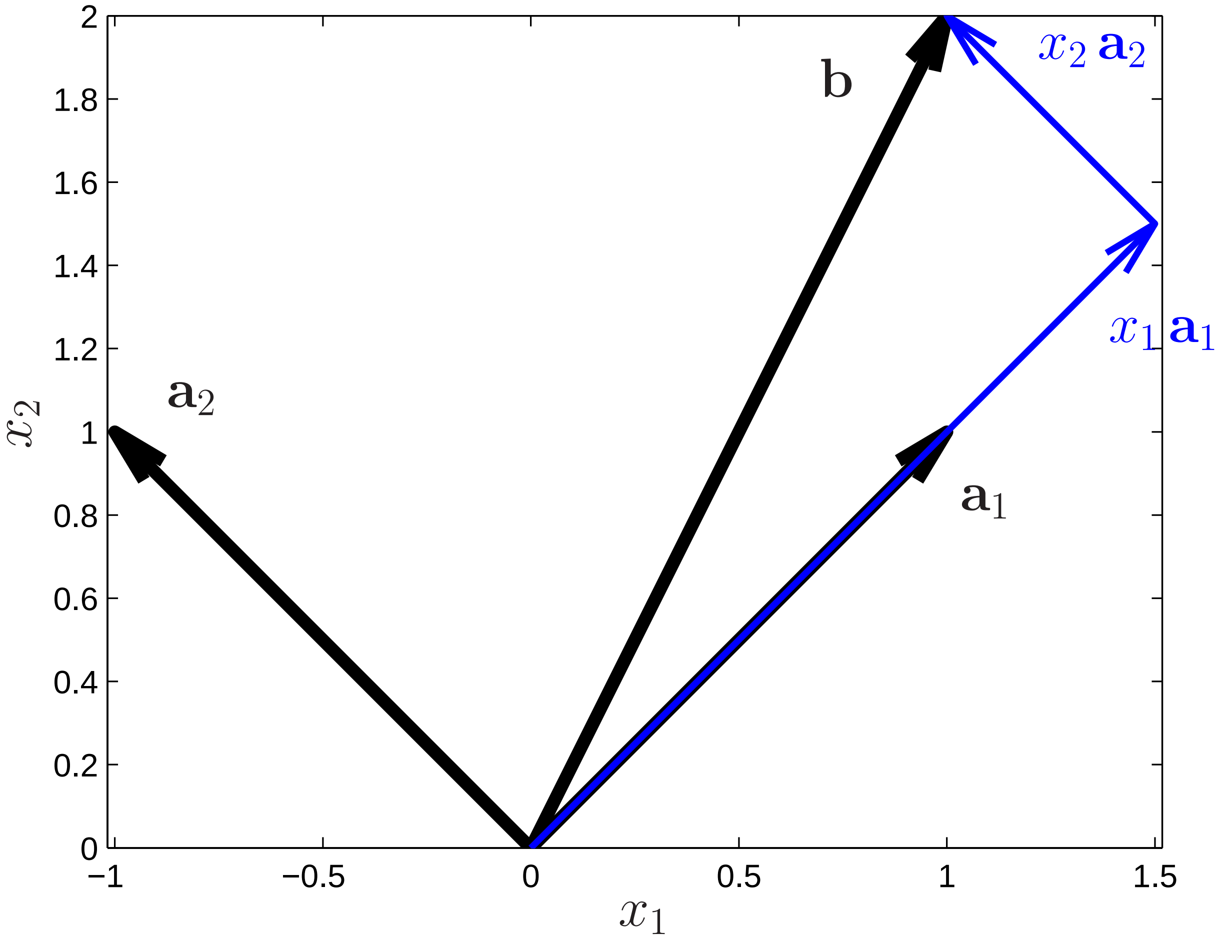


Geometrie soustav lineárních rovnic

x_1, x_2 řešíme nezávisle $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$



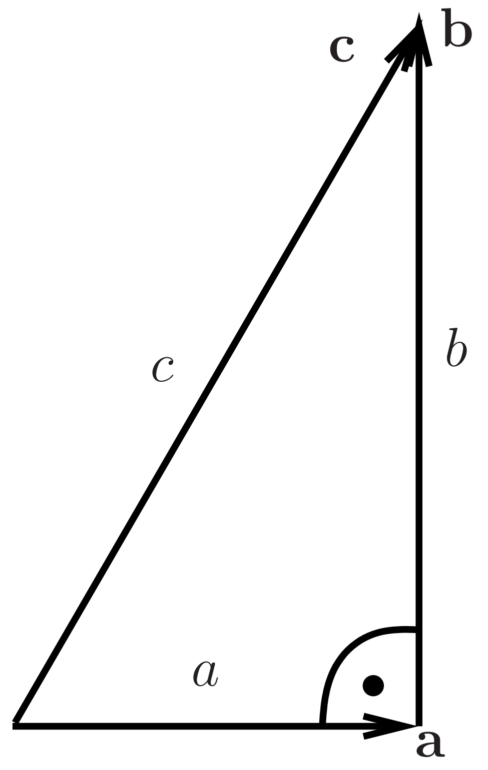
S Pythagorem přesně a rychle

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

Pythagorova věta

Kolmé (ortogonální) vektory



Pythagorova věta

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Vektorový počet

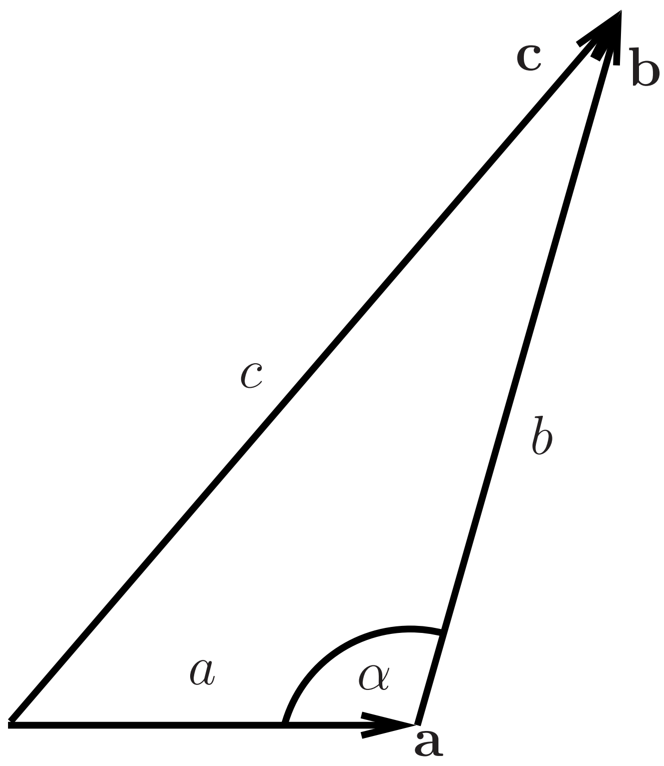
$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b} := \begin{pmatrix} a+0 \\ 0+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Velikost (norma) vektoru

$$c := \|\mathbf{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pythagorova věta

Nekolmé vektory



Vektorový počet

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

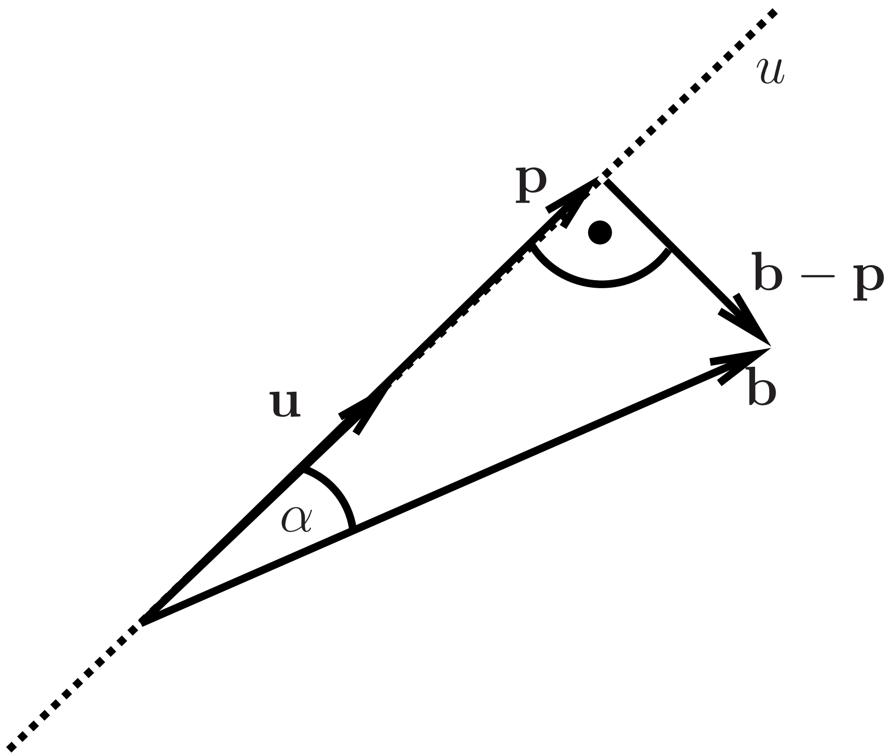
Kvadrát velikosti vektoru, Kosinová věta

$$\begin{aligned} c^2 = \|\mathbf{c}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \\ &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = \\ &= \underbrace{(a_1)^2 + (a_2)^2}_{=\|\mathbf{a}\|^2} + \underbrace{(b_1)^2 + (b_2)^2}_{=\|\mathbf{b}\|^2} + 2 \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2)}_{=:\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos(\alpha)\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} \\ &= a^2 + b^2 + 2\cos(\alpha)\, a\, b \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$: Pythagorova $\equiv$ Kosinová věta

Projekce bodu na přímku a rovinu

Projekce (ortogonální) bodu na přímku



Dáno: přímka u se směrem $\mathbf{u}$ a bod $\mathbf{b}$.

Úloha:

$$\text{Hledáme } \mathbf{p} := x\mathbf{u} : \ \mathbf{u} \perp (\mathbf{b}-\mathbf{p})$$

Tj.

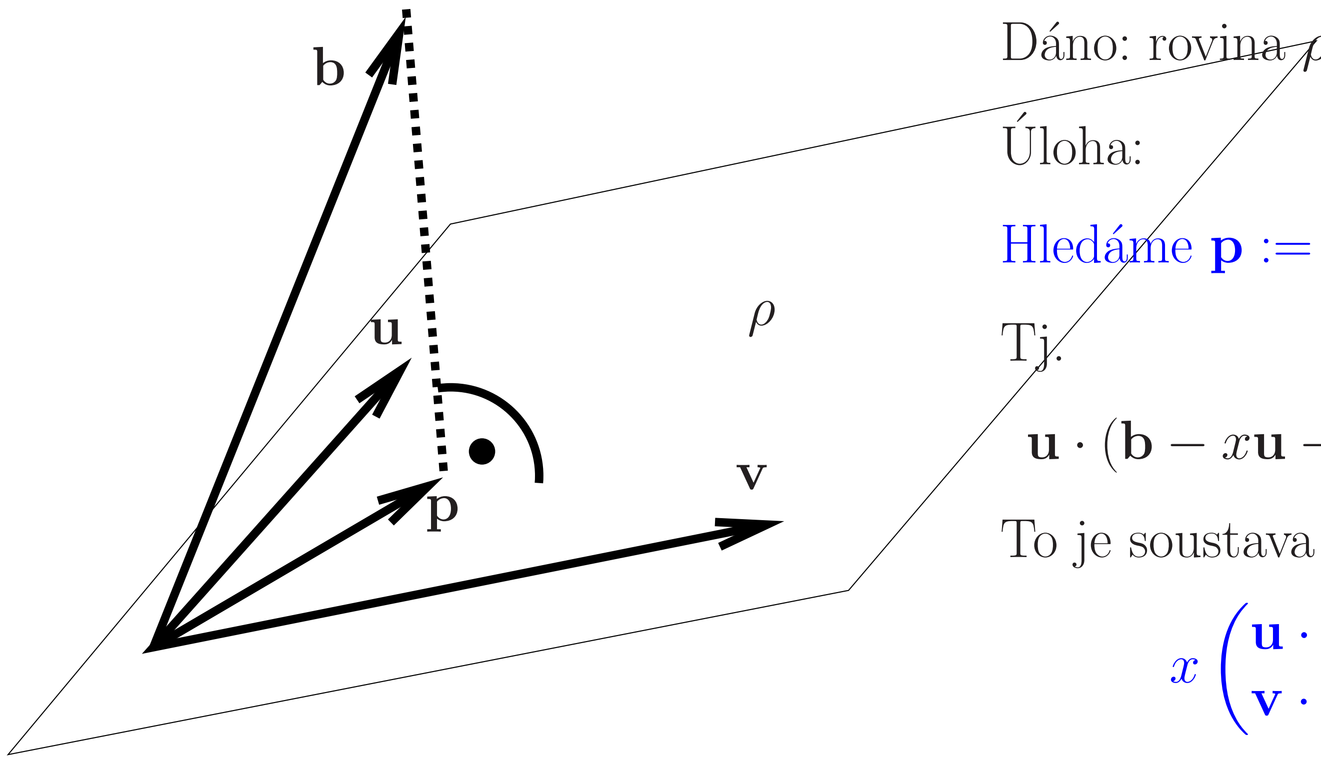
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-x\mathbf{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \cos(\alpha)\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{u}\|},$$

což není překvapivé:

$$\|\mathbf{p}\| = \|x\mathbf{u}\| = \left\| \cos(\alpha)\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} \right\| = \cos(\alpha)\|\mathbf{b}\|.$$

Projekce bodu na přímku a rovinu

Projekce (ortogonální) bodu na rovinu



Dáno: rovina ρ se směry $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a bod $\mathbf{b}$.

Úloha:

Hledáme $\mathbf{p} := x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$ a $\mathbf{v} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$

Tj.

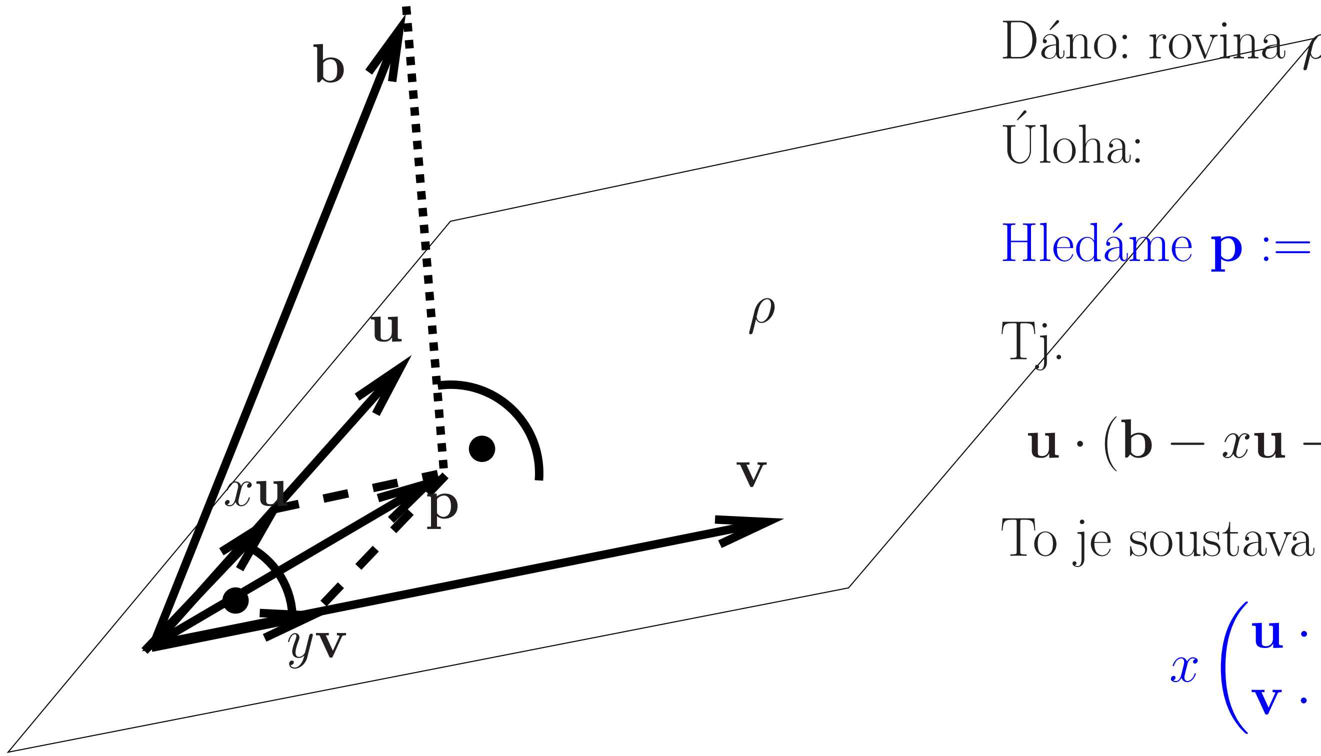
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0 \text{ a } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0.$$

To je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých:

$$x \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Projekce bodu na přímku a rovinu

Projekce (ortogonální) bodu na rovinu



Dáno: rovina ρ se směry $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a bod $\mathbf{b}$.

Úloha:

Hledáme $\mathbf{p} := x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$ a $\mathbf{v} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{p})$

Tj.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0 \text{ a } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} - x\mathbf{u} - y\mathbf{v}) = 0.$$

To je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých:

$$x \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$: Projekce na ρ je součtem projekcí na u a v,

$$\mathbf{p} = \underbrace{\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}}_{=x} \mathbf{u} + \underbrace{\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}_{=y} \mathbf{v}.$$

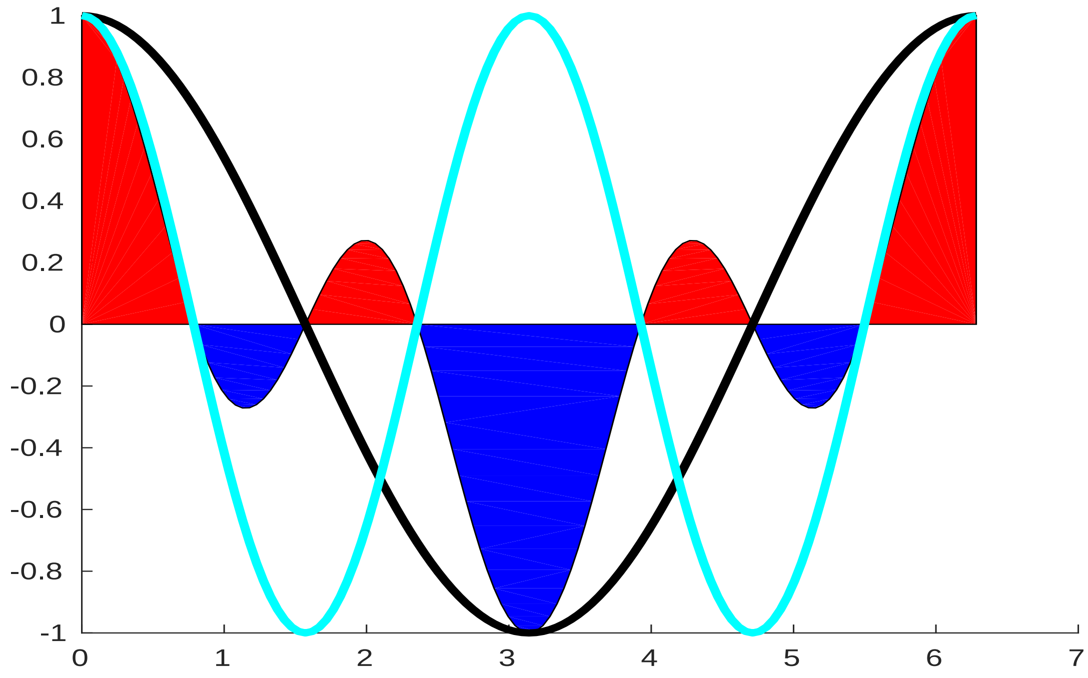
MP3, JPEG

Kolmé funkce

Funkce $(\cos(kt))_{k=0}^{\infty}$, $(\sin(kt))_{k=1}^{\infty}$ jsou navzájem kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f \cdot g := \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt \approx \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{2\pi}{N} j\right)\, g\left(\frac{2\pi}{N} j\right)\, \frac{2\pi}{N}$$

Např. $\cos(t) \cdot \cos(2t) = 0$:



MP3, JPEG

Fourierova řada

Funkce $(\cos(kt))_{k=0}^{\infty}$, $(\sin(kt))_{k=1}^{\infty}$ jsou navzájem kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f \cdot g := \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt \approx \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{2\pi}{N} j\right)\, g\left(\frac{2\pi}{N} j\right)\, \frac{2\pi}{N}$$

Rozumnou funkci $b(t)$ můžeme nahradit částečným součtem Fourierovy řady

$$b(t) \approx b_n(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kt) \cdot b(t)}{\|\cos(kt)\|^2} \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt) \cdot b(t)}{\|\sin(kt)\|^2} \sin(kt).$$

Jedná se o projekci $b(t)$ do podprostoru (roviny) harmonických funkcí.

MP3-komprese

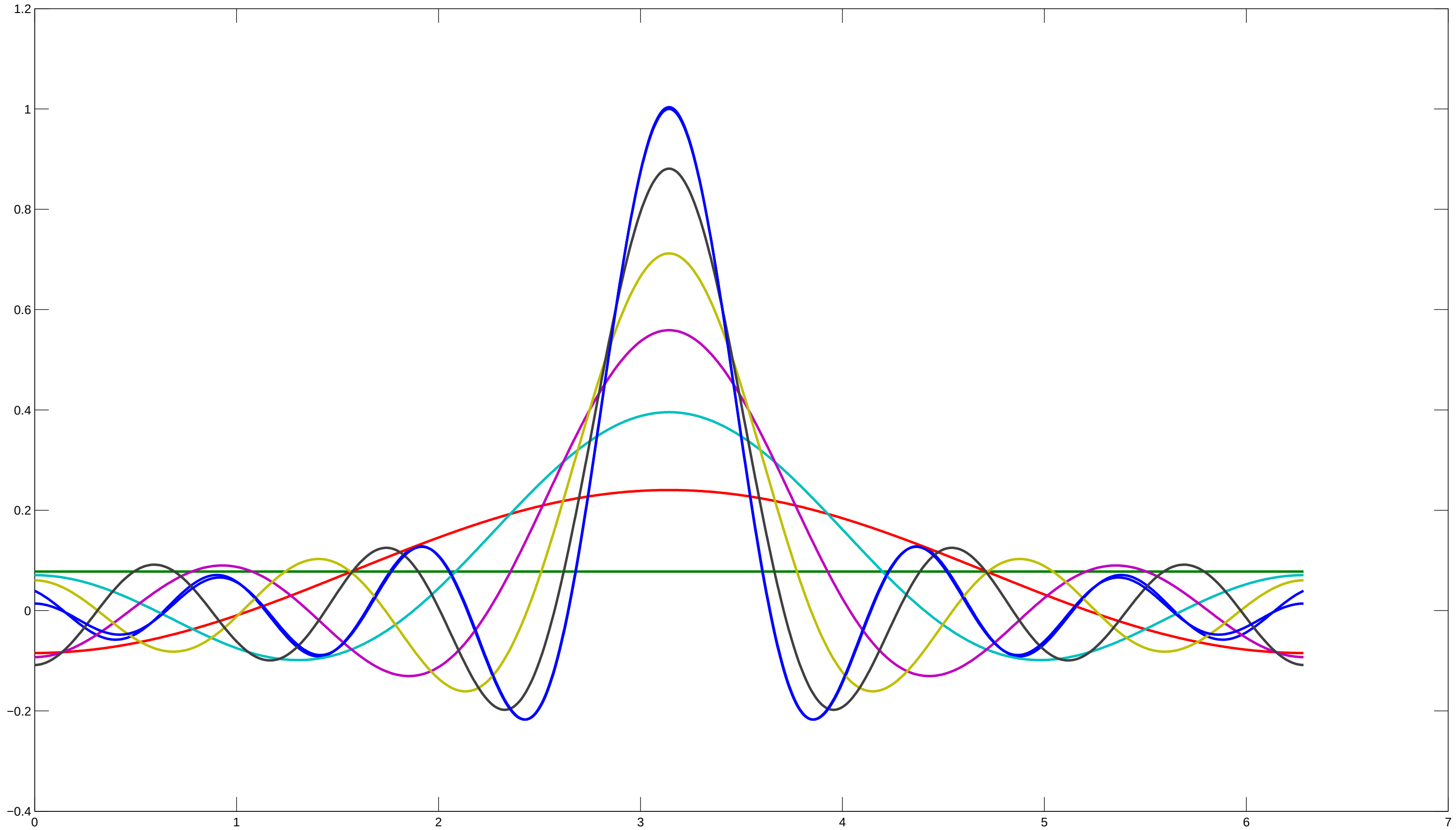
Dáno: signál $b(t)$ a práh $\varepsilon \in (0, 1)$.
Úloha:

$$\text{Hledáme nejmenší } n \in \mathbb{N} \text{ a } b_n(t):\ \|b(t) - b_n(t)\| \leq \varepsilon \|b(t)\|.$$

Kolmost báze + strom. hierarchie $\Longrightarrow$ $n \log n$ aritm. instukcí (vers. n^3)

MP3, JPEG

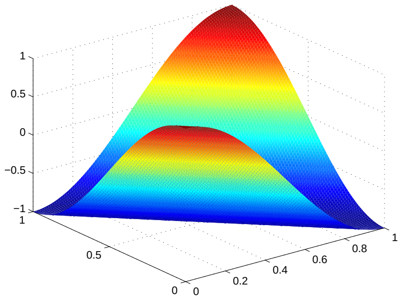
MP3-komprese: $b(t) := \mathrm{sinc}(2\pi(t-1)) \approx b_0(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$, $b_4(t)$, $b_5(t)$



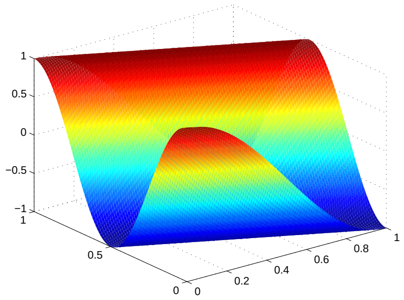
MP3, JPEG

JPEG-komprese: Fourierova báze $f_{jk}(x, y) := \mathrm{e}^{\imath\omega(jx+ky)}$

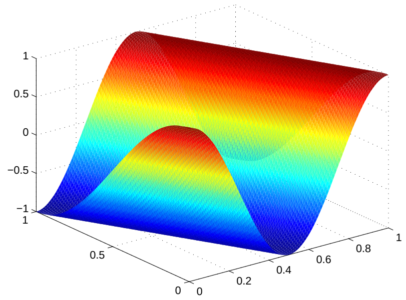
$\mathrm{Re}\, f_{11}(x, y)$



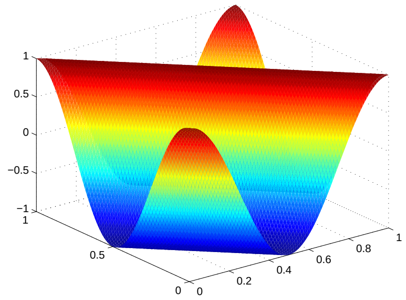
$\mathrm{Re}\, f_{12}(x, y)$



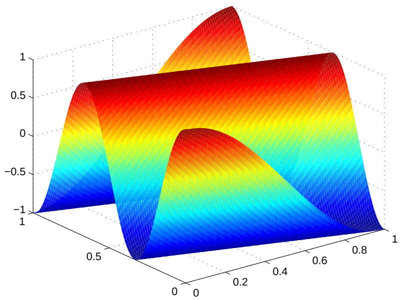
$\mathrm{Re}\, f_{21}(x, y)$



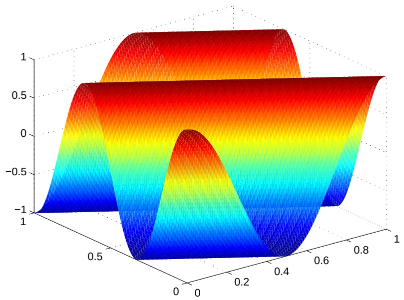
$\mathrm{Re}\, f_{22}(x, y)$



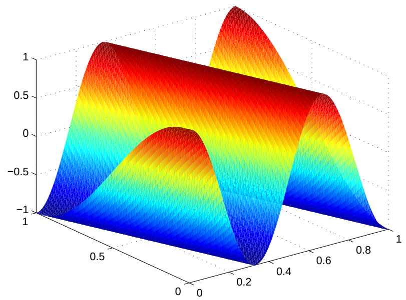
$\mathrm{Re}\, f_{13}(x, y)$



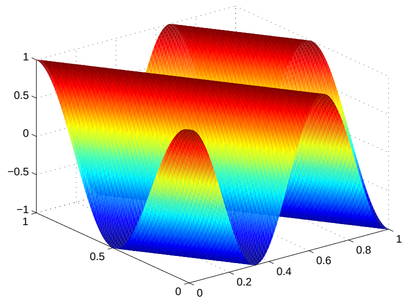
$\mathrm{Re}\, f_{23}(x, y)$



$\mathrm{Re}\, f_{31}(x, y)$



$\mathrm{Re}\, f_{32}(x, y)$



MP3, JPEG

JPEG-komprese ≡ projekce do (hyper)roviny

bitmapa

5%-komprese Fourierovou bází

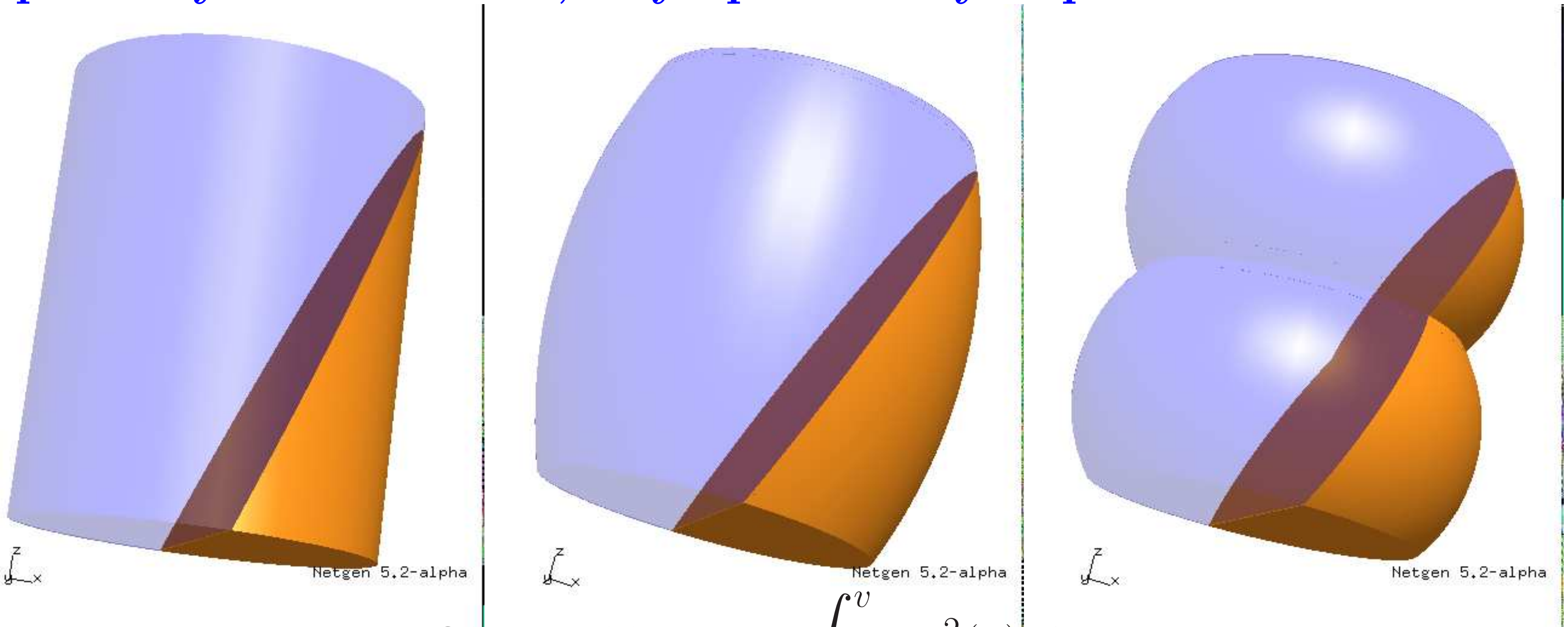
S Pythagorem přesně a rychle

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

Numerické integrování

Kolik piva zbývá ve sklenici, když pivo zakrývá půlku dna?



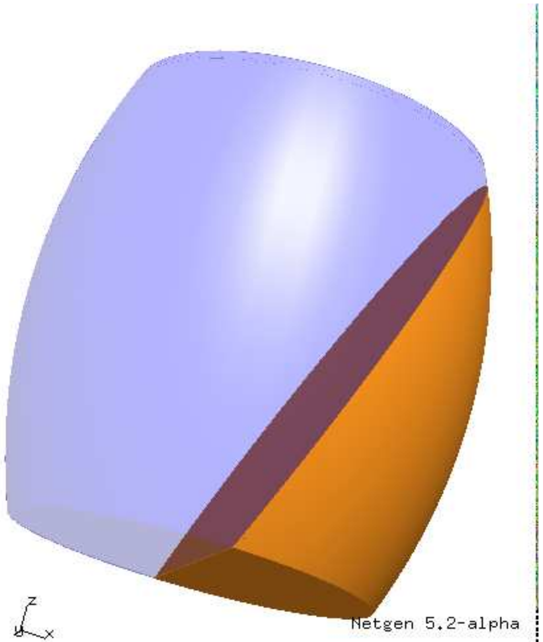
$$\text{Objem sklenice} = \int_0^v \pi\, r^2(z)\, dz,$$

$$\text{Objem piva} = \int_0^v \underbrace{\left[r^2(z)\ \arccos\left(\frac{r(v)}{v}\,\frac{z}{r(z)}\right) - \frac{r(v)}{v}\, z \sqrt{r^2(z) - \frac{r^2(v)}{v^2}\, z^2} \right]}_{=: f(z)} dz,$$

kde $r(z) : \langle 0, v \rangle \mapsto \mathbb{R}_+$ je tvar (pláště) sklenice a v je výška sklenice.

Numerické integrování

Kolik piva zbývá ve sklenici, když pivo zakrývá půlku dna?



Např. $v := 1$, $r(z) := \frac{1}{4}(1 + z(1 - z))$:

$$\text{Objem sklenice} = \int_0^1 \pi\, r^2(z)\, dz = \frac{41}{120}\pi \approx \mathbf{1.07337748997651}$$

$$\text{Objem piva} = {\color{red}\int_0^1 f(z)\, dz \approx \int_0^1 p_n(z)\, dz} = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(z_i) =: I_n$$

kde $p_n(z)$ je polynom stupně n, který prochází $f(z)$ v kořenech $z_0, z_1, \ldots, z_n \in (0,1)$ Legendreova ortogonálního polynomu $L_{n+1}(z)$.

n	I_n	n	I_n	n	I_n
1	0.07740951417294347	7	**0.06643**671413731998	16	**0.0664379**1490228415
2	**0.065**53899985493714	8	**0.066437**29131780218	20	**0.0664379**2997094274
3	**0.066**37347291541409	9	**0.066437**57022093867	24	**0.06643793**448415233
4	**0.0664**2069316066881	10	**0.066437**71627809419	32	**0.06643793**685101656
5	**0.06643**189208136203	11	**0.066437**79783358168	40	**0.066437937**35796341
6	**0.06643**538893431605	12	**0.066437**84582290042	48	**0.0664379375**0795548

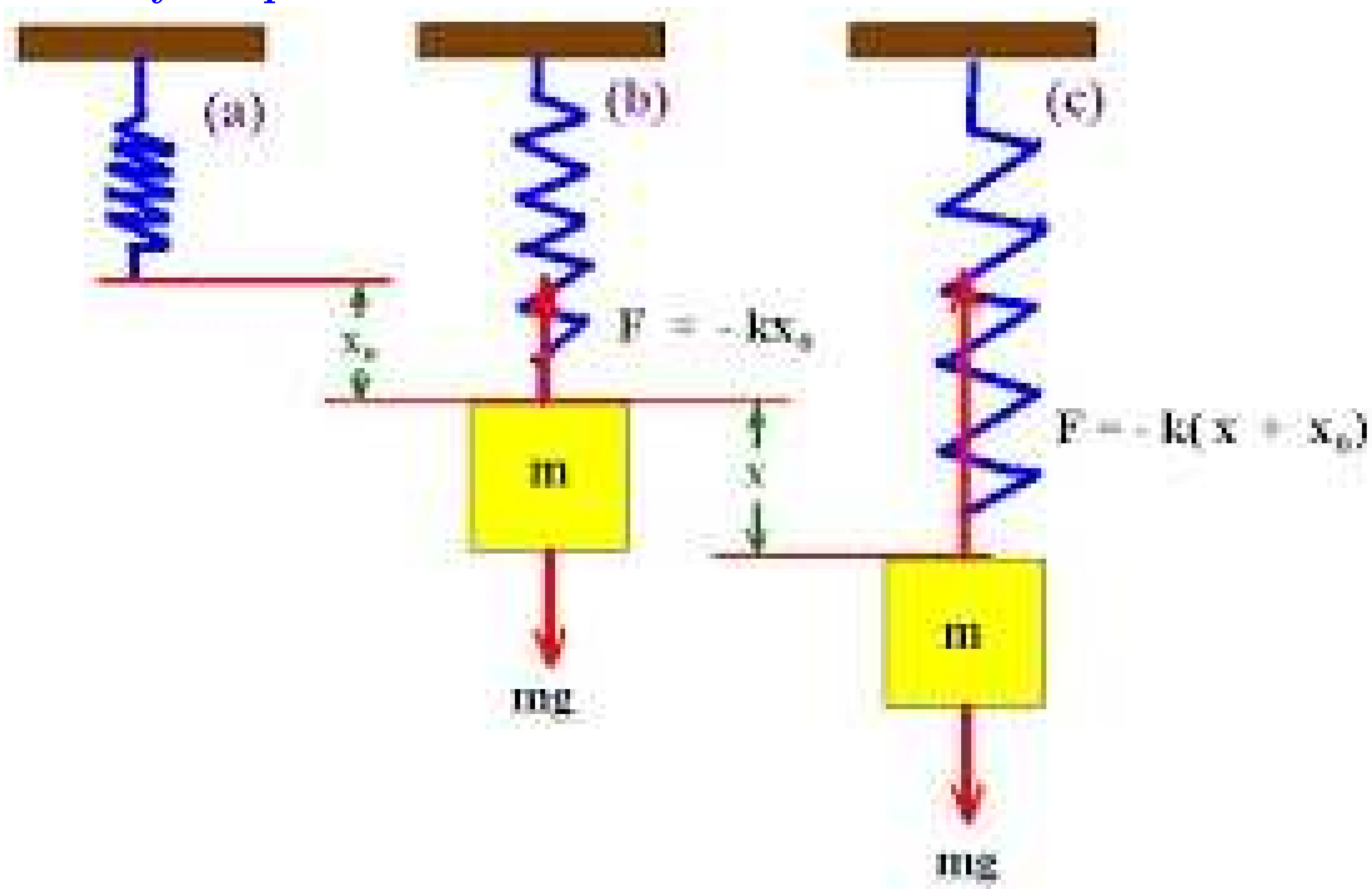
S Pythagorem přesně a rychle

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity na pružině



Numerické řešení diferenciálních rovnic

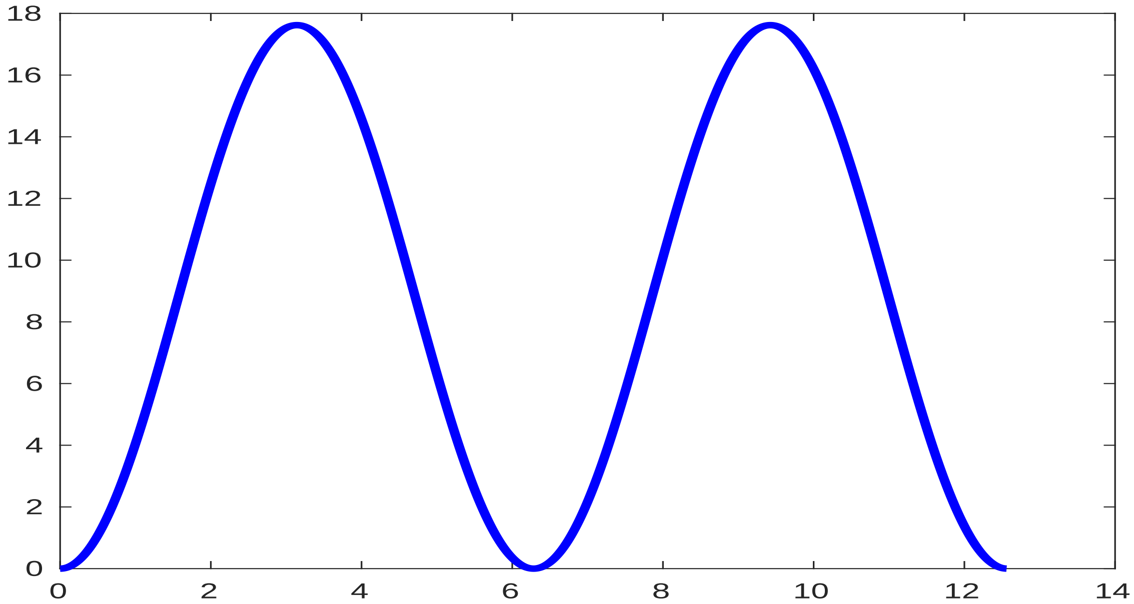
Volné kmity na pružině

Je dána počát. výchylka x_0, tíhové zrychlení g, hmotnost tělesa m a tuhost pružiny k.
Hledáme trajektorii $x(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} m\,x''(t) + k\,x(t) &= m\,g - k\,x_0, \\ x(0) &= 0, \\ x'(0) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Řešení je $x(t) = \left(x_0 - \frac{mg}{k}\right) \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - 1\right)$.

Např. $x_0 = m = k = 1$:



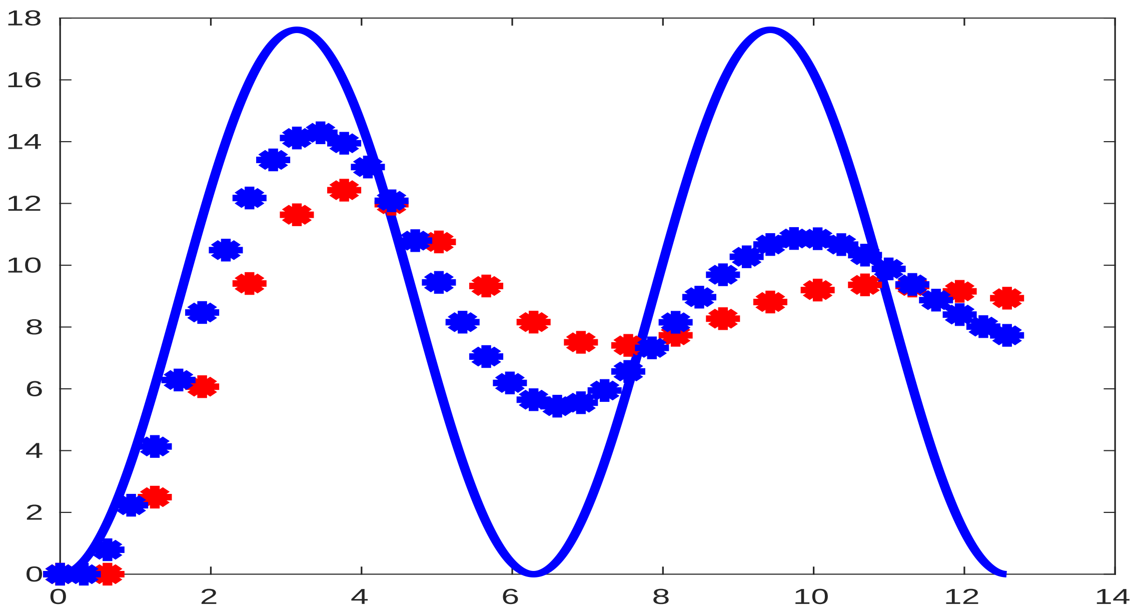
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity na pružině: numerické řešení Eulerovou metodou

Je dána počát. výchylka x_0, tíhové zrychlení g, hmotnost tělesa m a tuhost pružiny k. Navíc je dán časový krok Δt. Hledáme přibližné hodnoty $x_j \approx x(t_j)$ v časech $t_j = j\Delta t$:

$$\left\{ \begin{aligned} m\,\frac{1}{(\Delta t)^2}(x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j) + k\,x_{j+2} &= m\,g - k\,x_0, \\ x_0 &= 0, \\ \frac{1}{\Delta t}(x_1 - x_0) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Např. $\Delta t = \frac{4\pi}{20}, \frac{4\pi}{40}$:



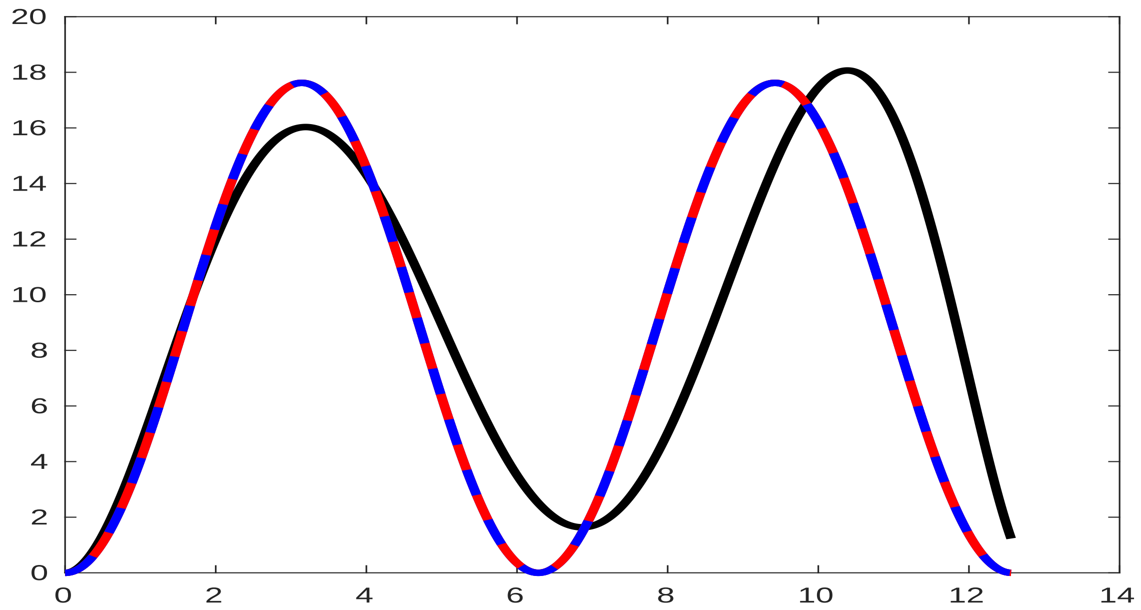
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity na pružině: numerické řešení projekcí na polynomy

Je dána počát. výchylka x_0, tíhové zrychlení g, hmotnost tělesa m a tuhost pružiny k. Navíc je dán stupeň polynomu $n+2$. Hledáme přibližné řešení $x_n(t) = \sum_{j=2}^{n+2} \alpha_j t^j \approx x(t) \rightsquigarrow$ Soustava $n+1$ lineárních rovnic o $n+1$ neznámých:

$$t^i \cdot (m x_n''(t) + k x_n(t)) = -t^i \cdot (mg - kx_0) \text{ for } i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Např. $n = 5, 10$:

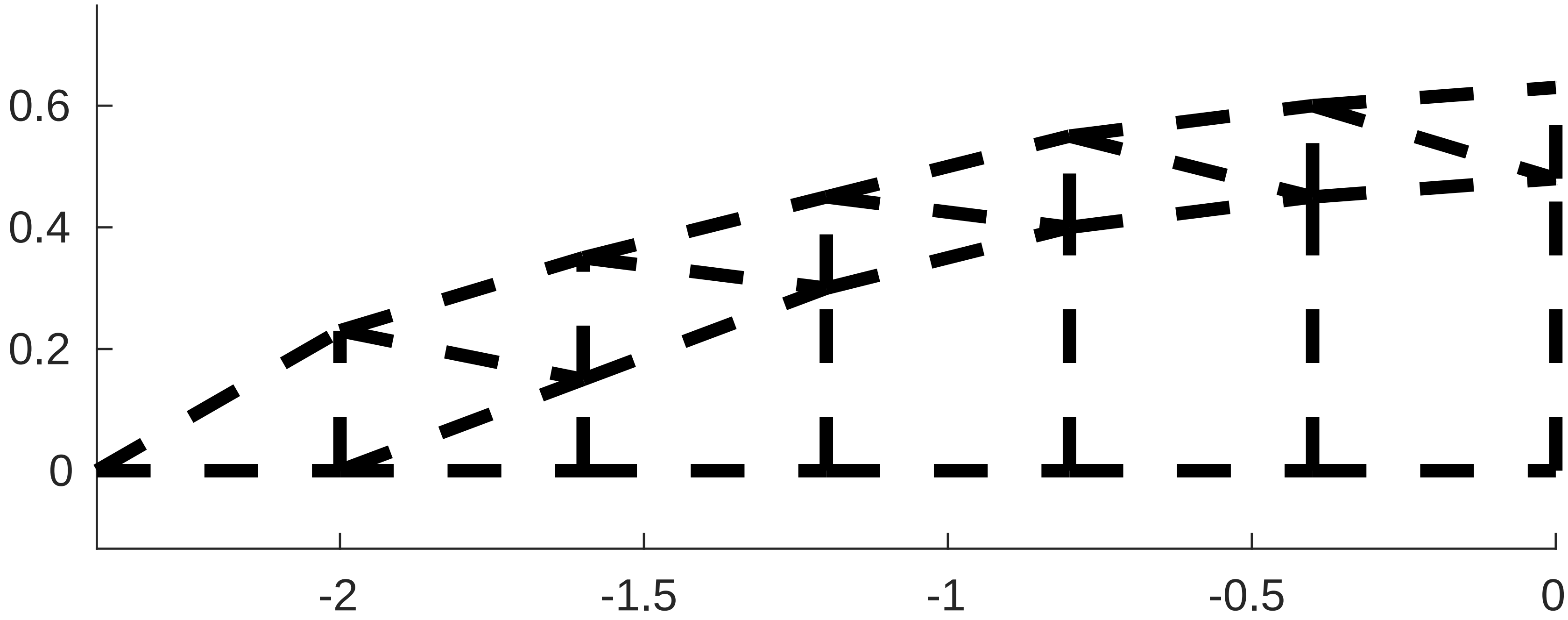


Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu

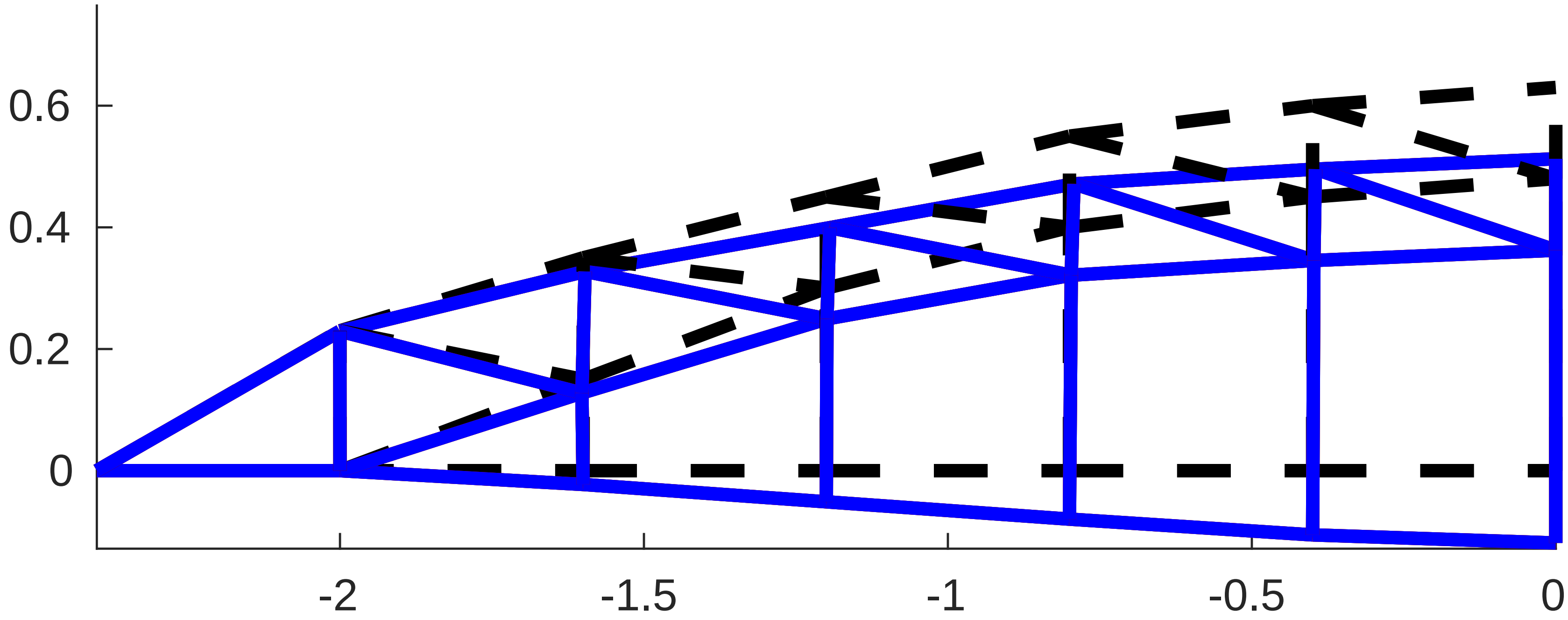
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



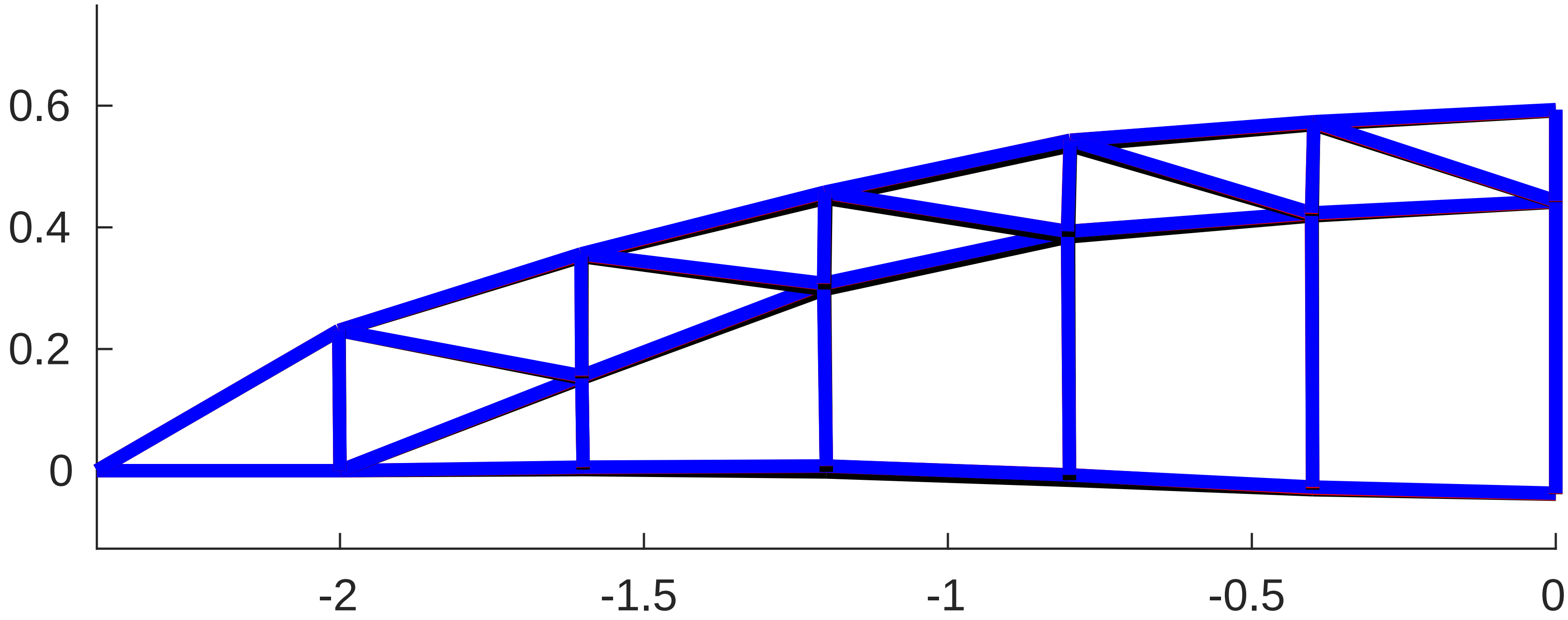
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler **vers. projekce**



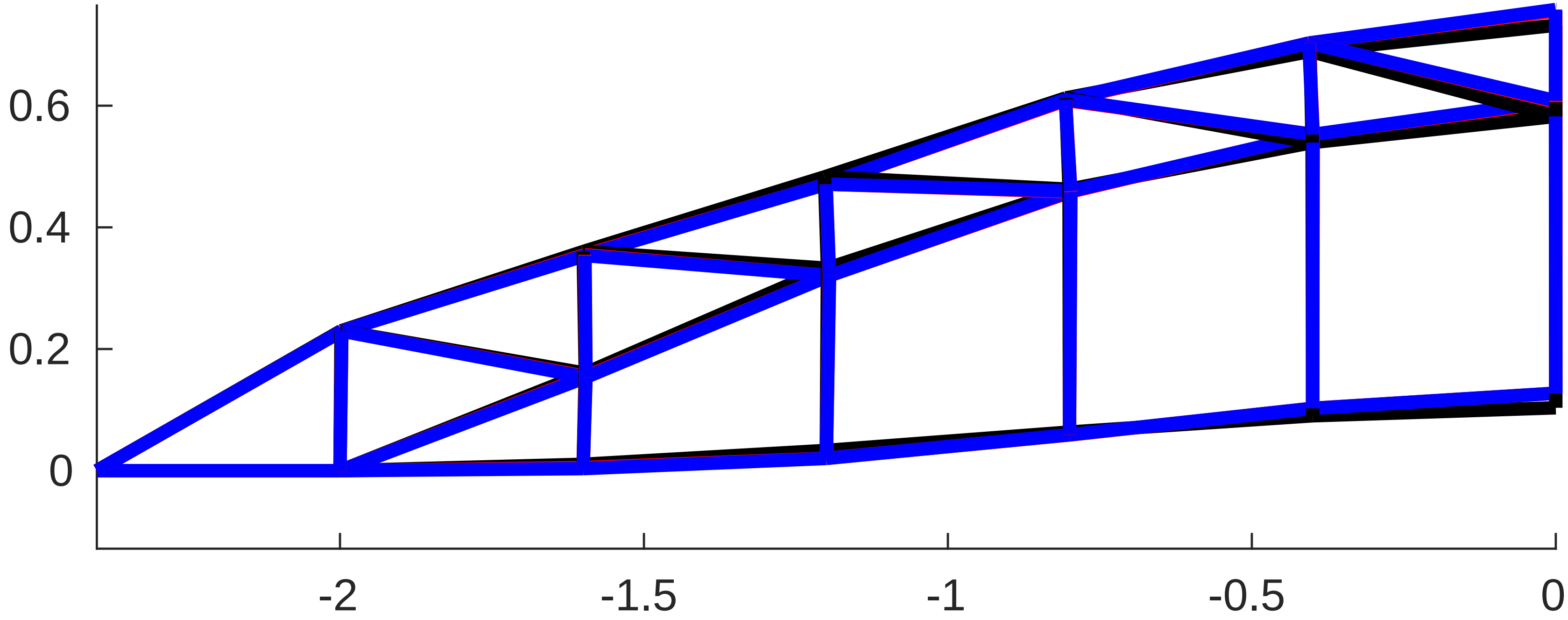
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



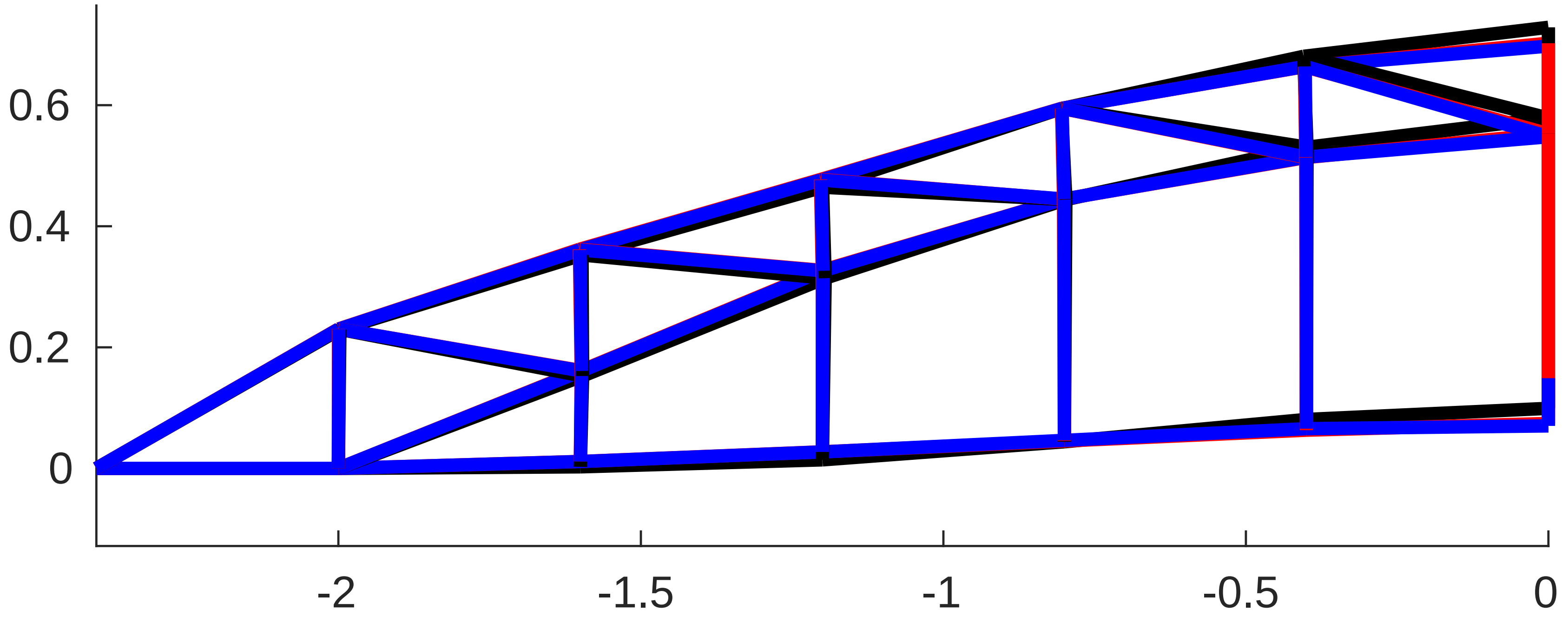
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



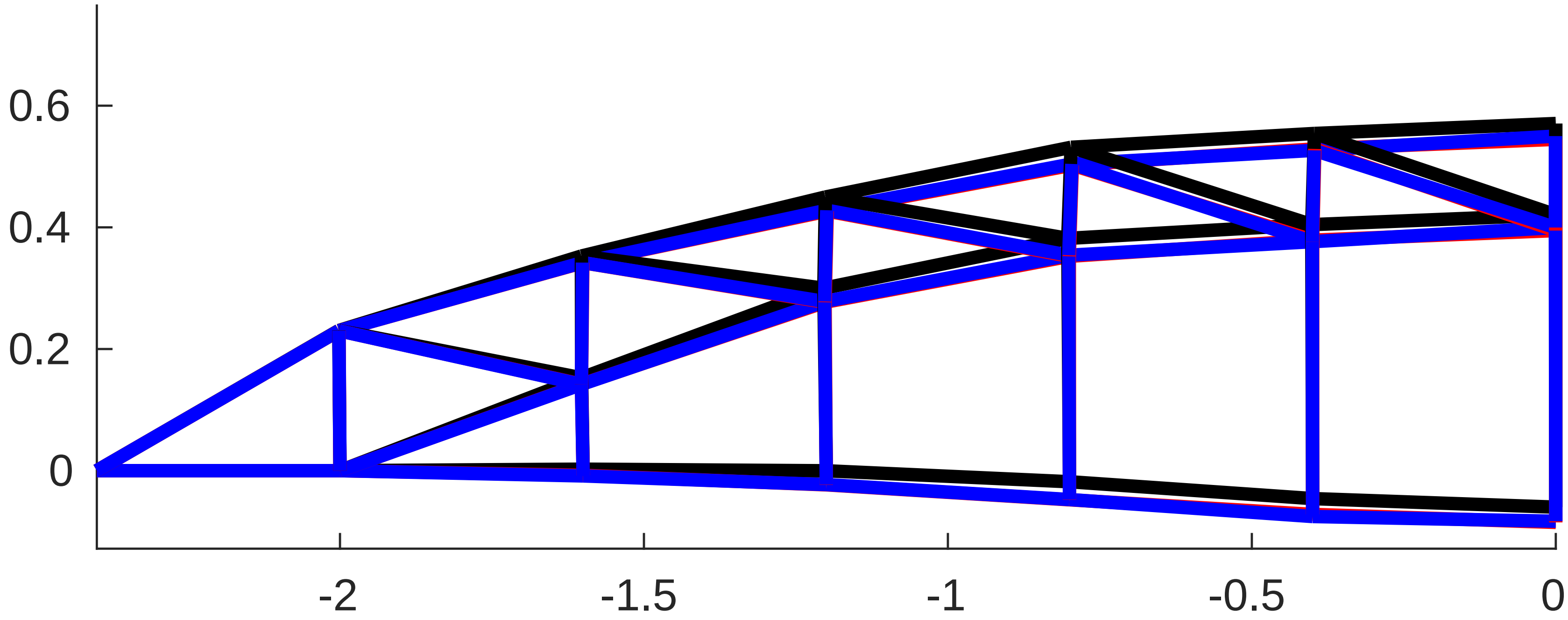
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



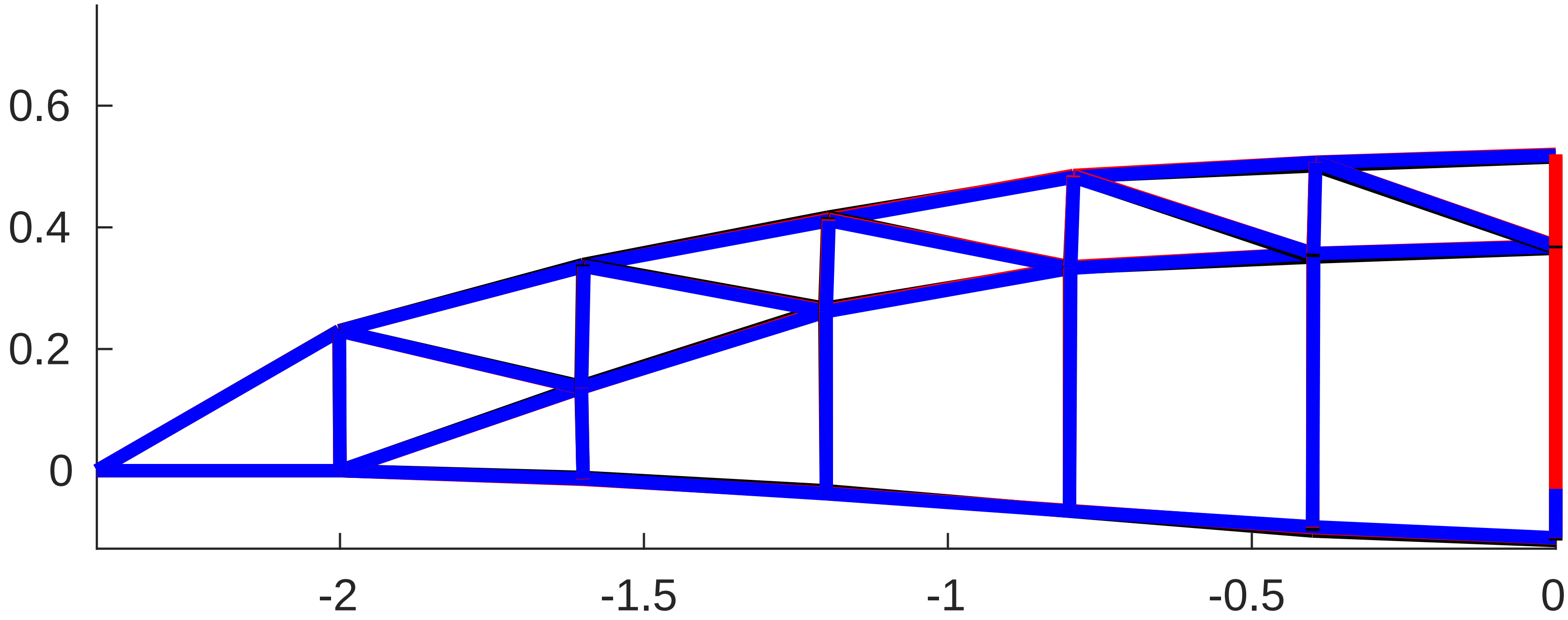
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



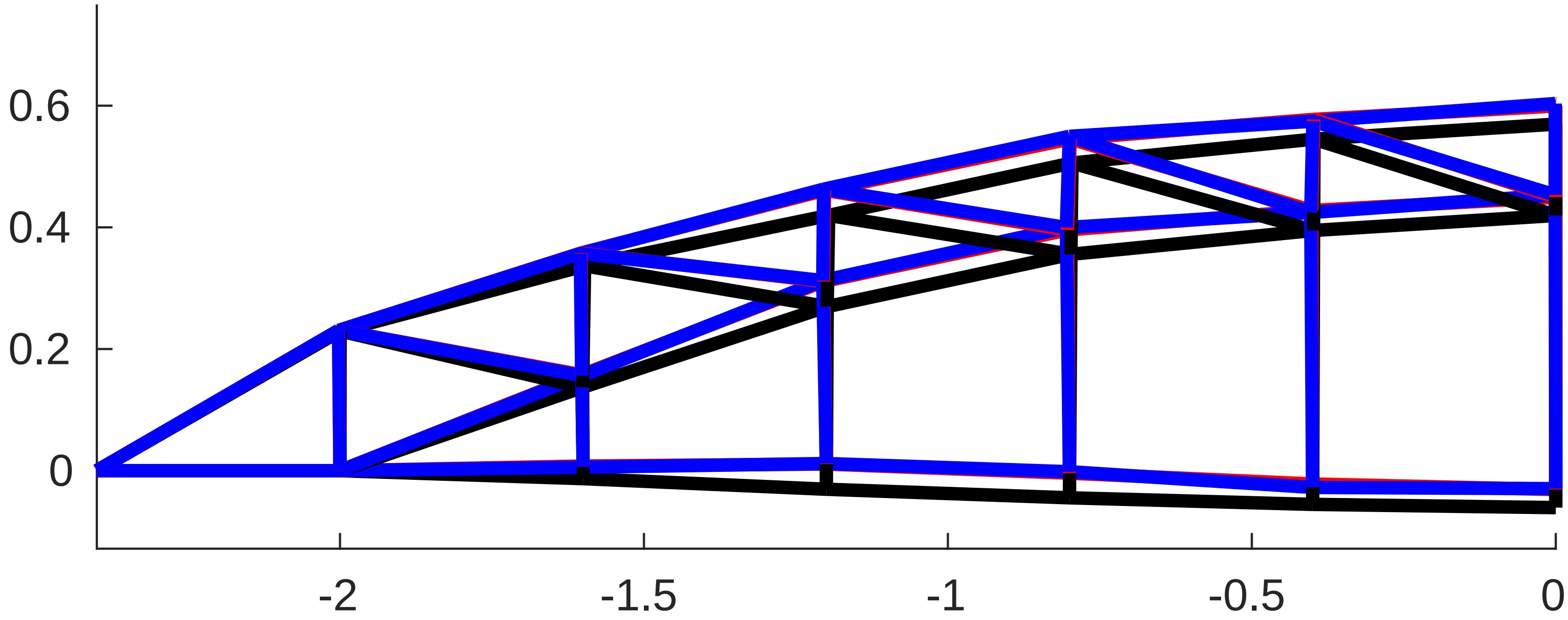
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



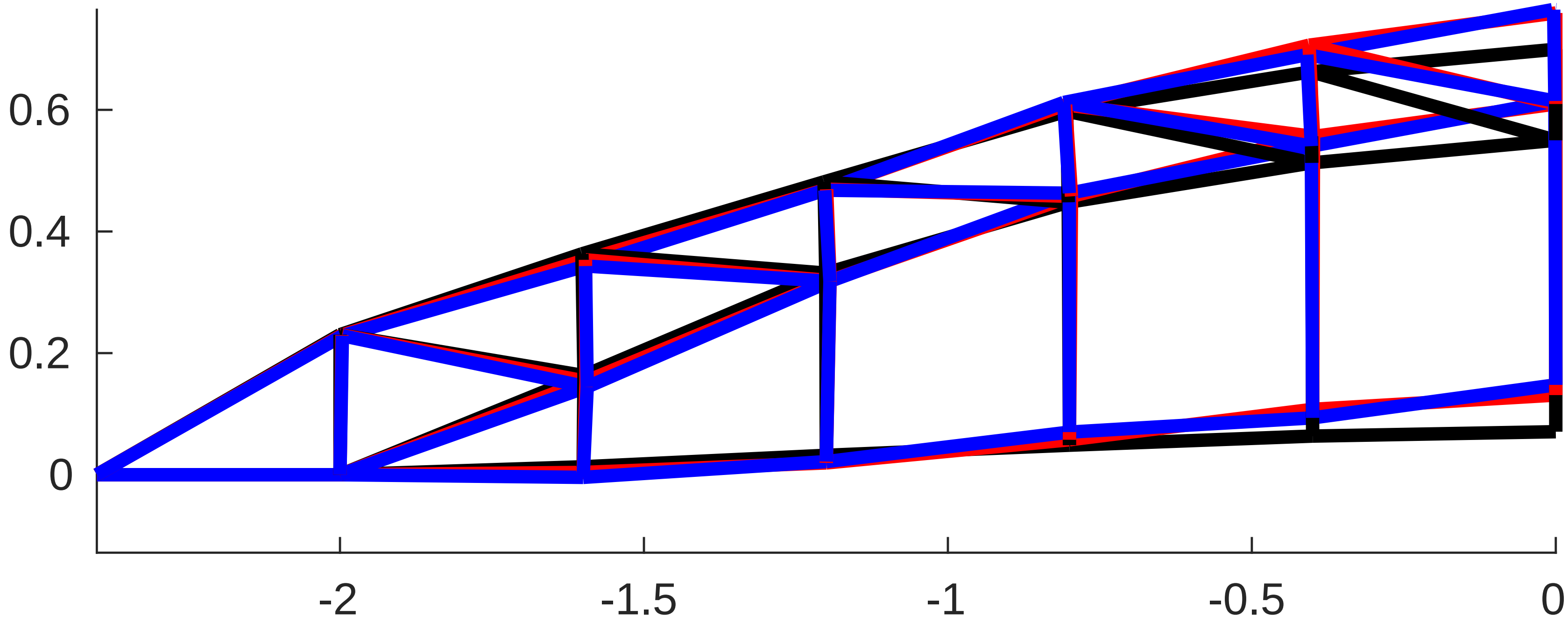
Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



Numerické řešení diferenciálních rovnic

Volné kmity Sýkorova mostu: Euler vers. projekce



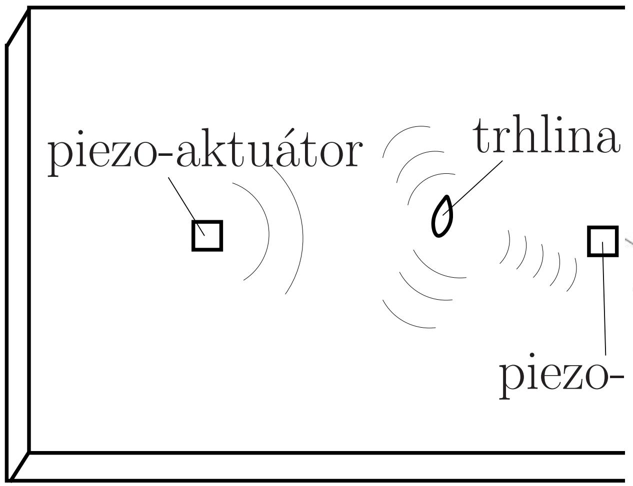
S Pythagorem přesně a rychle

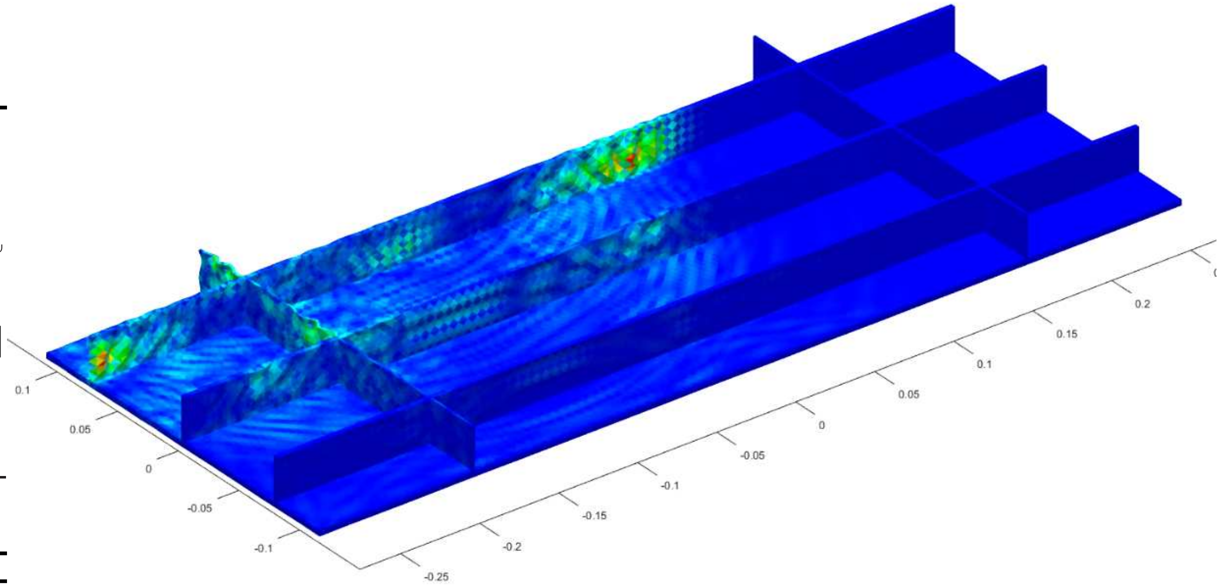
Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

Ultrazvuková defektoskopie draku (trup, . . .) letadla

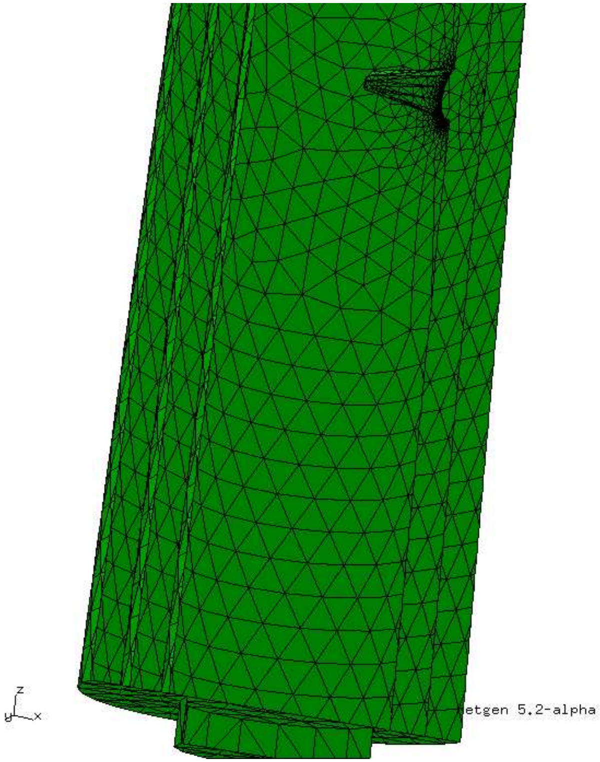
Spolupráce s Honeywell Brno

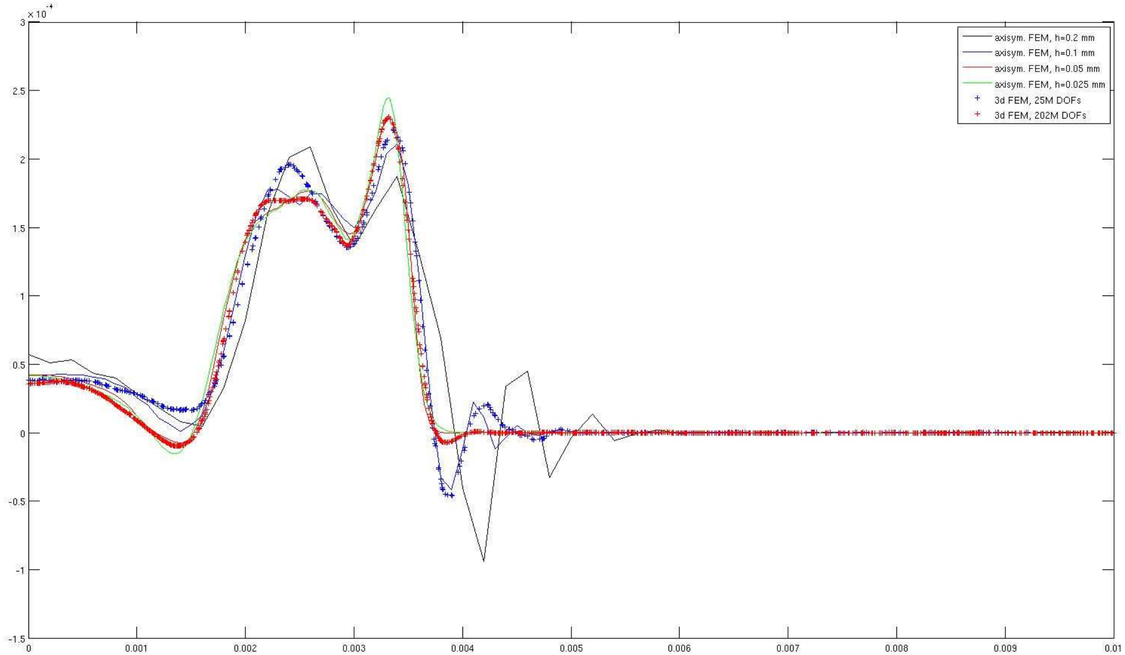




Ultrazvukové měření výšky hladiny oleje v autě

Spolupráce s Vitesco Technologies (Continental) Ostrava

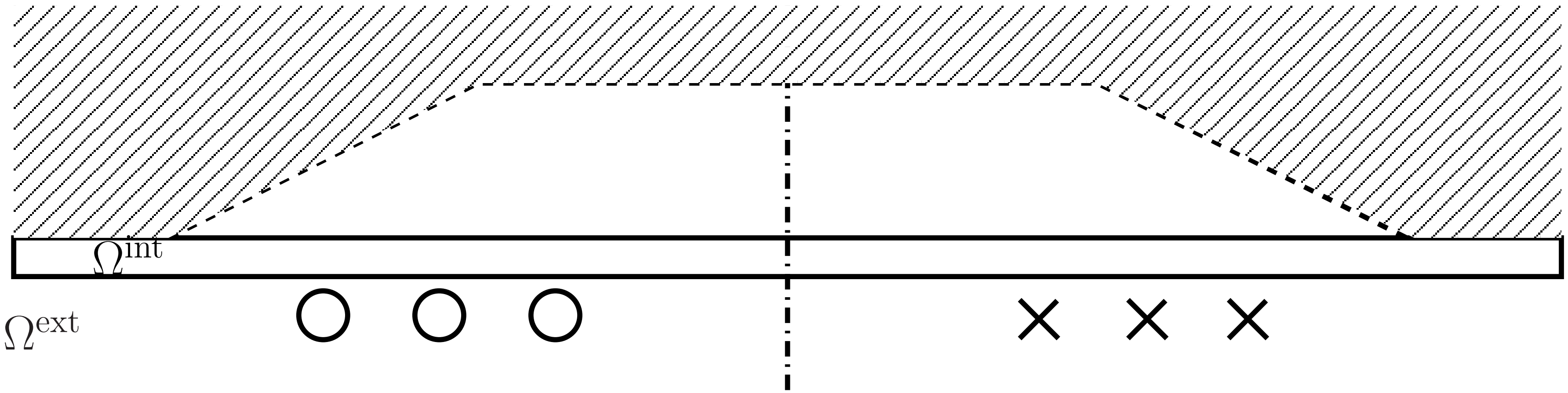


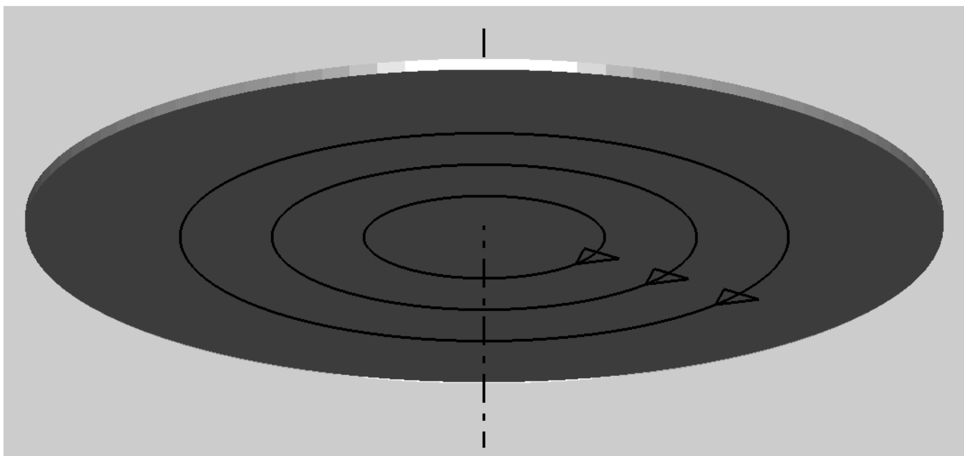


Elektromagnetické tváření plechů

Spolupráce s Fraunhofer Chemnitz

cívka (v Ω^{ext}): 3 závity,
budicí proud: amplituda 100 kA, půl peridoda sinu, frekvence 8.33 kHz,
vodič (Ω^{int}): hliníkový plech, tl. 2 mm thin, 2 mm nad cívkou





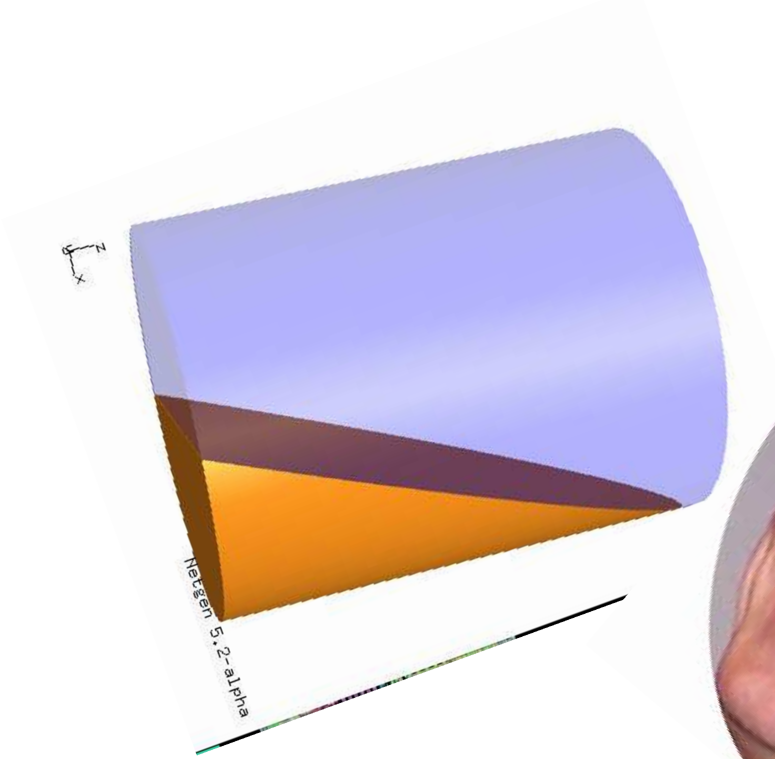
S Pythagorem přesně a rychle

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Pythagorova věta, projekce bodu na přímku a rovinu, MP3, JPEG
- Numerické integrování
- Numerické řešení diferenciálních rovnic
- Aplikace: ultrazvuková diagnostika letadel, ...
- Otázka do ŠKOMAM CUPu

Otázka do ŠKOMAM CUPu

Kolik piva zbývá ve válcové sklenici, když pivo zakrývá půlku dna?



$$\frac{\text{Objem piva}}{\text{Objem sklenice}} = \frac{\frac{v}{r} \int_0^r \rho^2 \, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\varphi) \, d\varphi}{\pi \, r^2 \, v} = \, ?,$$

kde r je poloměr válce a v je výška válce.