Pickův vzorec

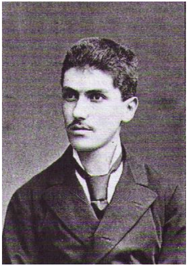
Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

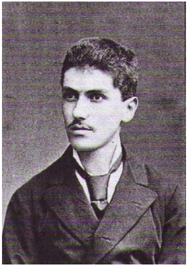
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

29.1. 2020

(ŠKOMAM)



Georg Alexander Pick (10. srpna 1859, Vídeň – 26. července 1942, Terezín) byl rakouský matematik působící v Praze.



Georg Alexander Pick (10. srpna 1859, Vídeň – 26. července 1942, Terezín) byl rakouský matematik působící v Praze.

V letech 1875-79 studoval na univerzitě ve Vídni matematiku a fyziku. V roce 1880 získal doktorát a v témže roce přijal místo asistenta fyziky na pražské univerzitě u E. Macha. V roce 1882 se habilitoval, v roce 1888 byl jmenován mimořádným a v roce 1892 řádným profesorem matematiky na pražské německé univerzitě. Ve školním roce 1900-01 byl děkanem filozofické fakulty. V roce 1929 byl penzionován a žil ve Vídni. Po obsazení Rakouska odešel do Prahy. V roce 1942 byl deportován do Terezína a dva týdny poté zemřel.

Pickův vzorec

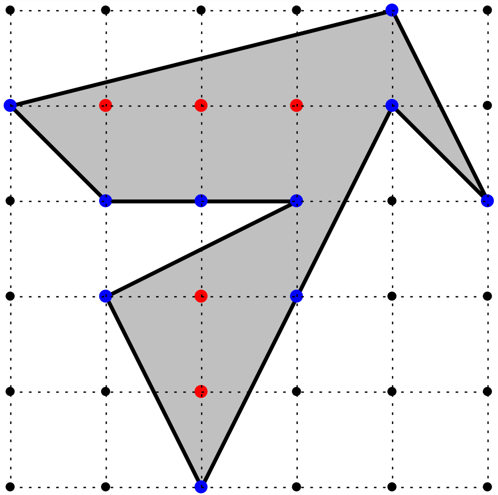
Pro obsah S mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech platí vztah

$$S = v + \frac{h}{2} - 1.$$

Pickův vzorec

Pro obsah S mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech platí vztah

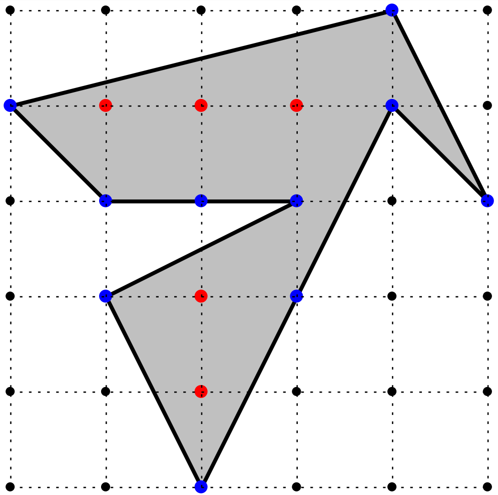
$$S = v + \frac{h}{2} - 1.$$



Pickův vzorec

Pro obsah S mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech platí vztah

$$S = v + \frac{h}{2} - 1.$$



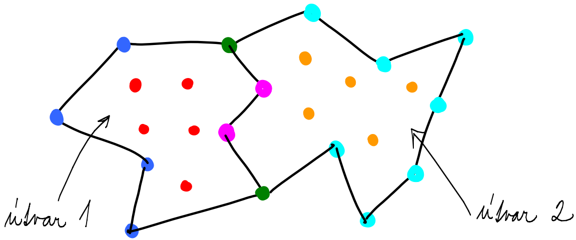
$$\boxed{S = 5 + \frac{10}{2} - 1 = 9}$$

Důkaz Pickova vzorce

Ukážeme, že výraz $P = v + \frac{h}{2} - 1$ (nazvěme jej pracovně Pickovo číslo) se chová (podobně jako plošný obsah) aditivně.

Důkaz Pickova vzorce

Ukážeme, že výraz $P = v + \frac{h}{2} - 1$ (nazvěme jej pracovně Pickovo číslo) se chová (podobně jako plošný obsah) aditivně.



$$P_1 = v_1 + \frac{h_1 + h + 2}{2} - 1 = v_1 + \frac{h_1 + h}{2}$$

$$P_2 = v_2 + \frac{h_2 + h + 2}{2} - 1 = v_2 + \frac{h_2 + h}{2}$$

$$P = v_1 + v_2 + h + \frac{h_1 + h_2 + 2}{2} - 1 = P_1 + P_2$$

Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Důkaz Pickova vzorce

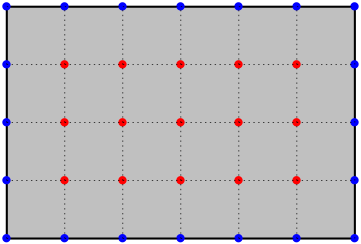
Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.

Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

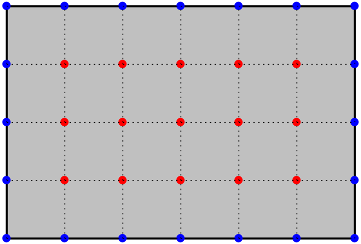
Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.



Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.

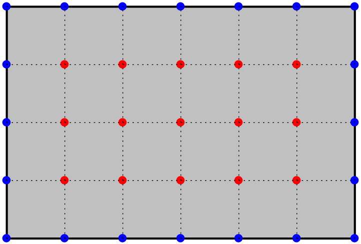


$$P = v + \frac{h}{2} - 1$$

Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.

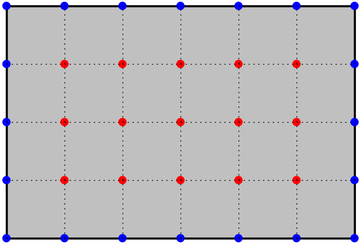


$$P = v + \frac{h}{2} - 1 = (a-1)(b-1) + \frac{2a+2b}{2} - 1$$

Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.

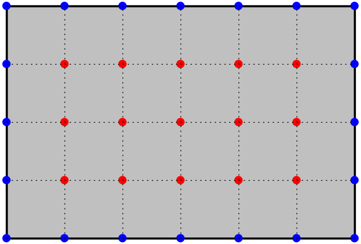


$$P = v + \frac{h}{2} - 1 = (a-1)(b-1) + \frac{2a+2b}{2} - 1 = ab - a - b + 1 + a + b - 1$$

Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.

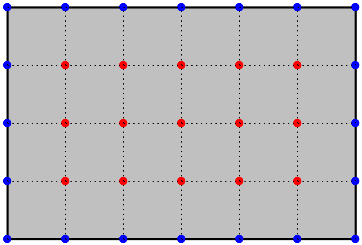


$$P = v + \frac{h}{2} - 1 = (a-1)(b-1) + \frac{2a+2b}{2} - 1 = ab - a - b + 1 + a + b - 1 = ab$$

Důkaz Pickova vzorce

Pokud bychom Pickův vzorec dokázali pro obecné trojúhelníky, byli bychom (vzhledem k výše uvedené aditivitě a faktu, že každý mnohoúhelník má jistou triangulaci) hotovi.

Nejprve ale ukážeme, že Pickův vzorec platí pro obdélníky $a \times b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$, se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami a s vrcholy v mřížových bodech.



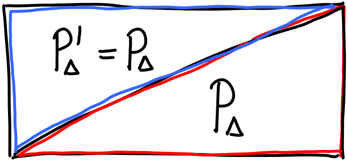
$$P = {\color{red}v} + \frac{{\color{blue}h}}{2} - 1 = {\color{red}(a-1)(b-1)} + \frac{{\color{blue}2a+2b}}{2} - 1 = {\color{red}ab - a - b + 1} + {\color{blue}a + b} - 1 = ab = S.$$

Důkaz Pickova vzorce

Pickův vzorec platí také pro všechny pravoúhlé trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech a s odvěsnami rovnoběžnými se souřadnými osami.

Důkaz Pickova vzorce

Pickův vzorec platí také pro všechny pravoúhlé trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech a s odvěsnami rovnoběžnými se souřadnými osami.

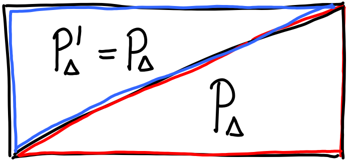


$$P_\square = P_\Delta + P'_\Delta = 2 \cdot P_\Delta$$

$$\Rightarrow P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot P_\square = \frac{1}{2} S_\square = S_\Delta$$

Důkaz Pickova vzorce

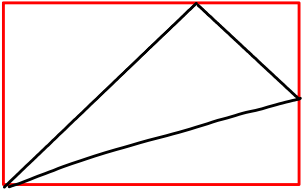
Pickův vzorec platí také pro všechny pravoúhlé trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech a s odvěsnami rovnoběžnými se souřadnými osami.

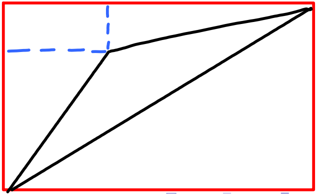


$$P_\square = P_\Delta + P'_\Delta = 2 \cdot P_\Delta$$

$$\Rightarrow P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot P_\square = \frac{1}{2} S_\square = S_\Delta$$

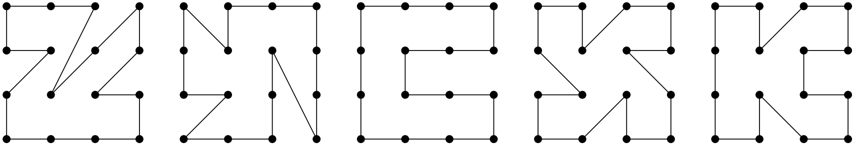
Pro obecné trojúhelníky lze Pickův vzorec dostat na základě předchozích úvah a následujících dvou obrázků.





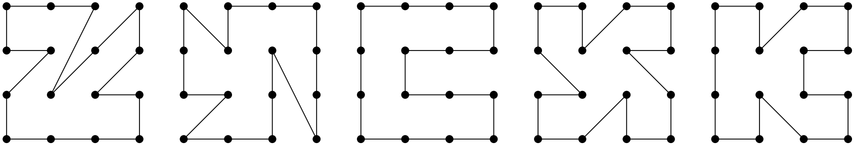
Úloha

Vypočtěte obsahy následujících pěti mnohoúhelníků.



Úloha

Vypočtěte obsahy následujících pěti mnohoúhelníků.



Řešení

Všechny mnohoúhelníky mají stejný obsah. Z Pickova vzorce totiž plyne

$$S = v + \frac{h}{2} - 1 = 0 + \frac{16}{2} - 1 = 7.$$

Úloha

Existuje nějaký rovnostranný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech?

Úloha

Existuje nějaký rovnostranný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech?

Řešení

Ukážeme, že takový trojúhelník neexistuje. Předpokládejme sporem, že existuje rovnostranný trojúhelník, který má vrcholy v mřížových bodech. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jeden z vrcholů má souřadnice $(0, 0)$. Pokud má druhý z vrcholů souřadnice (x, y), je jasné, že náš rovnostranný trojúhelník má stranu o velikosti $a = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Úloha

Existuje nějaký rovnostranný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech?

Řešení

Ukážeme, že takový trojúhelník neexistuje. Předpokládejme sporem, že existuje rovnostranný trojúhelník, který má vrcholy v mřížových bodech. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jeden z vrcholů má souřadnice $(0,0)$. Pokud má druhý z vrcholů souřadnice (x,y), je jasné, že náš rovnostranný trojúhelník má stranu o velikosti $a=\sqrt{x^2+y^2}$.

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí

$$v+\frac{h}{2}-1=S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

Úloha

Existuje nějaký rovnostranný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech?

Řešení

Ukážeme, že takový trojúhelník neexistuje. Předpokládejme sporem, že existuje rovnostranný trojúhelník, který má vrcholy v mřížových bodech. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jeden z vrcholů má souřadnice $(0,0)$. Pokud má druhý z vrcholů souřadnice (x,y), je jasné, že náš rovnostranný trojúhelník má stranu o velikosti $a=\sqrt{x^2+y^2}$.

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí

$$v+\frac{h}{2}-1=S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

Odtud dostaneme

$$\sqrt{3}=\frac{4v+2h-4}{x^2+y^2}$$

Úloha

Existuje nějaký rovnostranný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech?

Řešení

Ukážeme, že takový trojúhelník neexistuje. Předpokládejme sporem, že existuje rovnostranný trojúhelník, který má vrcholy v mřížových bodech. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jeden z vrcholů má souřadnice $(0,0)$. Pokud má druhý z vrcholů souřadnice (x,y), je jasné, že náš rovnostranný trojúhelník má stranu o velikosti $a=\sqrt{x^2+y^2}$.

Pro obsah rovnostranného trojúhelníku platí

$$v+\frac{h}{2}-1=S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

Odtud dostaneme

$$\sqrt{3}=\frac{4v+2h-4}{x^2+y^2}\in\mathbb{Q},$$

což je spor.

Úloha

Kolika způsoby lze rozměnit 200 Kč na pětikoruny, dvoukoruny a koruny?

Úloha

Kolika způsoby lze rozměnit 200 Kč na pětikoruny, dvoukoruny a koruny?

Řešení

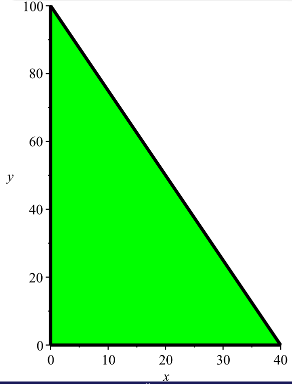
Ptáme se vlastně na to, kolik má rovnice $5x + 2y + z = 200$ řešení v množině $\mathbb{N}_0$. To je ale ekvivalentní otázce, kolik řešení (v $\mathbb{N}_0$) má nerovnice $5x + 2y \leq 200$, což však odpovídá počtu mřížových bodů v trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(40, 0)$ a $(0, 100)$.

Úloha

Kolika způsoby lze rozměnit 200 Kč na pětikoruny, dvoukoruny a koruny?

Řešení

Ptáme se vlastně na to, kolik má rovnice $5x + 2y + z = 200$ řešení v množině $\mathbb{N}_0$. To je ale ekvivalentní otázce, kolik řešení (v $\mathbb{N}_0$) má nerovnice $5x + 2y \leq 200$, což však odpovídá počtu mřížových bodů v trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(40, 0)$ a $(0, 100)$.

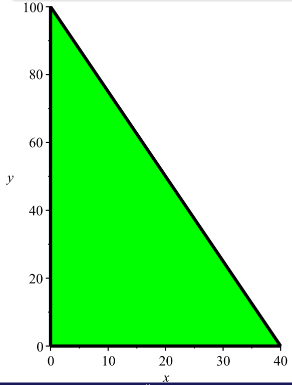


Úloha

Kolika způsoby lze rozměnit 200 Kč na pětikoruny, dvoukoruny a koruny?

Řešení

Ptáme se vlastně na to, kolik má rovnice $5x + 2y + z = 200$ řešení v množině $\mathbb{N}_0$. To je ale ekvivalentní otázce, kolik řešení (v $\mathbb{N}_0$) má nerovnice $5x + 2y \leq 200$, což však odpovídá počtu mřížových bodů v trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(40,0)$ a $(0,100)$.



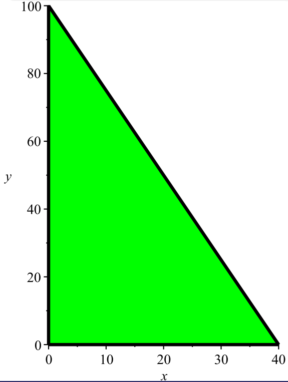
Lze snadno ukázat, že
$h = 40 + 100 + \text{nsd}(40,100) = 160.$

Úloha

Kolika způsoby lze rozměnit 200 Kč na pětikoruny, dvoukoruny a koruny?

Řešení

Ptáme se vlastně na to, kolik má rovnice $5x + 2y + z = 200$ řešení v množině $\mathbb{N}_0$. To je ale ekvivalentní otázce, kolik řešení (v $\mathbb{N}_0$) má nerovnice $5x + 2y \leq 200$, což však odpovídá počtu mřížových bodů v trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(40, 0)$ a $(0, 100)$.



Lze snadno ukázat, že $h = 40 + 100 + \text{nsd}(40, 100) = 160$.

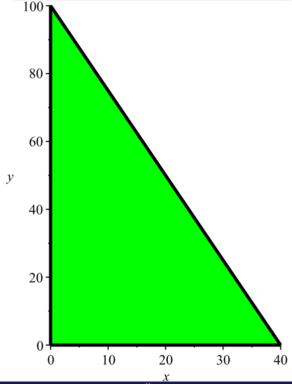
Pro obsah trojúhelníku platí $S = 2000$, odkud snadno $v = S - \frac{h}{2} + 1 = 2000 - 80 + 1 = 1921$.

Úloha

Kolika způsoby lze rozměnit 200 Kč na pětikoruny, dvoukoruny a koruny?

Řešení

Ptáme se vlastně na to, kolik má rovnice $5x + 2y + z = 200$ řešení v množině $\mathbb{N}_0$. To je ale ekvivalentní otázce, kolik řešení (v $\mathbb{N}_0$) má nerovnice $5x + 2y \leq 200$, což však odpovídá počtu mřížových bodů v trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(40, 0)$ a $(0, 100)$.



Lze snadno ukázat, že $h = 40 + 100 + \text{nsd}(40, 100) = 160$.

Pro obsah trojúhelníku platí $S = 2000$, odkud snadno $v = S - \frac{h}{2} + 1 = 2000 - 80 + 1 = 1921$.

Celkem tedy existuje $v + h = 1921 + 160 = 2081$ možností, jak peníze rozměnit.

Hodnocení vyučujících

Na škole hodnotí studenti v anonymní anketě svého pedagoga tak, že mu přidělují body z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Po skončení ankety pedagog uvidí počet studentů, kteří ho hodnotili, a celkový počet obdržených bodů. Získá-li pedagog například 702 bodů od 193 studentů, vypočte se jeho průměrné hodnocení jako $\frac{702}{193} = 3,637305699\ldots \doteq 3,64$ (vždy se zaokrouhluje na 2 desetinná místa).

Hodnocení vyučujících

Na škole hodnotí studenti v anonymní anketě svého pedagoga tak, že mu přidělují body z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Po skončení ankety pedagog uvidí počet studentů, kteří ho hodnotili, a celkový počet obdržených bodů. Získá-li pedagog například 702 bodů od 193 studentů, vypočte se jeho průměrné hodnocení jako $\frac{702}{193} = 3,637305699\ldots \doteq 3,64$ (vždy se zaookrouhluje na 2 desetinná místa).

Úloha

Vypočtěte, kolika způsoby může pedagog získat hodnocení $4,70$*, hodnotí-li ho nejvýše 400 studentů.*

Hodnocení vyučujících

Na škole hodnotí studenti v anonymní anketě svého pedagoga tak, že mu přidělují body z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Po skončení ankety pedagog uvidí počet studentů, kteří ho hodnotili, a celkový počet obdržených bodů. Získá-li pedagog například 702 bodů od 193 studentů, vypočte se jeho průměrné hodnocení jako $\frac{702}{193} = 3,637305699\ldots \doteq 3,64$ (vždy se zaokrouhluje na 2 desetinná místa).

Úloha

Vypočtěte, kolika způsoby může pedagog získat hodnocení 4,70*, hodnotí-li ho nejvýše 400 studentů.*

Řešení

Označme s celkový bodový zisk pedagoga a p počet hodnotících studentů. Je zřejmé, že vyučující získá požadované hodnocení, právě když

$$4,695 \leq \frac{s}{p} < 4,705$$

Hodnocení vyučujících

Na škole hodnotí studenti v anonymní anketě svého pedagoga tak, že mu přidělují body z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Po skončení ankety pedagog uvidí počet studentů, kteří ho hodnotili, a celkový počet obdržených bodů. Získá-li pedagog například 702 bodů od 193 studentů, vypočte se jeho průměrné hodnocení jako $\frac{702}{193} = 3,637305699\ldots \doteq 3,64$ (vždy se zaokrouhluje na 2 desetinná místa).

Úloha

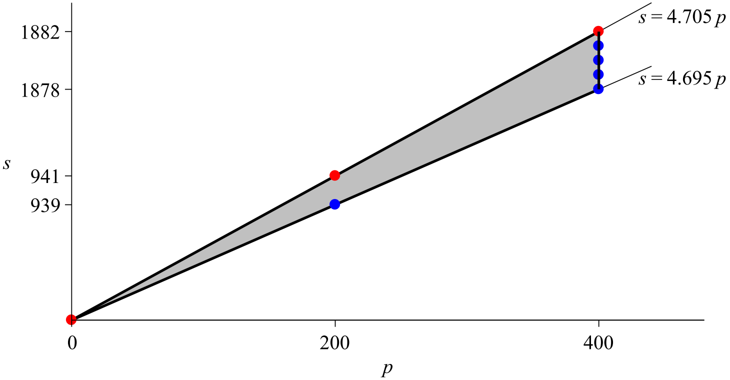
Vypočtěte, kolika způsoby může pedagog získat hodnocení $4,70$, *hodnotí-li ho nejvýše 400 studentů.*

Řešení

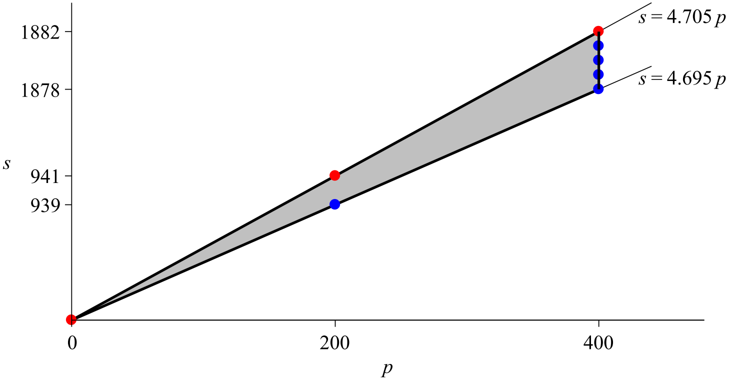
Označme s celkový bodový zisk pedagoga a p počet hodnotících studentů. Je zřejmé, že vyučující získá požadované hodnocení, právě když

$$4,695 \leq \frac{s}{p} < 4,705 \quad \Longleftrightarrow \quad s \geq 4,695p \ \wedge\ s < 4,705p.$$

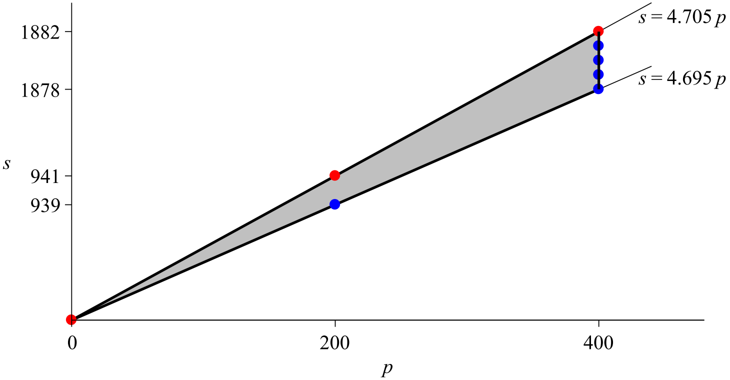
$s \geq 4,695p \ \wedge \ s < 4,705p$



$s \geq 4,695p \ \wedge \ s < 4,705p$

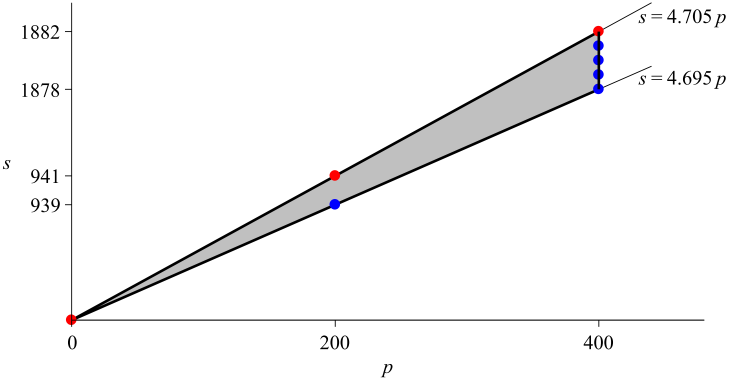


$$S = \frac{4 \cdot 400}{2} = 800$$



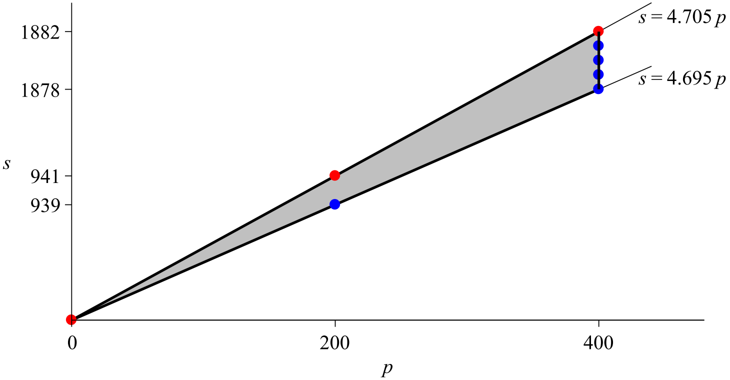
$$S = \frac{4 \cdot 400}{2} = 800 \overset{\text{Pick}}{=} v + \frac{h}{2} - 1$$

$s \geq 4,695p \ \wedge \ s < 4,705p$



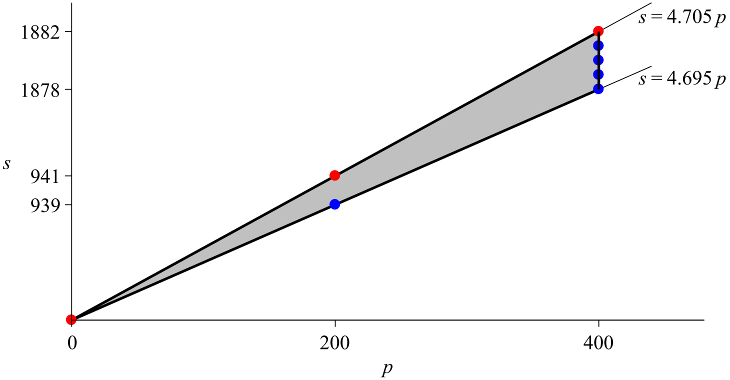
$$S = \frac{4 \cdot 400}{2} = 800 \overset{\text{Pick}}{=} v + \frac{h}{2} - 1 = v + \frac{8}{2} - 1 = v + 3$$

$s \geq 4,695p \ \wedge \ s < 4,705p$



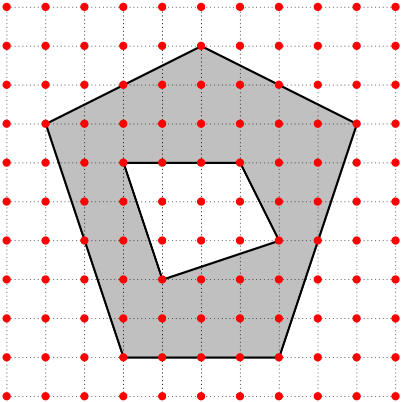
$$S = \frac{4 \cdot 400}{2} = 800 \overset{\text{Pick}}{=} v + \frac{h}{2} - 1 = v + \frac{8}{2} - 1 = v + 3 \implies v = 797.$$

$s \geq 4,695p \ \wedge \ s < 4,705p$



$$S = \frac{4 \cdot 400}{2} = 800 \overset{\text{Pick}}{=} v + \frac{h}{2} - 1 = v + \frac{8}{2} - 1 = v + 3 \implies v = 797.$$

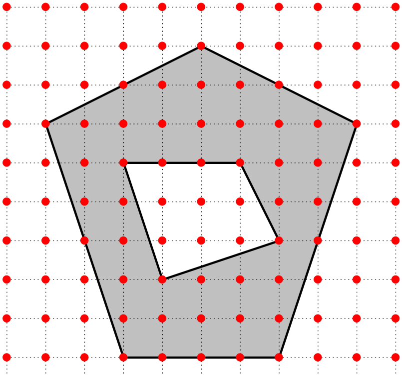
Celkový počet možností je proto $797 + 5 = 802$.



Úloha

Najděte hodnotu $p \in \mathbb{R}$ *tak, aby platila rovnost*

$$S = v + \frac{h}{2} - p.$$

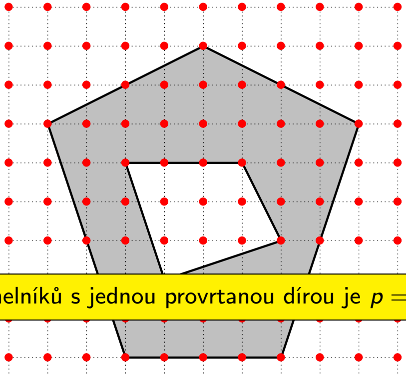


Víme, že pro (klasické) mnohoúhelníky je $p = 1$, tzn. $S = v + \frac{h}{2} - 1$.

Úloha

Najděte hodnotu $p \in \mathbb{R}$ tak, aby platila rovnost

$$S = v + \frac{h}{2} - p.$$



V případě mnohoúhelníků s jednou provrtanou dírou je $p = 0$, tzn. $S = v + \frac{h}{2}$.

Víme, že pro (klasické) mnohoúhelníky je $p = 1$, tzn. $S = v + \frac{h}{2} - 1$.

Úloha

Najděte hodnotu $p \in \mathbb{R}$ tak, aby platila rovnost

$$S = v + \frac{h}{2} - p.$$

Literatura

http://cs.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick

www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/czv/pickova_veta.pdf

Děkuji za pozornost!