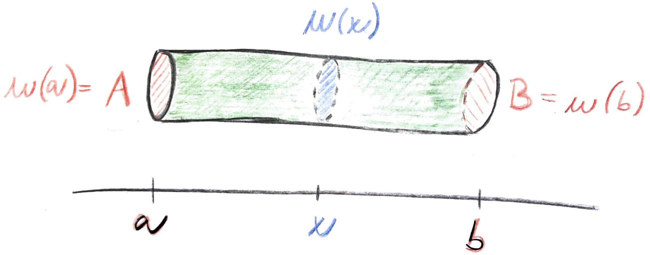
Laplaceova bota

Jiří Bouchala

VÝPOČETNÍ A APLIKOVANÁ
MATEMATIKA

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

4. února 2021, přednáška v semináři Škomam

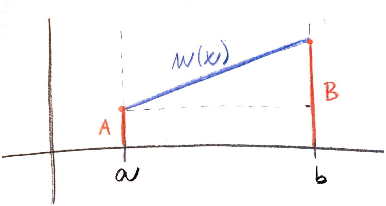


$$\begin{cases} u''(x) = 0 \quad \text{v} \quad (a, b), \\ u(a) = A, \\ u(b) = B. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u''(x) = 0 & \text{v} \quad (a, b), \\ u(a) = A, \\ u(b) = B. \end{cases}$$

Řešení:

$$u''(x) = (u')'(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$u'(x) = p \quad (\text{ pro nějaké } p \in \mathbb{R})$$
$$\Downarrow$$
$$u(x) = px + q \quad (\text{ pro nějaká } p, q \in \mathbb{R}).$$



Okrajové podmínky:

$$\begin{matrix} u(a) = A \\ u(b) = B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u(a) = pa + q = A \\ u(b) = pb + q = B \end{matrix} \Rightarrow p = \frac{B-A}{b-a}, \quad q = A - \frac{B-A}{b-a}a.$$

Odtud

$$\boxed{u(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a).}$$

□

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \quad \text{v} \quad (a, b), \\ u(a) = A, \\ u(b) = B. \end{cases}$$

Numerické (přibližné) řešení:

$$u(x) \doteq \begin{cases} A, & x \in (a, t_1), \\ X_1, & x \in (t_1, t_2), \\ X_2, & x \in (t_2, t_{)}), \\ X_3, & x \in (t_3, t_4), \\ \dots & \\ X_n, & x \in (t_n, t_{n+1}), \\ B, & x \in (t_{n+1}, b). \end{cases}$$

$$u''(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$u(x) \doteq \frac{u(x-h) + u(x+h)}{2} \quad \text{pro „malá“ } h$$

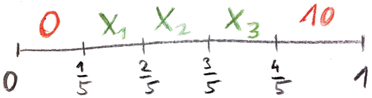
$$\Downarrow$$

$$X_k = \frac{X_{k-1} + X_{k+1}}{2}$$

... dostáváme soustavu n lineárních rovnic

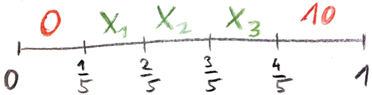
(pro neznámé X_1, X_2, ... , X_n)

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \quad \text{v} \quad (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 10. \end{cases}$$

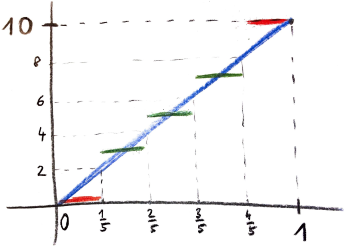


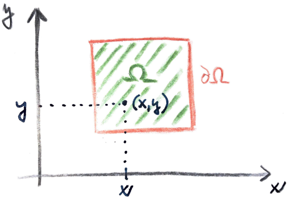
$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{0 + X_2}{2} \\ X_2 &= \frac{X_1 + X_3}{2} \\ X_3 &= \frac{X_2 + 10}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2X_1 - X_2 &= 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 &= 0 \\ X_2 - 2X_3 &= -10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= \frac{5}{2} \\ X_2 &= 5 \\ X_3 &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u''(x) = 0 & \text{v} \quad (0,1), \\ u(0) = 0, & \\ u(1) = 10. & \end{cases}$$



$$\boxed{u(x) = 10x} \doteq \begin{cases} 0, & x \in (0, \frac{1}{5}), \\ \frac{5}{2}, & x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}), \\ 5, & x \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), \\ \frac{15}{2}, & x \in (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \\ 10, & x \in (\frac{4}{5}, 1). \end{cases}$$



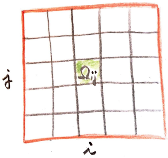


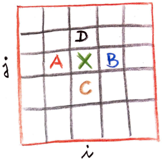
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{v} \quad \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y) & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (u \ \dots \ \underline{\text{harmonická funkce}} \text{ na } \Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y) \doteq \frac{u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h)}{4} \quad \text{pro „malá“ } h$$



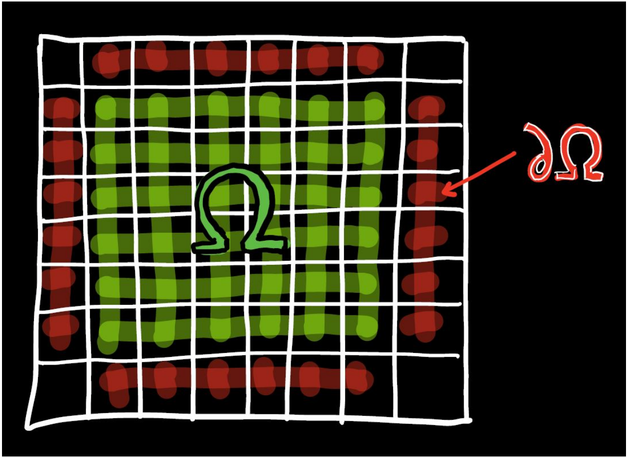


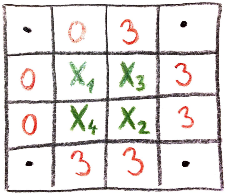
$$u(x,y) \doteq \begin{cases} X, & (x,y) \in \Omega_{i,j}, \\ A, & (x,y) \in \Omega_{i-1,j}, \\ B, & (x,y) \in \Omega_{i+1,j}, \\ C, & (x,y) \in \Omega_{i,j-1}, \\ D, & (x,y) \in \Omega_{i,j+1}. \end{cases}$$

$$X = \frac{A + B + C + D}{4}$$

... <u>vlastnost průměru</u>

Po částech konstantní funkci na $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ splňující všude v Ω vlastnost průměru nazýváme <u>diskrétní harmonickou funkcí</u> (na $\overline{\Omega}$).





$$X_1, X_2, X_3, X_4 = ?$$

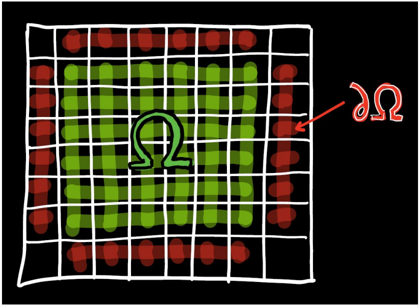
$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{0 + X_3 + X_4 + 0}{4} \\
X_2 &= \frac{X_4 + 3 + 3 + X_3}{4} \\
X_3 &= \frac{X_1 + 3 + X_2 + 3}{4} \\
X_4 &= \frac{0 + X_2 + 3 + X_1}{4}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\left.\begin{aligned}
4X_1 - X_3 - X_4 &= 0 \\
4X_2 - X_3 - X_4 &= 6 \\
-X_1 - X_2 + 4X_3 &= 6 \\
-X_1 - X_2 + 4X_4 &= 3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
X_1 &= 1 \\
X_2 &= \frac{5}{2} \\
X_3 &= \frac{19}{8} \\
X_4 &= \frac{13}{8}
\end{aligned}$$

Věta (princip maxima).

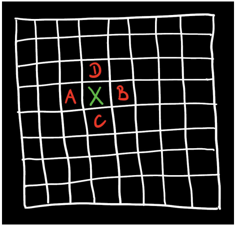
Nabývá-li diskrétní harmonická funkce na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ svého maxima (tj. největší hodnoty) nebo minima (tj. nejmenší hodnoty) v Ω (tzn. „uvnitř“), je na $\overline{\Omega}$ konstantní.

Důsledek.

Diskrétní harmonická funkce nabývá svého maxima i minima na hranici, tj. na $\partial\Omega$.



Důkaz.



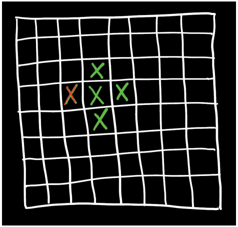
$$\color{green}{X} = \max_{\overline{\Omega}} u$$

$$\Downarrow$$

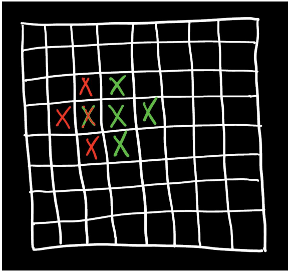
$$\color{red}{A, B, C, D} \leq \color{green}{X} = \frac{\color{red}{A + B + C + D}}{4}$$

$$\Downarrow$$

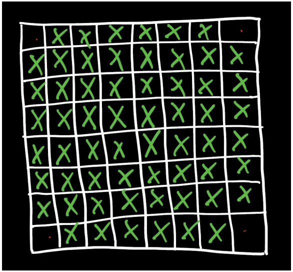
$$\color{red}{A = B = C = D} = \color{green}{X}$$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow$



$\square$

Věta (o jednoznačnosti řešení diskrétní úlohy).

Nechť u_1 a u_2 jsou dvě diskrétní harmonická řešení úlohy

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{v } \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y) & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pak

$$u_1 = u_2.$$

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že funkce

$$u := u_1 - u_2$$

je diskrétním harmonickým řešením úlohy

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{v } \ \Omega, \\ u(x,y) = 0 & \text{na } \ \partial\Omega \end{cases}$$

a použít princip maxima.

□

Věta (o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic).

Soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \cdots + a_{3n}X_n &= b_3 \\ &\ldots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n &= b_n \end{aligned}$$

má pro každou „pravou stranu“

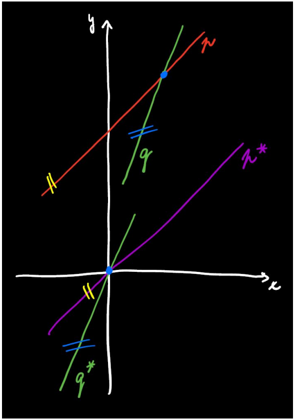
$$b = (b_1, b_2, b_3 \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

právě jedno řešení

$$X = (X_1, X_2, X_3 \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

právě tehdy, má-li tato soustava pro nulovou pravou stranu, tzn. je-li $b = (0, 0, 0, \ldots, 0)$, pouze „triviální řešení“ $X = (0, 0, \ldots, 0)$.

Důkaz pro $n = 2$.



Soustava $\boxed{\begin{aligned} ax + by &= \alpha \\ cx + dy &= \beta \end{aligned}}$ má právě jedno řešení

$\Updownarrow$

přímky $\boxed{\begin{aligned} p: \quad ax + by &= \alpha \\ q: \quad cx + dy &= \beta \end{aligned}}$ jsou různoběžné

$\Updownarrow$

přímky $\boxed{\begin{aligned} p^*: \quad ax + by &= 0 \\ q^*: \quad cx + dy &= 0 \end{aligned}}$ jsou různoběžné

$\Updownarrow$

soustava $\boxed{\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}}$ má právě jedno řešení.

$\square$

Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení diskrétní úlohy).

Existuje právě jedno diskrétní harmonické řešení úlohy

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{v } \Omega, \\ u(x,y) = g(x,y) & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že pro diskretizací získanou soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \cdots + a_{3n}X_n &= b_3 \\
& \ldots \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n &= b_n
\end{aligned}
$$

platí:

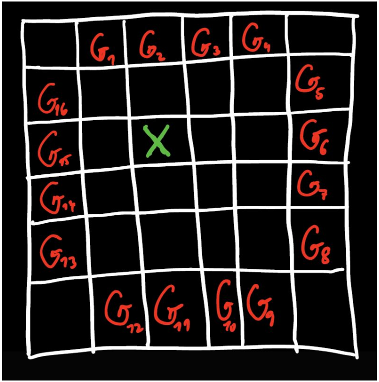
- koeficienty a_{ij} nezávisí na funkci g,
- pravá strana $b = (b_1, b_2, b_3 \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ je určena okrajovou podmínkou g;

$$g(x, y) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = (0, 0, 0 \ldots, 0),$$

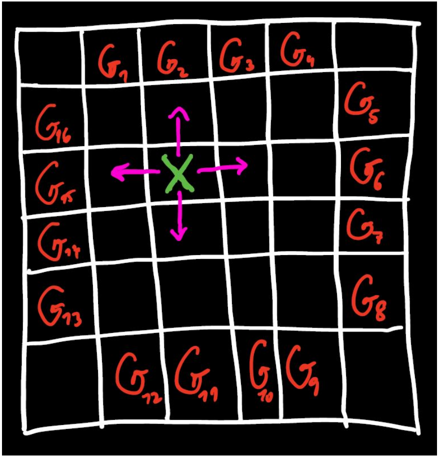
a proto (viz větu o jednoznačnosti) získaná soustava má pro $b = (0, 0, 0 \ldots, 0)$ jenom triviální řešení.Odtud již (viz větu o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic) přímo plyne dokazované tvrzení.

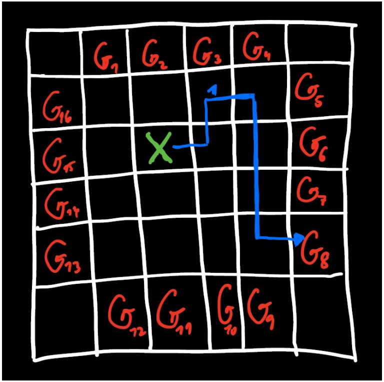
□

Náhodná procházka - cesta k řešení diskretizované úlohy.

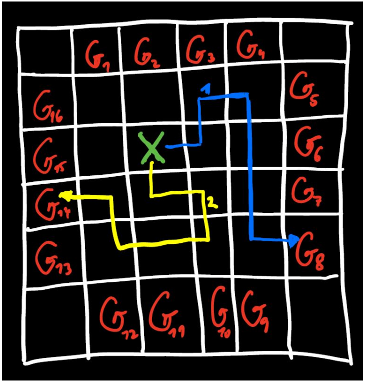


$$X = ?$$


G_1
G_2
G_3
G_4
G_5
G_6
G_7
G_8
G_9
G_{10}
G_{11}
G_{12}
G_{13}
G_{14}
G_{15}
G_{16}
X

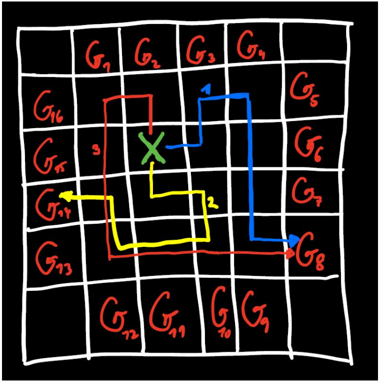


$$X \xrightarrow{1} G_8 =: V_1$$



$$X \xrightarrow{1} G_8 =: V_1$$

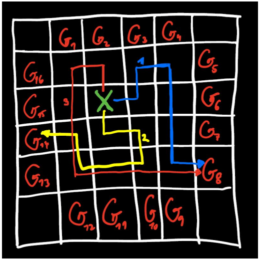
$$X \xrightarrow{2} G_{14} =: V_2$$



$$X \xrightarrow{1} G_8 =: V_1$$

$$X \xrightarrow{2} G_{14} =: V_2$$

$$X \xrightarrow{3} G_8 =: V_3$$



$$X \xrightarrow{1} G_8 =: V_1$$

$$X \xrightarrow{2} G_{14} =: V_2$$

$$X \xrightarrow{3} G_8 =: V_3$$

$$\dots$$

Dá se ukázat, že pro „velká“ $n \in \mathbb{N}$ je

$$X \doteq \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{n}.$$

Literatura.

Pavel Ludvík: *Nebojte se extremálních bodů!*, 2017, http://am.vsb.cz/osma