89, kam se podíváš

aneb Trochu jiný dějepis

David Ulčák

ŠKOMAM 2021

5.2.2021

Plán výuky

- Dějepis? To snad ne!
- Něco málo o (prvo)číslech
- Punč nebo zlato?
- Řada jak z osmdesátek
- Různé

Všichni víme, co se stalo v listopadu 1989:

Všichni víme, co se stalo v listopadu 1989:

Konjunkce Venuše, Měsíce, Marsu, Saturnu, Uranu a Neptunu

Všichni víme, co se stalo v listopadu 1989:

Konjunkce Venuše, Měsíce, Marsu, Saturnu, Uranu a Neptunu (22.11.)

Nějaké další letopočty

- 1889: Otevření Eiffelovy věže

Nějaké další letopočty

- 1889: Otevření Eiffelovy věže
- 1789:
  - Dobytí Bastily
  - Vzpoura na lodi Bounty
  - Objev uranu (prvku)

Nějaké další letopočty

- 1889: Otevření Eiffelovy věže
- 1789:
  - Dobytí Bastily
  - Vzpoura na lodi Bounty
  - Objev uranu (prvku)
- 1689: „francouzský“ požár Prahy

Nějaké další letopočty

- 1889: Otevření Eiffelovy věže
- 1789:
    - Dobytí Bastily
    - Vzpoura na lodi Bounty
    - Objev uranu (prvku)
- 1689: „francouzský“ požár Prahy
- 1589: Založen Volgograd

Nějaké další letopočty

- 1889: Otevření Eiffelovy věže
- 1789:
  - Dobytí Bastily
  - Vzpoura na lodi Bounty
  - Objev uranu (prvku)
- 1689: „francouzský“ požár Prahy
- 1589: Založen Volgograd

⋮

- 589 př.n.l.: Nabukadnesar II. zaútočil na Jeruzalém

Nějaké další letopočty

- 1889: Otevření Eiffelovy věže
- 1789:
  - Dobytí Bastily
  - Vzpoura na lodi Bounty
  - Objev uranu (prvku)
- 1689: „francouzský“ požár Prahy
- 1589: Založen Volgograd

⋮

- 589 př.n.l.: Nabukadnesar II. zaútočil na Jeruzalém

A samozřejmě 17.11.1989...

Náhoda?

- $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 117 \cdot 17$
- 17, 11, 19 i 89 jsou prvočísla

Náhoda?

- $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 117 \cdot 17$
- 17, 11, 19 i 89 jsou prvočísla

Co si vybereme? **89** (protože proč ne):

Náhoda?

- $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 117 \cdot 17$
- 17, 11, 19 i 89 jsou prvočísla

Co si vybereme? **89** (protože proč ne):

- $2^{89} - 1$ je 10. Mersennovo prvočíslo
- Pythagorejské prvočíslo

Náhoda?

- $1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 117 \cdot 17$
- 17, 11, 19 i 89 jsou prvočísla

Co si vybereme? **89** (protože proč ne):

- $2^{89} - 1$ je 10. Mersennovo prvočíslo
- Pythagorejské prvočíslo
- 89 v rozvoji π začíná na 11. pozici
- Na 89. (a 90.) platné cifře „e“ je 17

Štěstí?

Happy number:

- Každou cifru umocníme na druhou a sečteme
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme 1 nebo nezačneme chodit v kruhu

Štěstí?

Happy number:

- Každou cifru umocníme na druhou a sečteme
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme 1 nebo nezačneme chodit v kruhu

$$89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \ldots$$

Štěstí?

Happy number:

- Každou cifru umocníme na druhou a sečteme
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme 1 nebo nezačneme chodit v kruhu

$$89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \ldots$$

Posloupnosti čísel 11 a 17 by také dospěly k 89...

Štěstí?

Happy number:

- Každou cifru umocníme na druhou a sečteme
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme 1 nebo nezačneme chodit v kruhu

$$89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \dots$$

Posloupnosti čísel 11 a 17 by také dospěly k 89...

Lucky number:

- „Indexové síto“
- První čísla v posloupnosti:

$$1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, \dots$$

Zas nic.

Štěstí?

Fortunate number:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p_1, \ldots, p_n$ je prvních n prvočísel a q je nejmenší prvočíslo takové, že

$$q > P = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Fortunate numbers $= q - P$

Štěstí?

Fortunate number:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p_1, \ldots, p_n$ je prvních n prvočísel a q je nejmenší prvočíslo takové, že

$$q > P = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

  Fortunate numbers = $q - P$
- Mohou se opakovat
- Bez duplicit je 89 sedmnácté „Fortunate number“

Štěstí?

Fortunate number:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p_1, \ldots, p_n$ je prvních n prvočísel a q je nejmenší prvočíslo takové, že

$$q > P = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

  Fortunate numbers = $q - P$
- Mohou se opakovat
- Bez duplicit je 89 sedmnácté „Fortunate number“
- Fortunova hypotéza

Dělitelnost

Věta (Dělitelnost číslem 89)

Nechť $n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Číslo* $N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ *je dělitelné 89, jestliže je jím dělitelné i číslo*

$$9a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}.$$

Dělitelnost

Věta (Dělitelnost číslem 89)

Nechť $n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Číslo* $N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ *je dělitelné 89, jestliže je jím dělitelné i číslo*

$$9a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}.$$

Důkaz:

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = 89m$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k + 90a_0 - 90a_0 = 10\left(9a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}\right) - 89a_0 = 89m$$

Dělitelnost

Věta (Dělitelnost číslem 89)

Nechť $n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Číslo* $N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ *je dělitelné 89, jestliže je jím dělitelné i číslo*

$$9a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}.$$

Důkaz:

$$\exists m \in \mathbb{Z} : \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = 89m$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k + 90a_0 - 90a_0 = 10\left(9a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}\right) - 89a_0 = 89m$$

$$\gcd(10, 89) = 1 \quad \Rightarrow \quad 89 \mid \left(9a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}\right) \qquad \square$$

Dělitelnost

- Vezmeme poslední cifru, vynásobíme 9 a přičteme to, co „zbylo“
- Nestačí-li jednou, použijeme víckrát – pokaždé se „zbavíme“ jedné cifry.

Dělitelnost

- Vezmeme poslední cifru, vynásobíme 9 a přičteme to, co „zbylo"
- Nestačí-li jednou, použijeme víckrát – pokaždé se „zbavíme" jedné cifry.
- **Příklad:** Ověřme, že $17 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 89 = 316\,217$ je dělitelné 89:

Dělitelnost

- Vezmeme poslední cifru, vynásobíme 9 a přičteme to, co „zbylo“
- Nestačí-li jednou, použijeme víckrát – pokaždé se „zbavíme“ jedné cifry.
- **Příklad:** Ověřme, že $17 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 89 = 316\ 217$ je dělitelné 89:

$$316\ 217 \;\rightarrow\; 31\ 621 + 9 \cdot 7 = 31\ 684$$

Dělitelnost

- Vezmeme poslední cifru, vynásobíme 9 a přičteme to, co „zbylo"
- Nestačí-li jednou, použijeme víckrát – pokaždé se „zbavíme" jedné cifry.
- **Příklad:** Ověřme, že $17 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 89 = 316\ 217$ je dělitelné 89:

$$316\ 217 \;\rightarrow\; 31\ 621 + 9 \cdot 7 = 31\ 684$$

$$31\ 684 \;\rightarrow\; 3\ 168 + 9 \cdot 4 = 3\ 204$$

Dělitelnost

- Vezmeme poslední cifru, vynásobíme 9 a přičteme to, co „zbylo“
- Nestačí-li jednou, použijeme víckrát – pokaždé se „zbavíme“ jedné cifry.
- **Příklad:** Ověřme, že $17 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 89 = 316\,217$ je dělitelné 89:

$$316\,217 \;\rightarrow\; 31\,621 + 9 \cdot 7 = 31\,684$$

$$31\,684 \;\rightarrow\; 3\,168 + 9 \cdot 4 = 3\,204$$

$$3\,204 \;\rightarrow\; 320 + 9 \cdot 4 = 356 = 4 \cdot 89 \quad \checkmark$$

Dělitelnost

- Vezmeme poslední cifru, vynásobíme 9 a přičteme to, co „zbylo“
- Nestačí-li jednou, použijeme víckrát – pokaždé se „zbavíme“ jedné cifry.
- **Příklad:** Ověřme, že $17 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 89 = 316\ 217$ je dělitelné 89:

$$316\ 217 \;\to\; 31\ 621 + 9 \cdot 7 = 31\ 684$$

$$31\ 684 \;\to\; 3\ 168 + 9 \cdot 4 = 3\ 204$$

$$3\ 204 \;\to\; 320 + 9 \cdot 4 = 356 = 4 \cdot 89 \quad \checkmark$$

$$(35 + 9 \cdot 6 = 89)$$

Dělitelnost

- Podobný trik lze užít i pro 17 a 11 s jiným násobkem a_0
- Stejně tak pro 3 a 9 ($1 \cdot a_0 \;\rightarrow$ ciferný součet)

Dělitelnost

- Podobný trik lze užít i pro 17 a 11 s jiným násobkem a_0
- Stejně tak pro 3 a 9 ($1 \cdot a_0 \rightarrow$ ciferný součet)
- Obecně pro jakékoliv liché číslo, které nekončí cifrou 5

Dělitelnost

- Podobný trik lze užít i pro 17 a 11 s jiným násobkem a_0
- Stejně tak pro 3 a 9 ($1 \cdot a_0 \ \rightarrow$ ciferný součet)
- Obecně pro jakékoliv liché číslo, které nekončí cifrou 5

Zvládli byste si vymyslet kritérium dělitelnosti pro 19?

Dělitelnost

- Podobný trik lze užít i pro 17 a 11 s jiným násobkem a_0
- Stejně tak pro 3 a 9 ($1 \cdot a_0 \;\rightarrow$ ciferný součet)
- Obecně pro jakékoliv liché číslo, které nekončí cifrou 5

Zvládli byste si vymyslet kritérium dělitelnosti pro 19? A pro 2021?

Dělitelnost

- Podobný trik lze užít i pro 17 a 11 s jiným násobkem a_0
- Stejně tak pro 3 a 9 ($1 \cdot a_0 \; \rightarrow$ ciferný součet)
- Obecně pro jakékoliv liché číslo, které nekončí cifrou 5

Zvládli byste si vymyslet kritérium dělitelnosti pro 19? A pro 2021?

(Pro 2021: $1819 a_0$)

Fibbonacci útočí

- Připomeňme:

$$F_0 = 0, \ F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Fibbonacci útočí

- Připomeňme:

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- 89 je 11. Fibbonacciho číslo

Fibbonacci útočí

- Připomeňme:

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- 89 je 11. Fibbonacciho číslo
- Zlatý řez:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- n-té Fibonacciho číslo lze vyjádřit přesně jako

$$F_n = \frac{2\varphi - 1}{5}\left(\varphi^n - (1 - \varphi)^n\right)$$

Fibbonacci útočí

- Připomeňme:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- 89 je 11. Fibbonacciho číslo
- Zlatý řez:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

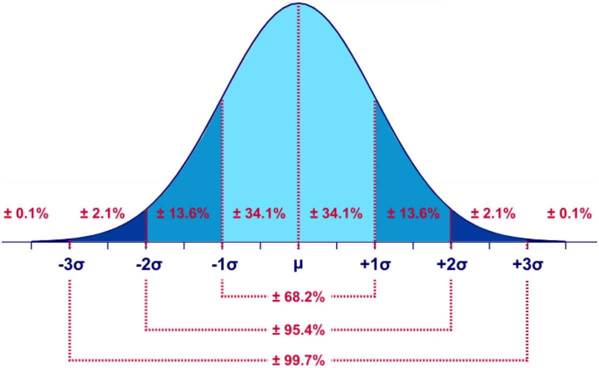
- n-té Fibonacciho číslo lze vyjádřit přesně jako

$$F_n = \frac{2\varphi - 1}{5}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right)$$

- Ve zlatém řezu je 89 po 12. a 77. cifře (12+77 = 89)

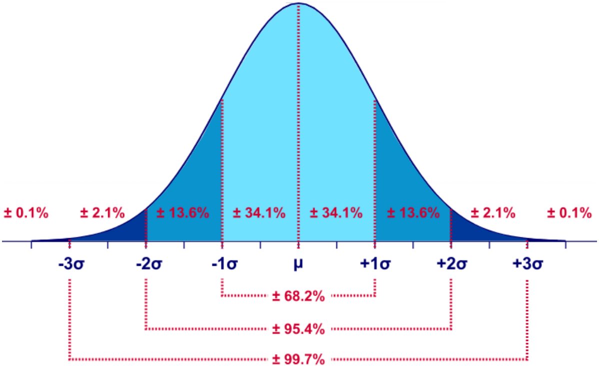
Odbočka tělem i duchem

- Normální rozdělení:



Odbočka tělem i duchem

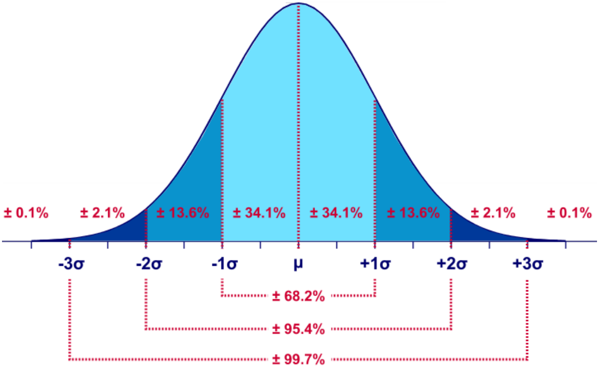
- Normální rozdělení:



- $P(\mu - \varphi\sigma < X < \mu + \varphi\sigma) \approx 89\ \%$

Odbočka tělem i duchem

- Normální rozdělení:



- $P(\mu - \varphi\sigma < X < \mu + \varphi\sigma) \approx 89$ %
- IQ: $\mu = 100, \quad \sigma = 15 \ \ldots \ \varphi\sigma \doteq 24$
- Výška mužů: $\mu = 177{,}8\ cm, \quad \sigma = 7{,}6\ cm \ \ldots \ \varphi\sigma \doteq 12{,}33\ cm$

Fibbonacci opět útočí

- $$\sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} = \frac{1}{89}$$

Fibbonacci opět útočí

- $$\sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} = \frac{1}{89}$$

$$\begin{array}{l}
.0\,\mathbf{1} \\
.0\,0\,\mathbf{1} \\
.0\,0\,0\,\mathbf{2} \\
.0\,0\,0\,0\,\mathbf{3} \\
.0\,0\,0\,0\,0\,\mathbf{5} \\
.0\,0\,0\,0\,0\,0\,\mathbf{8} \\
.0\,0\,0\,0\,0\,0\,\mathbf{1\,3} \\
.0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\mathbf{2\,1} \\
.0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\mathbf{3\,4} \\
\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
\hline
.0\,1\,1\,2\,3\,5\,9\,5\,5\,0\,5\,6\ldots = \mathbf{1/89}
\end{array}$$

Fibbonacci opět útočí

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)}
\end{aligned}
$$

Fibbonacci opět útočí

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} 10^{-(k+1)} + \sum_{k=3}^{\infty} F_{k-2} 10^{-(k+1)}
\end{aligned}
$$

Fibbonacci opět útočí

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} 10^{-(k+1)} + \sum_{k=3}^{\infty} F_{k-2} 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10} S + \frac{1}{100} S
\end{aligned}
$$

Fibbonacci opět útočí

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} 10^{-(k+1)} + \sum_{k=3}^{\infty} F_{k-2} 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10} S + \frac{1}{100} S \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S = \frac{1}{89}}
\end{aligned}
$$

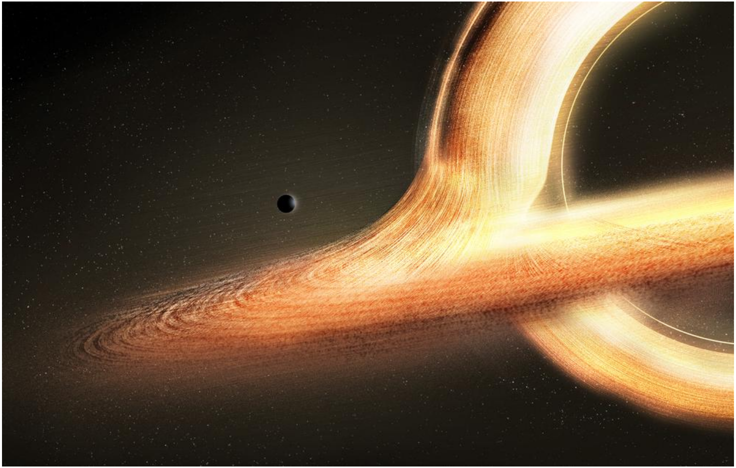
Fibbonacci opět útočí

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} 10^{-(k+1)} + \sum_{k=3}^{\infty} F_{k-2} 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{\infty} F_k 10^{-(k+1)} \\
S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{10} S + \frac{1}{100} S \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S = \frac{1}{89}}
\end{aligned}
$$

Obecně, pro $Q > \varphi$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} F_k Q^{-(k+1)}$ konverguje a její součet je $\frac{1}{Q^2 - Q - 1}$

Pro labužníky

Schwarzschildův poloměr

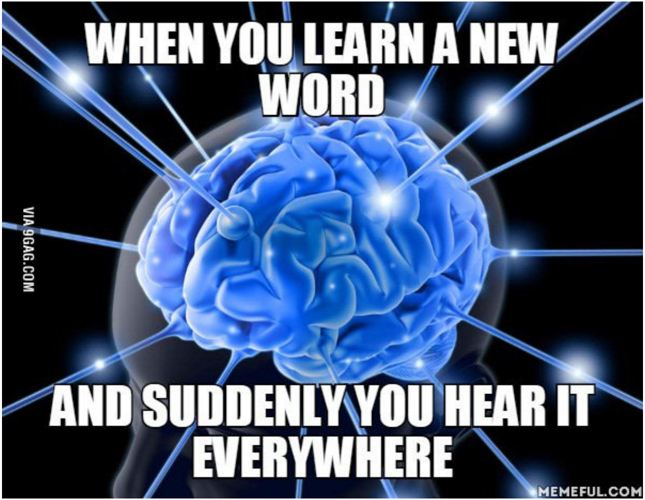


Pro labužníky

Hellinův zákon

Pro labužníky

Iluze frekvence (efekt Baader-Meinhofové)



A na závěr trocha etikety:

A na závěr trocha etikety:

Děkuji za pozornost.