

Můžeme věřit intuici?

Petr Vodstrčil

`petr.vodstrcil@vsb.cz`

VŠB	TECHNICKÁ	FAKULTA	KATEDRA
	UNIVERZITA	ELEKTROTECHNIKY	APLIKOVANÉ
	OSTRAVA	A INFORMATIKY	MATEMATIKY

Ostrava, 4.2. 2021

(ŠKOMAM 2021)

Obsah přednášky

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

4 Dvě kilometrové kolejnice

5 IQ test

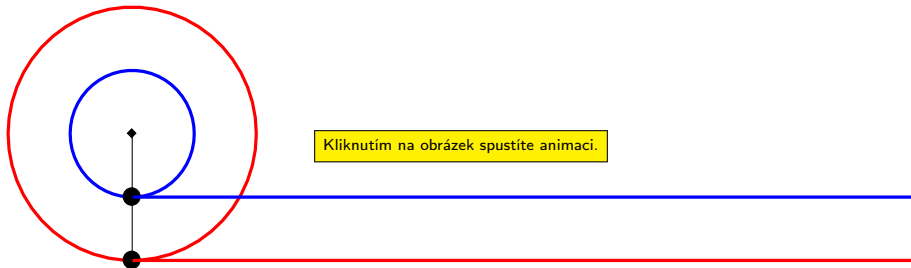
6 Meloun na sluníčku

7 Obsah útvaru

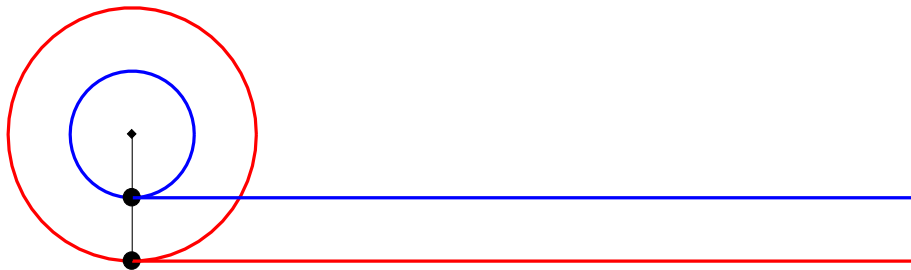
8 Hádání čísel

9 Závěr

Každé dva kruhy mají stejný obvod.

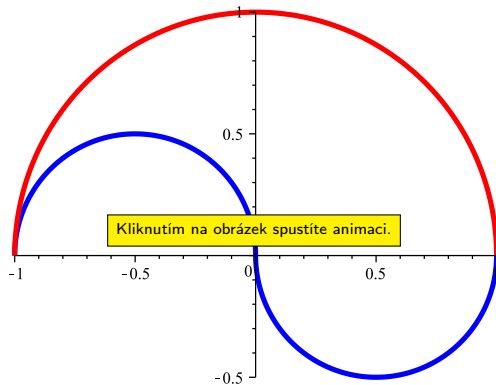


Každé dva kruhy mají stejný obvod.



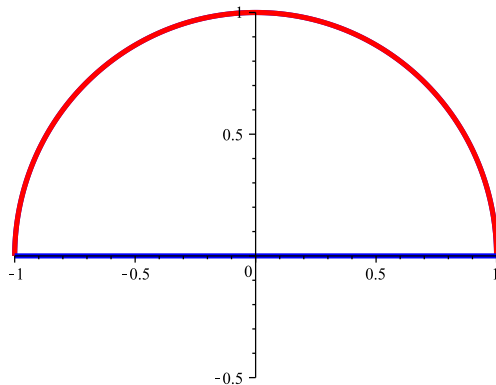
- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

$$\pi = 2$$



Délka červené i modré křivky je π .

$$\pi = 2$$



Délka červené i modré křivky je π .

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

Provaz kolem zeměkoule 1

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Provaz kolem zeměkoule 1

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 1

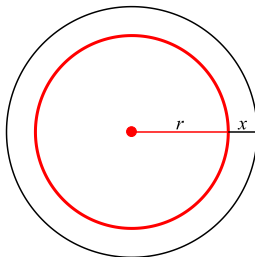
Jak velká bude mezera mezi rovníkem a provazem? Předpokládáme, že je mezera ve všech místech stejná.

Provaz kolem zeměkoule 1

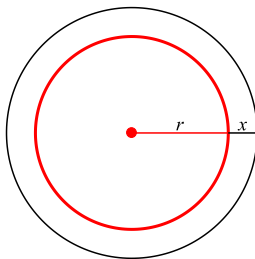
Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 1

Jak velká bude mezera mezi rovníkem a provazem? Předpokládáme, že je mezera ve všech místech stejná.



Provaz kolem zeměkoule 1

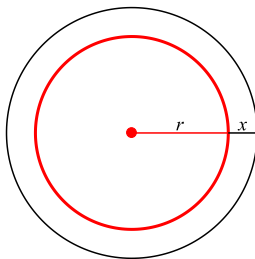


Řešení

Označíme-li x velikost mezery, pak musí platit

$$2\pi(r + x) = 2\pi r + 1,$$

Provaz kolem zeměkoule 1



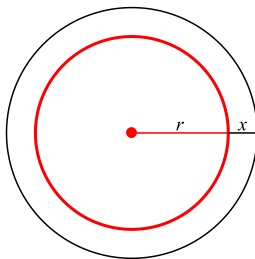
Řešení

Označíme-li x velikost mezery, pak musí platit

$$2\pi(r + x) = 2\pi r + 1,$$

odkud snadno $x = \frac{1}{2\pi} \doteq 0,159$.

Provaz kolem zeměkoule 1



Řešení

Označíme-li x velikost mezery, pak musí platit

$$2\pi(r + x) = 2\pi r + 1,$$

odkud snadno $x = \frac{1}{2\pi} \doteq 0,159$.

To znamená, že velikost hledané mezery je přibližně 16 centimetrů.

Provaz kolem zeměkoule 2

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 2

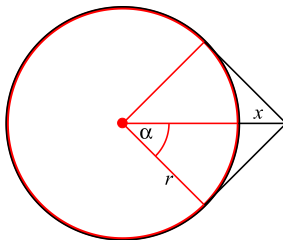
V jednom místě provaz vytáhneme, dokud se „nezarazí“ o Zemi. Do jaké výšky budeme moci provaz povytáhnout?

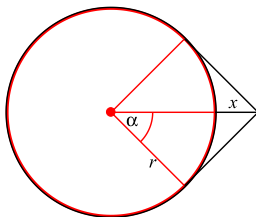
Provaz kolem zeměkoule 2

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 2

V jednom místě provaz vytáhneme, dokud se „nezarazí“ o Zemi. Do jaké výšky budeme moci provaz povytáhnout?





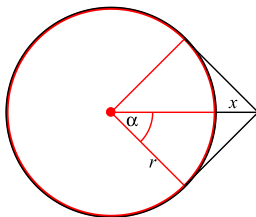
Řešení

Úloha vede na rovnici

$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Provaz kolem zeměkoule 2



Řešení

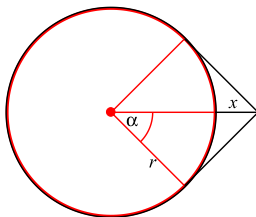
Úloha vede na rovnici

$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Hledané x pak dopočteme ze vztahu $x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

Provaz kolem zeměkoule 2



Řešení

Úloha vede na rovnici

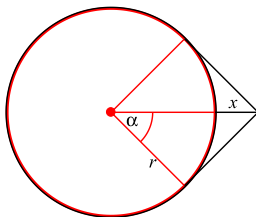
$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Hledané x pak dopočteme ze vztahu $x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

Řešíme-li úlohu numericky, obdržíme výsledek $x \doteq 121,505$

Provaz kolem zeměkoule 2



Řešení

Úloha vede na rovnici

$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Hledané x pak dopočteme ze vztahu $x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

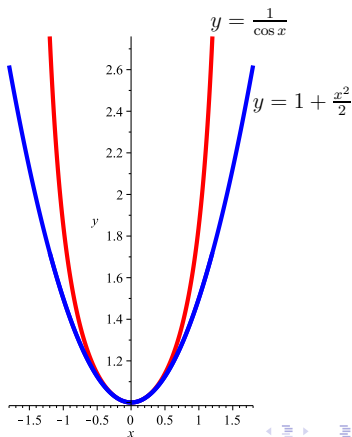
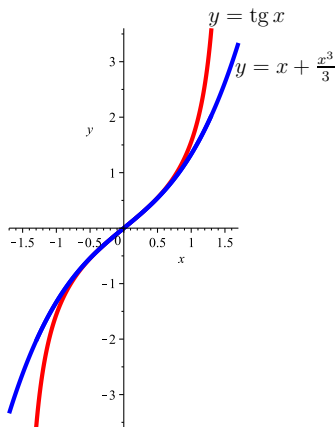
Řešíme-li úlohu numericky, obdržíme výsledek $x \doteq 121,505$ (metrů!).

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$



Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$ pak (podle $(\heartsuit)$) přejde do tvaru $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$, kterou už vyřešit umíme.

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$ pak (podle $(\heartsuit)$) přejde do tvaru $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$, kterou už vyřešit umíme.

Řešením rovnice $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$ (a tedy přibližným řešením rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$) je $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2r}}$.

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$ pak (podle $(\heartsuit)$) přejde do tvaru $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$, kterou už vyřešit umíme.

Řešením rovnice $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$ (a tedy přibližným řešením rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$) je $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2r}}$.

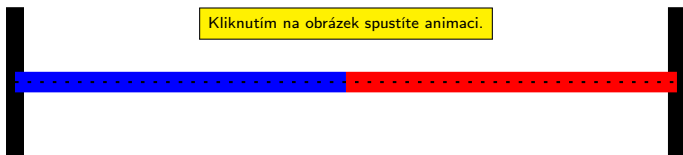
S přihlédnutím k $(\heartsuit)$ pak dostaneme

$$x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \doteq \frac{r\alpha^2}{2} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{18r} \doteq 121,504.$$

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2}$$

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2} = \sqrt{2,000001}$$

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2} = \sqrt{2,000001} \approx 1,4142$$

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2} = \sqrt{2,000001} \approx 1,4142 \text{ (metrů!)}$$

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

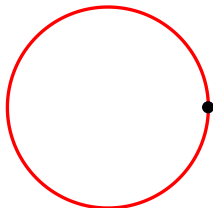
Doplňte chybějící člen posloupnosti.

1, 2, 4, 8, 16, ?

IQ test

Doplňte chybějící člen posloupnosti.

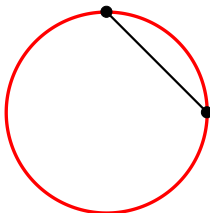
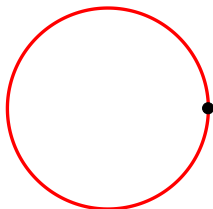
1, 2, 4, 8, 16, ?



IQ test

Doplňte chybějící člen posloupnosti.

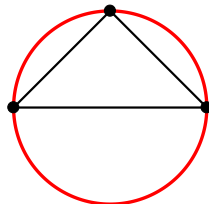
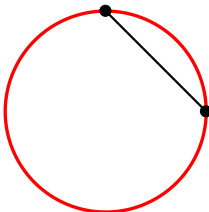
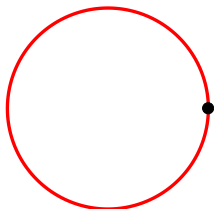
1, 2, 4, 8, 16, ?



IQ test

Doplňte chybějící člen posloupnosti.

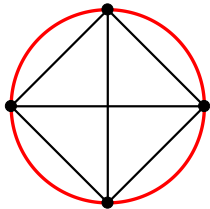
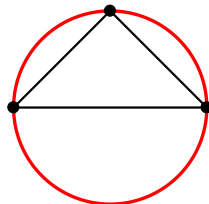
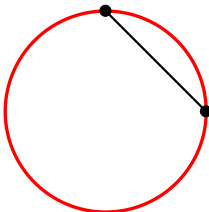
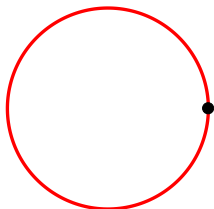
1, 2, 4, 8, 16, ?



IQ test

Doplňte chybějící člen posloupnosti.

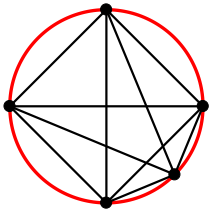
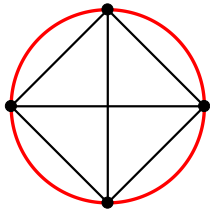
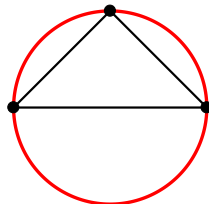
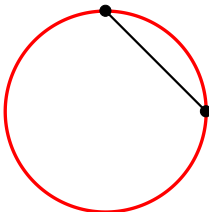
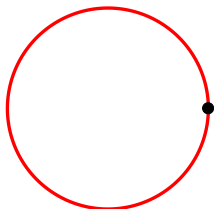
1, 2, 4, 8, 16, ?



IQ test

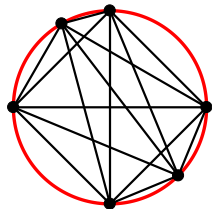
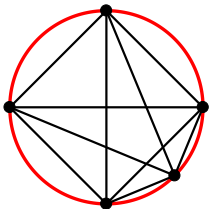
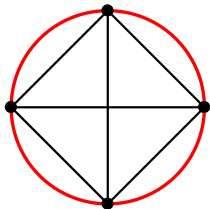
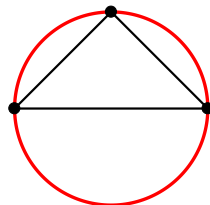
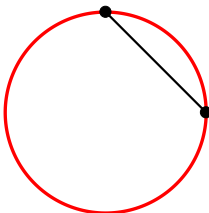
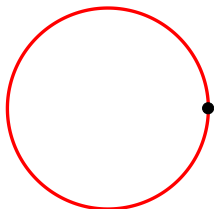
Doplňte chybějící člen posloupnosti.

1, 2, 4, 8, 16, ?



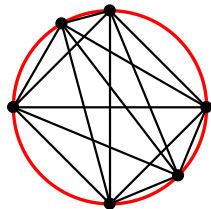
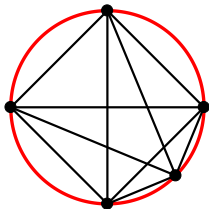
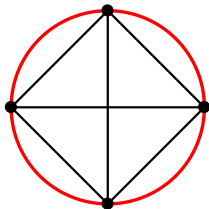
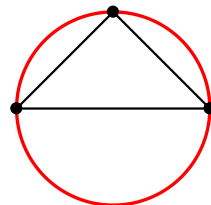
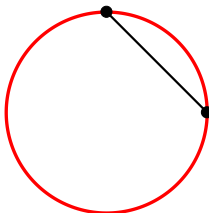
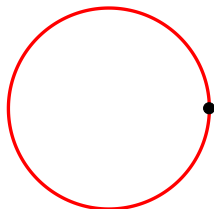
Doplňte chybějící člen posloupnosti.

1, 2, 4, 8, 16, ?



Doplňte chybějící člen posloupnosti.

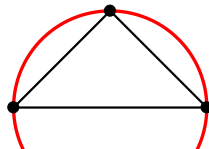
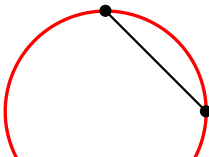
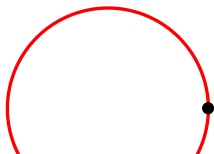
1, 2, 4, 8, 16, **31**



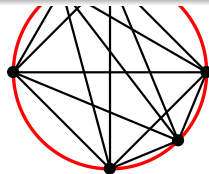
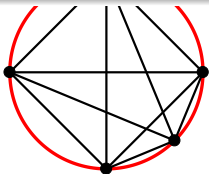
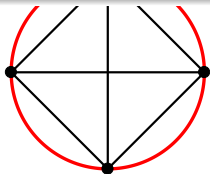
IQ test

Doplňte chybějící člen posloupnosti.

1, 2, 4, 8, 16, **31**

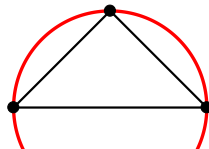
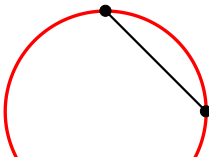
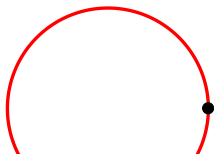


$$a_n = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1$$

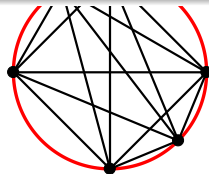
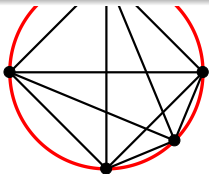
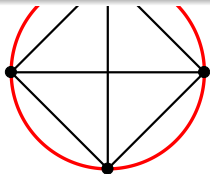


Doplňte chybějící člen posloupnosti.

1, 2, 4, 8, 16, **31**, 57, 99, 163, **256**, 386, 562, ...

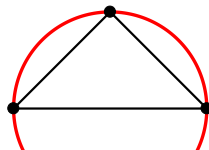
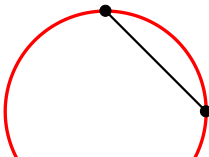
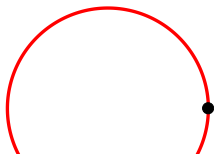


$$a_n = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1$$

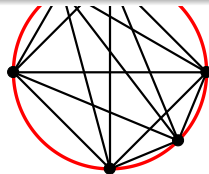
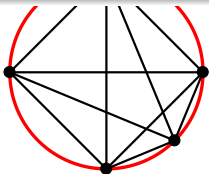
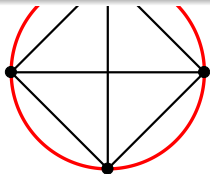


Doplňte chybějící člen posloupnosti.

1, 2, 4, 8, 16, **31**, 57, 99, 163, **256**, 386, 562, ...



$$a_n = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{3}{4}n + 1 = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$



- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku**
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

Meloun na sluníčku

Mějme meloun vážící 10 kg, který obsahuje 99% vody. Tento meloun necháme na sluníčku seschnout tak, aby obsah vody klesl na 98%.

Meloun na sluníčku

Mějme meloun vážící 10 kg, který obsahuje 99% vody. Tento meloun necháme na sluníčku seschnout tak, aby obsah vody klesl na 98%.

Otázka

Jaká bude hmotnost melounu po seschnutí?

Meloun na sluníčku

Mějme meloun vážící 10 kg, který obsahuje 99% vody. Tento meloun necháme na sluníčku seschnout tak, aby obsah vody klesl na 98%.

Otázka

Jaká bude hmotnost melounu po seschnutí?

Řešení

Meloun obsahuje 99% vody, tj. 1% sušiny. Pokud je hmotnost melounu 10 kg, je hmotnost sušiny 0,1 kg.

Meloun na sluníčku

Mějme meloun vážící 10 kg, který obsahuje 99% vody. Tento meloun necháme na sluníčku seschnout tak, aby obsah vody klesl na 98%.

Otázka

Jaká bude hmotnost melounu po seschnutí?

Řešení

Meloun obsahuje 99% vody, tj. 1% sušiny. Pokud je hmotnost melounu 10 kg, je hmotnost sušiny 0,1 kg.

Po seschnutí je však hmotnost sušiny stále stejná (0,1 kg) a odpovídá 2% hmotnosti melounu (vody je 98%).

Meloun na sluníčku

Mějme meloun vážící 10 kg, který obsahuje 99% vody. Tento meloun necháme na sluníčku seschnout tak, aby obsah vody klesl na 98%.

Otázka

Jaká bude hmotnost melounu po seschnutí?

Řešení

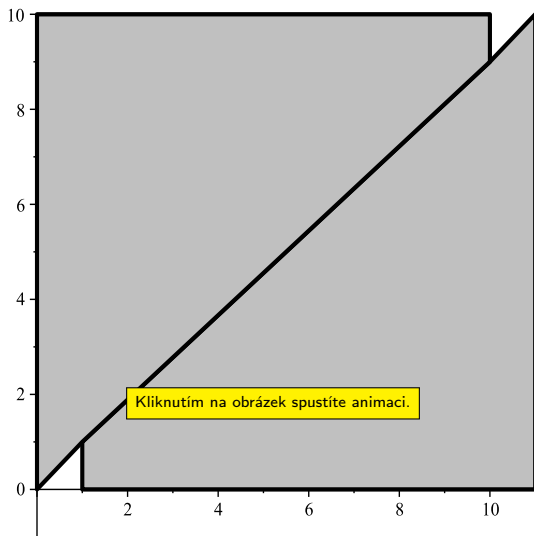
Meloun obsahuje 99% vody, tj. 1% sušiny. Pokud je hmotnost melounu 10 kg, je hmotnost sušiny 0,1 kg.

Po seschnutí je však hmotnost sušiny stále stejná (0,1 kg) a odpovídá 2% hmotnosti melounu (vody je 98%).

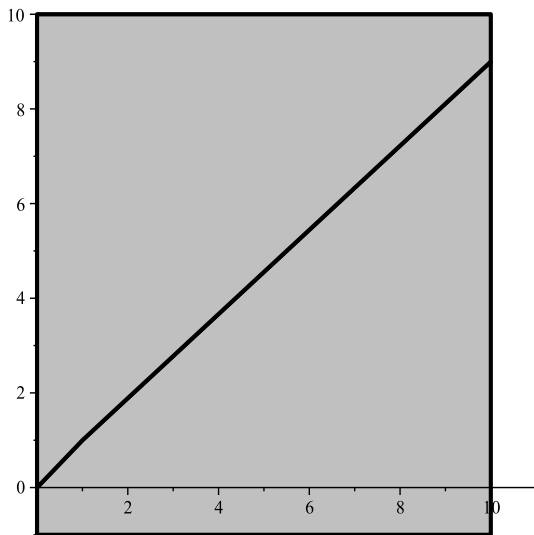
Znamená to tedy, že po seschnutí bude meloun vážit pouze 5 kg.

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru**
- 8 Hádání čísel
- 9 Závěr

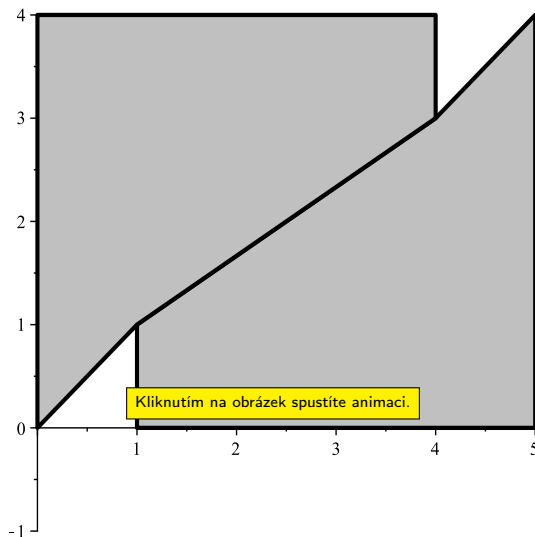
Obsah útvaru



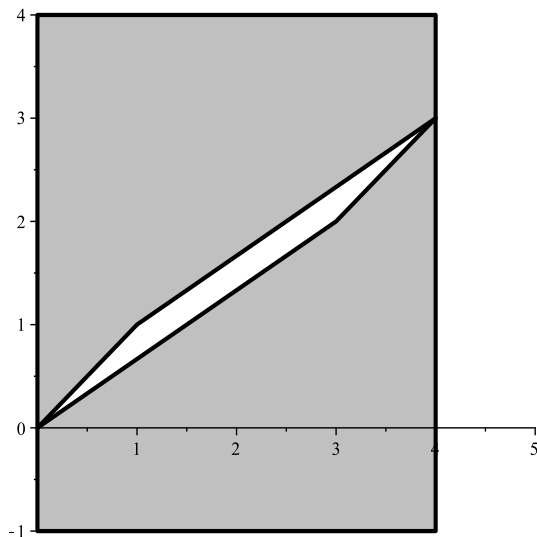
Obsah útvaru



Obsah útvaru – vysvětlení



Obsah útvaru – vysvětlení



- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel**
- 9 Závěr

Hádání čísel

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71
73	75	77	79	81	83
85	87	89	91	93	95
97	99				

2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59
62	63	66	67	70	71
74	75	78	79	82	83
86	87	90	91	94	95
98	99				

16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95

32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	96	97	98	99
100					

4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61
62	63	68	69	70	71
76	77	78	79	84	85
86	87	92	93	94	95
100					

8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61
62	63	72	73	74	75
76	77	78	79	88	89
90	91	92	93	94	95

64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93
94	95	96	97	98	99
100					

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 IQ test
- 6 Meloun na sluníčku
- 7 Obsah útvaru
- 8 Hádání čísel
- 9 **Závěr**



JIŘÍ BOUCHALA, Matematická analýza ve Vesmíru.
(<http://home1.vsb.cz/~bou10/MA1/ma1.html>)



PETR KOVÁŘ.



D. ACHESON, 1089 a vše, co s tím souvisí. Moment překvapení v matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **49** (2004), č. 1, 24–31.
(<http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141206>)



<http://cs.wikipedia.org/wiki/Malfattiho%2520kruhy?oldid=10902717>



L. PICK, Přednáška s nesmyslně dlouhým názvem.

Nevěřme vždy své intuici.

Nevěřme vždy své intuici.

Děkuji za pozornost !!!