

Derivace – jak matematicky zachytit pohyb

Petra Vondráková

Katedra aplikované matematiky
VŠB-Technická univerzita, Ostrava

4. 2. 2021

Isaac Newton

- 1643 narozen v Lincolnshire, Anglie
- studoval v Cambridge
- 1665 – 1666 základy diferenciálního a integrálního počtu
- profesor v Cambridge
- strach z kritiky

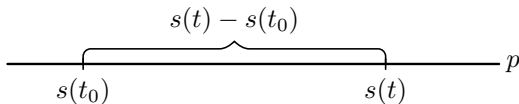


- 1646 narozen v Lipsku, Německo
- vystudoval logiku, filozofii a právo
- profesionální diplomat a právník
- v matematice byl samouk
- 1684 publikoval základy diferenciálního a integrálního počtu



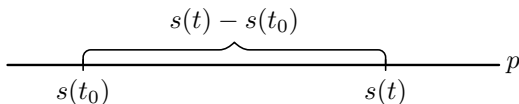
- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p .
Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p .
Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.



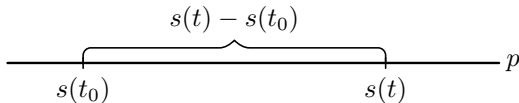
Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p .
Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.



- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p .
Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.



- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.
- **Průměrná rychlost** za dobu $t - t_0$ je dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.

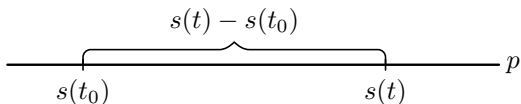
Průměrná rychlost v_t v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Průměrná rychlost v_t v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

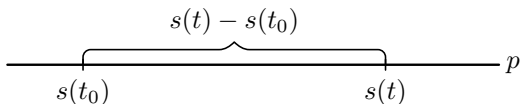
Naším úkolem je určit **okamžitou rychlost** bodu v čase t_0 .



Průměrná rychlost v_t v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Naším úkolem je určit **okamžitou rychlost** bodu v čase t_0 .



Myšlenka: Přibližujeme koncový čas t k t_0 , tj. zkracujeme časový interval $\langle t_0, t \rangle$, a zkoumejme průměrné rychlosti na těchto intervalech.

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Příklad. Máme následující naměřené hodnoty:

čas	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
dráha	9	10,02	11,16	12,45	13,96	15,8

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Příklad. Máme následující naměřené hodnoty:

čas	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
dráha	9	10,02	11,16	12,45	13,96	15,8

- Spočítáme průměrné rychlosti pro následující časové intervaly:

čas. interval	$\langle 2; 2, 5 \rangle$	$\langle 2; 2, 4 \rangle$	$\langle 2; 2, 3 \rangle$	$\langle 2; 2, 2 \rangle$	$\langle 2; 2, 1 \rangle$
pr. rychlost	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Příklad. Máme následující naměřené hodnoty:

čas	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
dráha	9	10,02	11,16	12,45	13,96	15,8

- Spočítáme průměrné rychlosti pro následující časové intervaly:

čas. interval	$\langle 2; 2, 5 \rangle$	$\langle 2; 2, 4 \rangle$	$\langle 2; 2, 3 \rangle$	$\langle 2; 2, 2 \rangle$	$\langle 2; 2, 1 \rangle$
pr. rychlost	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

- K čemu se blíží průměrné rychlosti, jestliže se koncový čas t blíží k počátečnímu času $t_0 = 2$?

Jak matematicky zapsat, že **přibližováním** okamžiku t k t_0 přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost v_0 v čase t_0 ?

Jak matematicky zapsat, že **přibližováním** okamžiku t k t_0 přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost v_0 v čase t_0 ?

Průměrná rychlost

$$v_t = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Jak matematicky zapsat, že **přibližováním** okamžiku t k t_0 přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost v_0 v čase t_0 ?

Průměrná rychlost

$$v_t = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Mechanický model

Jak matematicky zapsat, že **přibližováním** okamžiku t k t_0 přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost v_0 v čase t_0 ?

Průměrná rychlost

$$v_t = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.

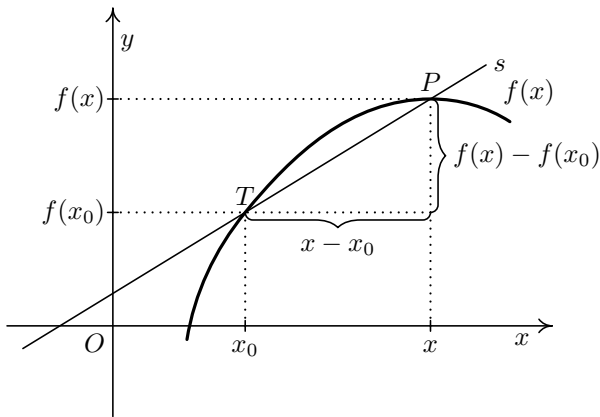
- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit **sklon přímky** procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x .

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit **sklon přímky** procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x .
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako **směrnice** přímky neboli tangens úhlu.

Geometrický model



Pro **směrnici přímky (sečny) s**, která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

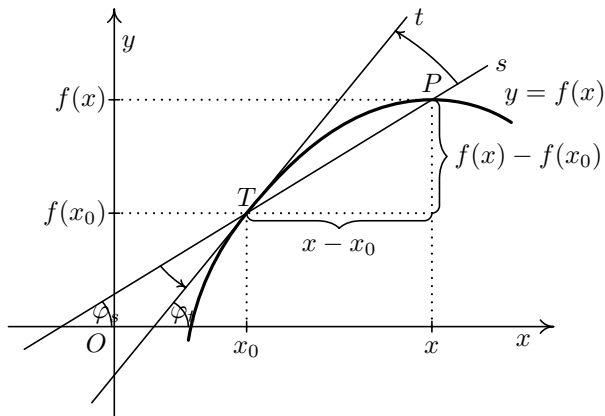
- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body T a P .

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body T a P .
- Jak určit **sklon křivky** v bodě T ?

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body T a P .
- Jak určit **sklon křivky** v bodě T ?
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body T a P .
- Jak určit **sklon křivky** v bodě T ?
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?
- Stejná myšlenka jako v případě okamžité rychlosti.

Geometrický model



Postupně přibližujeme bod P k bodu T a zkoumejme posloupnost směrnic přímek TP .

Geometrický model – numerický experiment

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ a bod $x_0 = 5$.

Geometrický model – numerický experiment

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ a bod $x_0 = 5$.

x	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
6	$\frac{6^2-5^2}{6-5} = \frac{36-25}{1} = 11$
5,5	$\frac{(5,5)^2-5^2}{5,5-5} = \frac{30,25-25}{0,5} = 10,5$
5,2	$\frac{(5,2)^2-5^2}{5,2-5} = \frac{27,04-25}{0,2} = 10,2$
5,1	$\frac{(5,1)^2-5^2}{5,1-5} = \frac{26,01-25}{0,1} = 10,1$
5,01	$\frac{(5,01)^2-5^2}{5,01-5} = \frac{25,1001-25}{0,01} = 10,01$
5,001	$\frac{(5,001)^2-5^2}{5,001-5} = \frac{25,010001-25}{0,001} = 10,001$

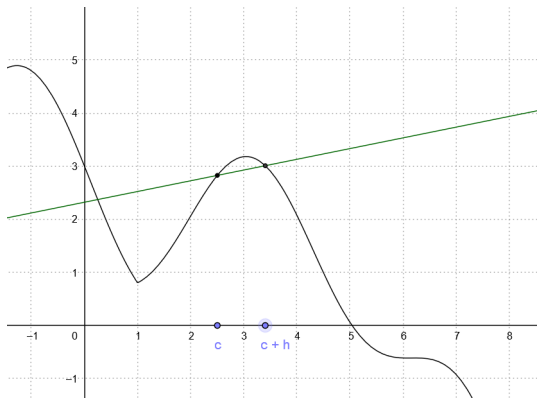
Geometrický model – numerický experiment

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ a bod $x_0 = 5$.

x	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
6	$\frac{6^2-5^2}{6-5} = \frac{36-25}{1} = 11$
5,5	$\frac{(5,5)^2-5^2}{5,5-5} = \frac{30,25-25}{0,5} = 10,5$
5,2	$\frac{(5,2)^2-5^2}{5,2-5} = \frac{27,04-25}{0,2} = 10,2$
5,1	$\frac{(5,1)^2-5^2}{5,1-5} = \frac{26,01-25}{0,1} = 10,1$
5,01	$\frac{(5,01)^2-5^2}{5,01-5} = \frac{25,1001-25}{0,01} = 10,01$
5,001	$\frac{(5,001)^2-5^2}{5,001-5} = \frac{25,010001-25}{0,001} = 10,001$

Směrnice přímk TP se přibližují k hodnotě 10.

Tedy sklon křivky x^2 v bodě $x_0 = 5$ je 10.



Geogebra Applet: Derivace v bodě

Pro **směrnici sečny** s , která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

Směrnice sečny

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Přibližujeme-li bod x k bodu x_0 , přejde úhel φ_s v úhel φ_t , a **směrnice sečny** $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$ **přejde ve směrnici tečny** $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$.

Geometrický model – shrnutí

Pro **směrnici sečny** s , která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

Směrnice sečny

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Přibližujeme-li bod x k bodu x_0 , přejde úhel φ_s v úhel φ_t , a **směrnice sečny** $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$ **přejde ve směrnici tečny** $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$.

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Co již víme?

Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Co již víme?

Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Definice derivace funkce v bodě

Vzhledem k důležitosti zmíněné limity, zavádíme následující definici.

Definice

Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme **derivací funkce f v bodě x_0** .

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.

Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Jednostranné derivace funkce v bodě

Obdobně definujeme

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Hodnoty $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ se nazývají **derivace zprava** (**derivace zleva**) **funkce f v bodě x_0** .

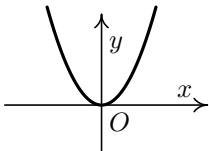
Platí, že funkce f má derivaci v bodě x_0 právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace funkce f v tomto bodě a jsou si rovny.

Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.

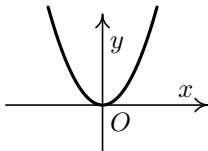
Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.



Příklad 1

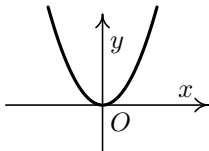
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} =$$

Příklad 1

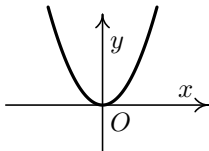
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} =$$

Příklad 1

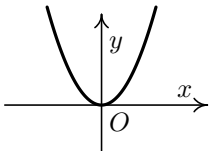
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

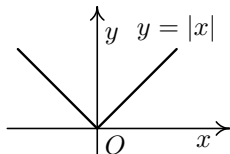
Derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Tj. tečnou je osa x .

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 2

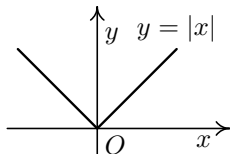
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

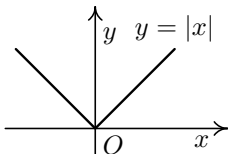


$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěte jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



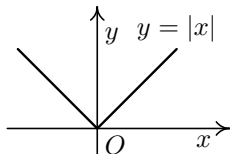
$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěte jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) =$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



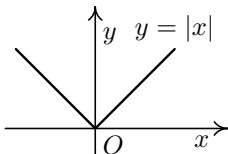
$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} =$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



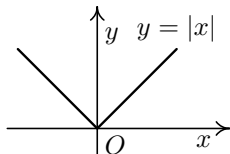
$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} =$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



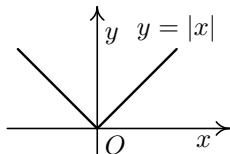
$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

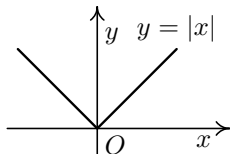
Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) =$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

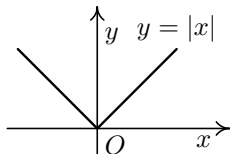
Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

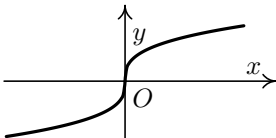
Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. V takovém bodě nelze sestavit tečnu.

Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

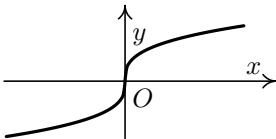
Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



Příklad 3

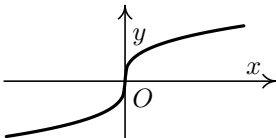
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) =$$

Příklad 3

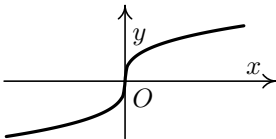
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} =$$

Příklad 3

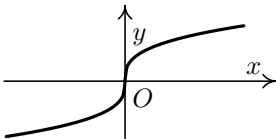
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} =$$

Příklad 3

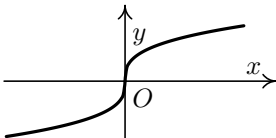
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} =$$

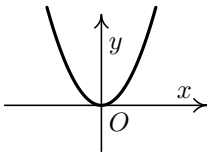
Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



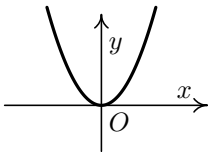
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Co již víme?

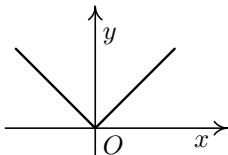


$$f'(0) = 0$$

Co již víme?

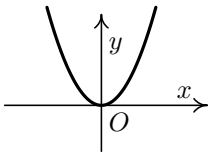


$$f'(0) = 0$$

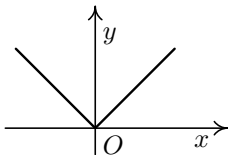


$f'(0)$ *neexistuje*

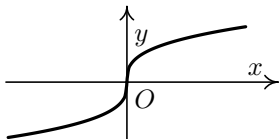
Co již víme?



$$f'(0) = 0$$

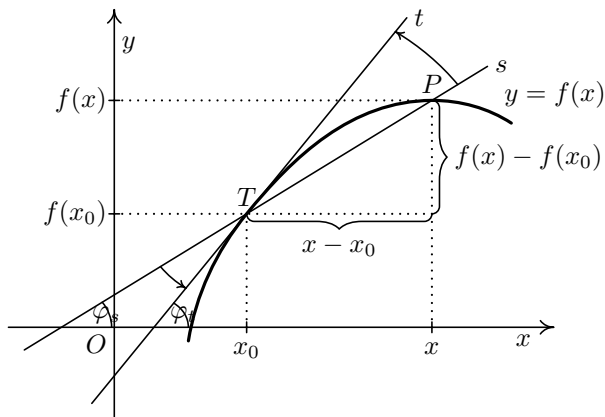


$$f'(0) \text{ neexistuje}$$



$$f'(0) = +\infty$$

Derivace funkce v bodě – jiný zápis



Označíme-li $h = x - x_0$, pak

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0 . Tato derivace je nějaké číslo.

Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0 . Tato derivace je nějaké číslo.

Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

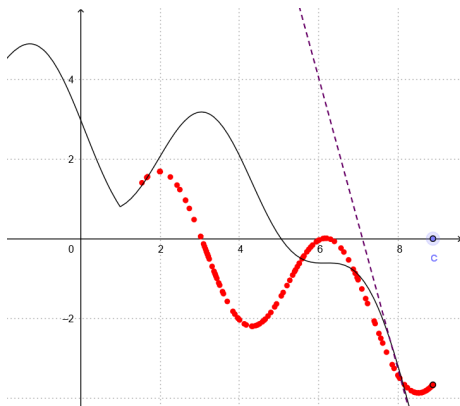
Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0 . Tato derivace je nějaké číslo.

Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

Definice

Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f': y = f'(x), x \in M$, nazýváme **derivací funkce f na M** .



Geogebra Applet: Derivace na množině - nová funkce

Derivace funkce $f(x) = x^3 - x$

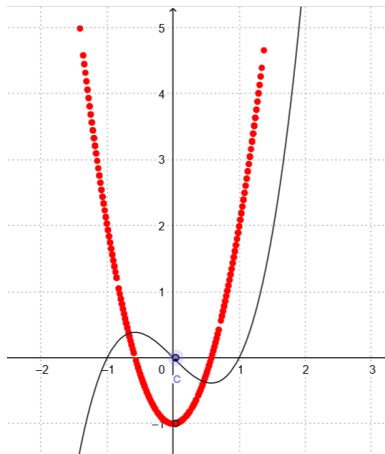
Určete derivaci funkce $f(x) = x^3 - x$.

Derivace funkce $f(x) = x^3 - x$

Určete derivaci funkce $f(x) = x^3 - x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) - (x^3 - x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh^2 + h^2 - 1) \\ &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

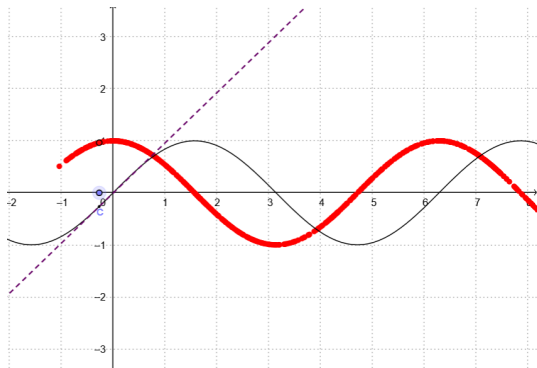
Derivace funkce $f(x) = x^3 - x$



$$f(x) = x^3 - x$$

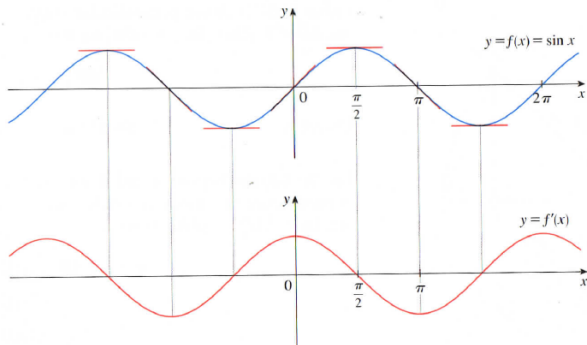
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

Derivace elementárních funkcí



Geogebra Applet: Derivace na množině - elementární funkce

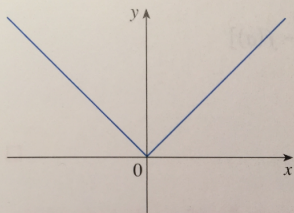
Derivace funkce $f(x) = \sin(x)$



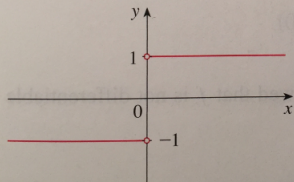
$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

Derivace funkce $f(x) = |x|$



(a) $y = f(x) = |x|$

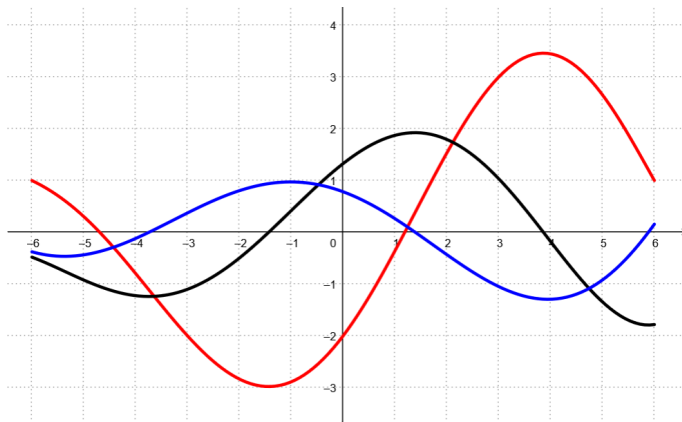


(b) $y = f'(x)$

$$f(x) = |x|$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Grafy funkcí f , f' a f''



New Graphs

The function f	RED	BLUE	BLACK
First derivative f'	RED	BLUE	BLACK
Second derivative f''	RED	BLUE	BLACK

Check Good job!

Geogebra Applet: Poznáte grafy funkce a jejích derivací?

Derivace elementárních funkcí

$$1 \quad (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (konst.)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$2 \quad (x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$3 \quad (\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$4 \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$5 \quad (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$6 \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$7 \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\},$$

$$8 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$9 \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

- 10 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$
- 11 $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$
- 12 $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$
- 13 $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R},$
- 14 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+.$

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,
- a tím pádem derivování všech elementárních funkcí.

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,
- a tím pádem derivování všech elementárních funkcí.

Byl vytvořen kalkul, který fungoval a nacházel nesmírné uplatnění v různých oborech. Lidé sice nevěděli, proč to funguje, ale věděli, co mají dělat.

K čemu využijeme derivace

Diferenciální rovnice se využívají ke zkoumání různých problémů ve fyzice, biologii nebo sociálních vědách.

Ve všech případech, které si ukážeme, vystupuje derivace, která představuje **rychlost** změny nějaké měnící se veličiny.

Ochlazování kávy

Horké těleso je v místnosti a ochlazuje se. Na teplotu místnosti toto ochlazování nemá vliv. **Rychlost** s jakou klesá teplota tělesa je úměrná rozdílu mezi teplotou tohoto tělesa a teplotou místnosti. Označíme-li teplotu tělesa T , teplotu místnosti T_0 , čas t a konstatu úměrnosti k , pak

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$



Rovnice samočištění jezer

V jezeře je kontaminace. Do jezera teče čistá voda a kontaminovaná voda vytéká. Tím se jezero čistí. Čím méně je kontaminace, tím menší je koncentrace nečistot ve vytékající vodě a tím pomaleji se nečistoty vyplavují. Matematicky můžeme předpokládat, že **rychlost**, s jakou klesá množství nečistot v jezeře, je úměrné tomuto množství.

Označíme-li množství nečistot y , čas t a konstantu úměrnosti k , pak

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$



Radioaktivní rozpad

Rychlost s jakou klesá množství nestabilního izotopu je úměrná množství tohoto izotopu. Neboli **rychlost** rozpadu radioaktivního materiálu je přímo úměrná aktuálnímu množství tohoto materiálu. Opět rovnice:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$



Krvácení při operaci

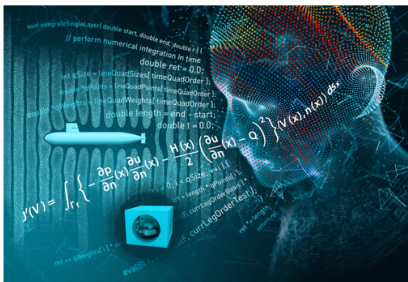
Při operaci pacient krvácí a krev je doplňována fyziologickým roztokem. Celkový objem tekutiny v krevním oběhu pacienta je konstantní, ale pacient ztrácí krvinky. Je to podobné jako samočištění jezera. Při dané intenzitě krvácení je ztráta krvinek tím menší, čím je krvinek méně. Tedy **rychlost**, s jakou klesá množství krvinek v těle pacienta je úměrná množství těchto krvinek. Je-li y množství krvinek v libovolné jednotce (počet krvinek v mililitru), platí

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$



Děkuji za pozornost a přeji krásný den

Studijní program Výpočetní a aplikovaná matematika



Katedra aplikované matematiky
www.am.vsb.cz