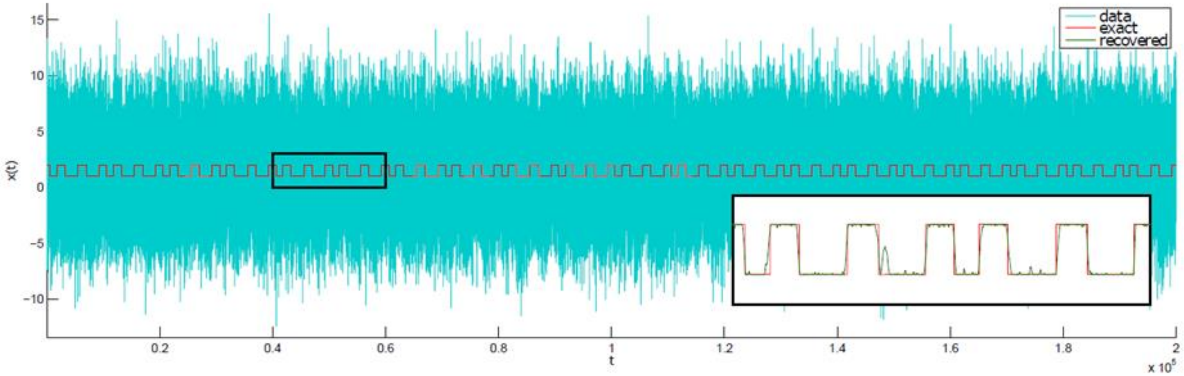
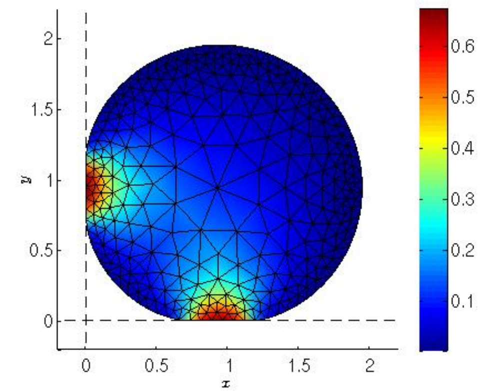
Problém optimálního portfolia

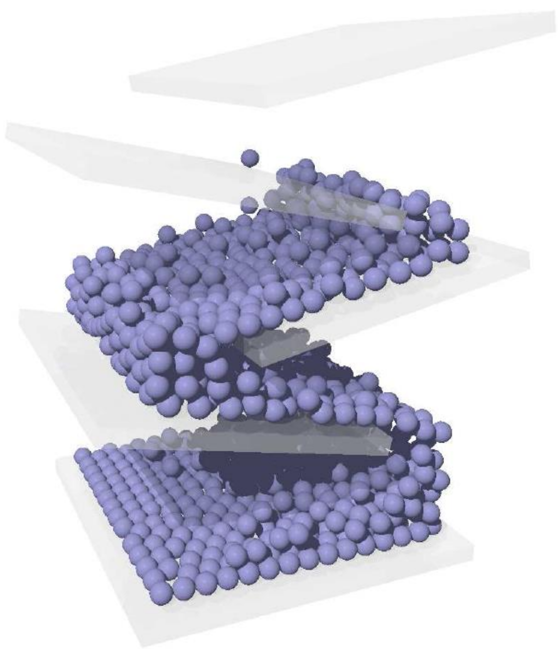
Škola matematického modelování, VŠB-TU Ostrava, 2022

Ing. Lukáš Pospíšil, Ph.D.
Katedra matematiky, FAST, VŠB-TU Ostrava





Ing. Lukáš Pospíšil, Ph.D.



Education:

2010 – 2015 **VSB – TU Ostrava, Czech Republic**
PhD degree in Applied Mathematics
Development of Algorithms for Solving Minimizing Problems with Convex Quadratic Function on Special Convex Sets and Applications

Employment history:

2015 - 2019 **Universita della Svizzera italiana**, Lugano, SWI
Postdoctoral researcher

2013 - 2015 **IT4Innovations National Supercomputing Centre**, Ostrava
HPC Libraries and Supercomputing for Industry
researcher assistant

Main research interests:

- development, analysis, and HPC implementation of optimal QP algorithms
- nonstationary modeling in time-series data analysis
- large-scale linear elasticity contact problems with FETI decomposition methods
- multi-body dynamics simulations on GPU

Obsah přednášky

- co mně baví a co ne

- trocha terminologie (protože aplikace)
- formulace optimalizačního problému (dva optimalizační problémy)
- řešení (?)
- cross-validation

- závěr

1. Úvod

Co mně baví

Matematická analýza

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

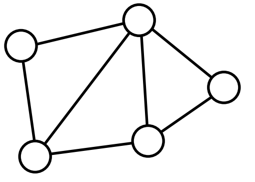
Diskrétní matematika

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$

Lineární algebra

$$Ax = b$$

Teorie grafů



Diferenciální rovnice

$$y'(t) + k \cdot y(t) = k \cdot T, \; y(0) = T_0$$

Metody optimalizací

$$x^* = \arg\min_{x \in \Omega} f(x)$$

Numerické metody

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Pravděpodobnost a statistika

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Co mně baví

Matematická analýza

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

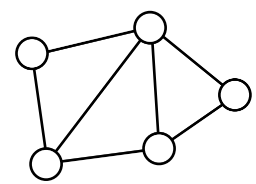
Diskrétní matematika

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$

Lineární algebra

$$Ax = b$$

Teorie grafů



Diferenciální rovnice

$$y'(t) + k \cdot y(t) = k \cdot T, \;\; y(0) = T_0$$

Metody optimalizací

$$x^* = \arg\min_{x \in \Omega} f(x)$$

Numerické metody

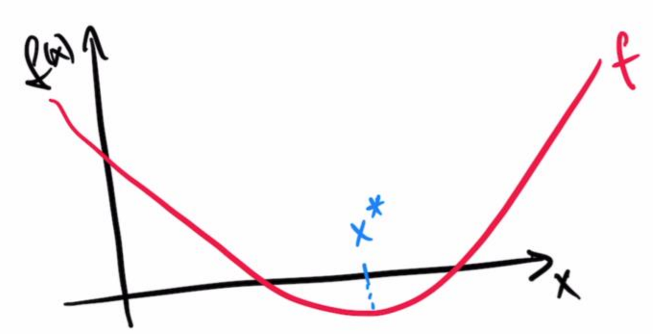
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Pravděpodobnost a statistika

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Kvadratické programování: 1D

$$x^* = \arg\min f(x)$$



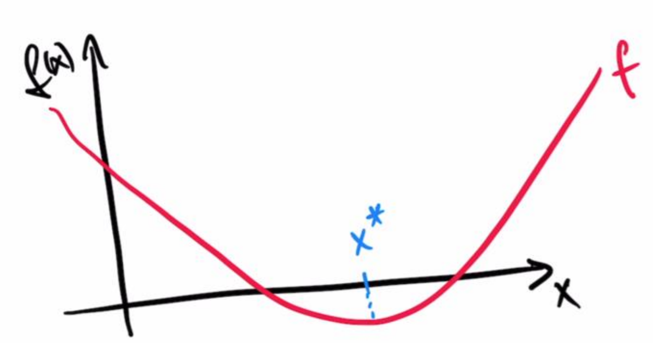
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = -\frac{b}{2a}$$

$$f''(x) = 2a > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ is strictly convex}$$

Kvadratické programování: 1D

$$x^* = \arg\min f(x)$$



$$f(x) = \cancel{ax^2 + bx + c,} \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\frac{1}{2}ax^2 - bx$$

$$f'(x) = \cancel{2ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = -\frac{b}{2a}}$$

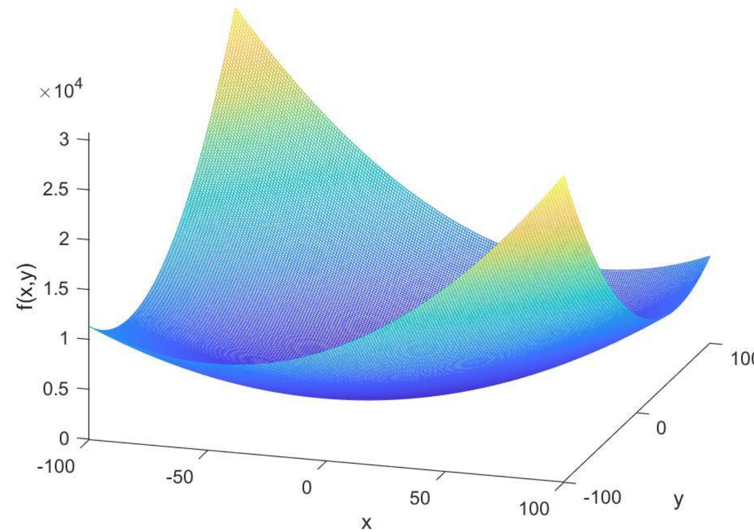
$$ax - b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{b}{a}$$

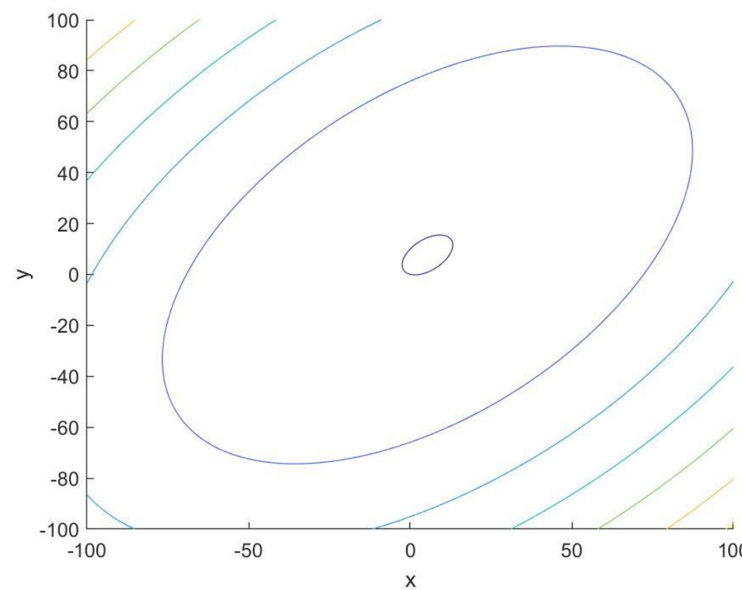
$$f''(x) = \cancel{2a} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ is strictly convex}$$

$$a$$

Kvadratické programování: 2D

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f, \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$





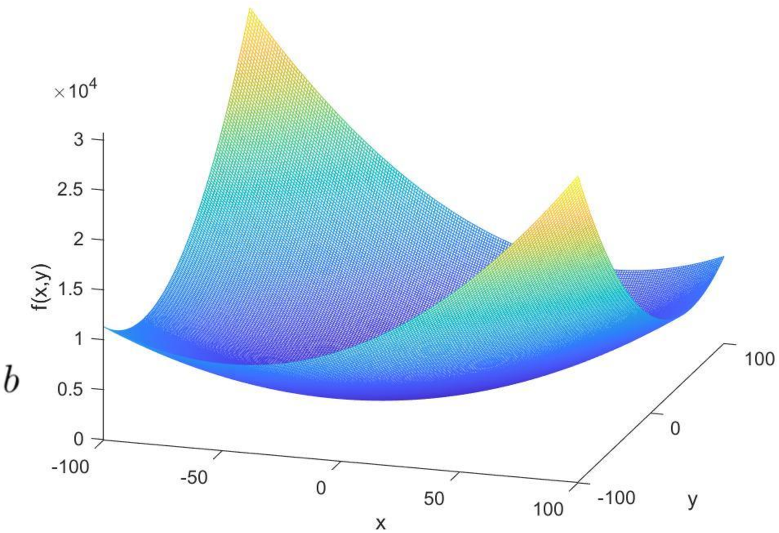
Kvadratické programování: 2D

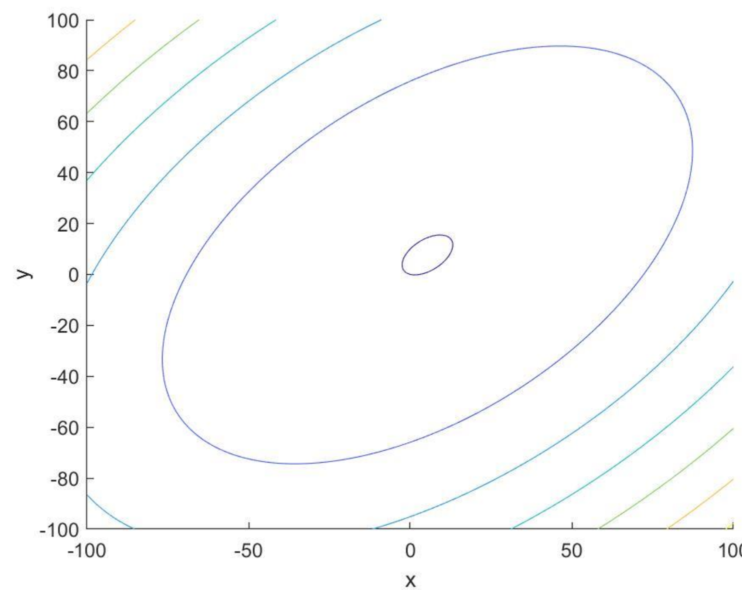
$$f(x,y) = \cancel{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2}\,[x,y]\,A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - b^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - b = 0 \quad \Rightarrow \quad A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$$

$$\nabla^2 f(x,y) = A \succ 0$$





Kvadratické programování: nD

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x) = Ax - b = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

$$\nabla^2 f(x) = A \succ 0$$

Kvadratické programování: nD

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x) = Ax - b = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

$$\nabla^2 f(x) = A \succ 0$$

$$u^* = \arg\min f(u)$$

$$f(u) = \frac{1}{2}u^T K u - f^T u$$

$$\nabla f(u) = Ku - f = 0 \quad \Rightarrow \quad Ku = f$$

$$\nabla^2 f(u) = K \succ 0$$

Kvadratické programování: nD

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x) = Ax - b = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = b$$

$$\nabla^2 f(x) = A \succ 0$$

(kontaktní úloha)

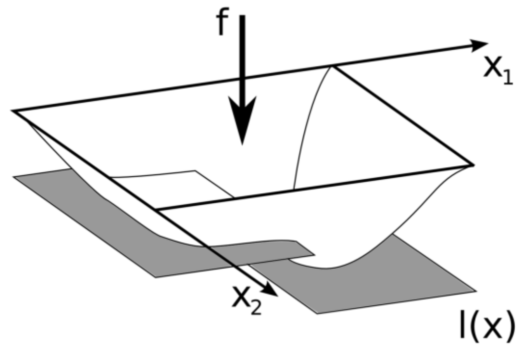
$$u^* = \arg\min_{u \geq l} f(u)$$

$$f(u) = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u$$

$$\nabla f(u) = K u - f \cancel{= 0 \quad \Rightarrow \quad K u = f}$$

$$\nabla^2 f(u) = K \succ 0$$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x) & \text{for } x \in \Omega_P, \\ u(x) & = & 0 & \text{for } x \in \Gamma_N, \\ u(x) & \geq & l(x) & \text{for } x \in \Omega_P. \end{array} \right.$$



Karush-Kuhn-Tucker conditions (KKT)

Let us consider the QP problem (1), where the feasible set is convex, described by equality and inequality constraints

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rcl} h_{Ei}(x) & = & 0 \qquad i = 1, \dots, m_E \\ h_{Ij}(x) & \leq & 0 \qquad j = 1, \dots, m_I \end{array} \right\} \neq \emptyset,$$

where

- $h_{Ei} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *are linear functions describing equality constraints,*
- $h_{Ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *are convex functions describing inequality constraints.*

Suppose $\bar{x}$ *solves this problem. Then there are vectors* $\lambda_E \in \mathbb{R}^{m_E}$ *and* $\lambda_I \in \mathbb{R}^{m_I}, \lambda_I \geq 0$ *such that* $\bar{x}$ *solves the Lagrangian problem*

$$\bar{x} := \arg\min_x L(x, \lambda_E, \lambda_I) \ ,$$

where $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_E} \times \mathbb{R}^{m_I} \to \mathbb{R}$ *is* Lagrange function *defined by*

$$L(x, \lambda_E, \lambda_I) := f(x) + \sum_{i=1}^{m_E} \lambda_{Ei} h_{Ei}(x) + \sum_{j=1}^{m_I} \lambda_{Ij} h_{Ij}(x) \ .$$

The appropriate optimality conditions of this problem, so-called Karush-Kuhn-Tucker *conditions (KKT), are given by*

$$\begin{array}{rcll}
\nabla_x L(x, \lambda_E, \lambda_I) & = & \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m_E} \lambda_{Ei} \nabla h_{Ei}(x) + \sum_{j=1}^{m_I} \lambda_{Ij} \nabla h_{Ij}(x) & = \ 0 \\
\nabla_{\lambda_E} L(x, \lambda_E, \lambda_I) & = & [h_{E1}(x), \dots, h_{Em_E}(x)]^T & = \ 0 \\
\nabla_{\lambda_I} L(x, \lambda_E, \lambda_I) & = & [h_{I1}(x), \dots, h_{Im_I}(x)]^T & \leq \ 0 \\
 & & \lambda_I & \geq \ 0 \\
 & & \lambda_{Ij} h_{Ij} & = \ 0, \quad j = 1, \dots, m_I
\end{array}$$

Co mně nebavilo

Matematická analýza

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

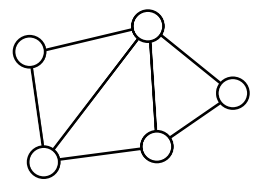
Diskrétní matematika

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$

Lineární algebra

$$Ax = b$$

Teorie grafů



Diferenciální rovnice

$$y'(t) + k \cdot y(t) = k \cdot T, \;\; y(0) = T_0$$

Metody optimalizací

$$x^* = \arg\min_{x \in \Omega} f(x)$$

Numerické metody

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Pravděpodobnost a statistika

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

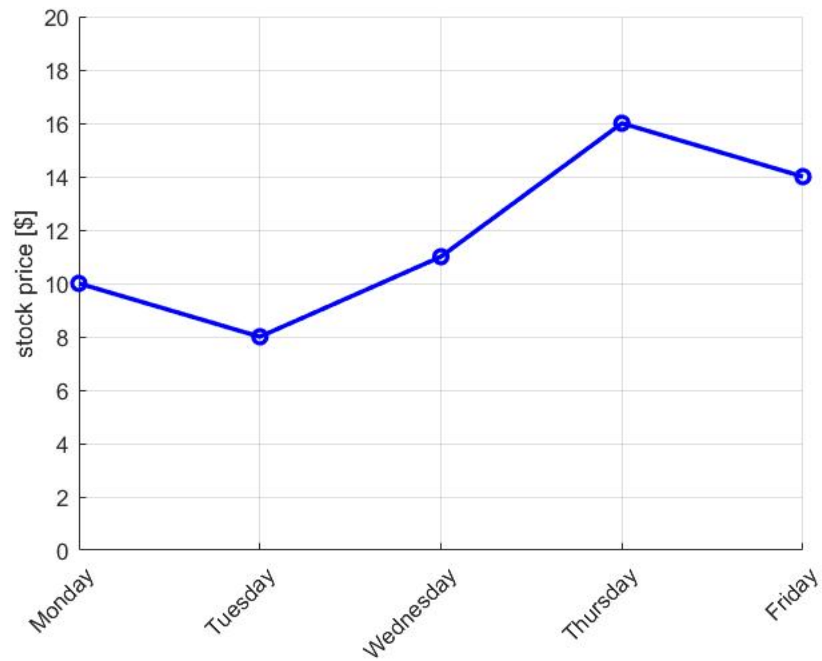
2. Problém optimálního portfolia

Obchodování na burze

Portfolio = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = x(t) \cdot \underbrace{\text{stock price}(t)}_{\text{tržní cena (víme nebo odhadneme)}}$$

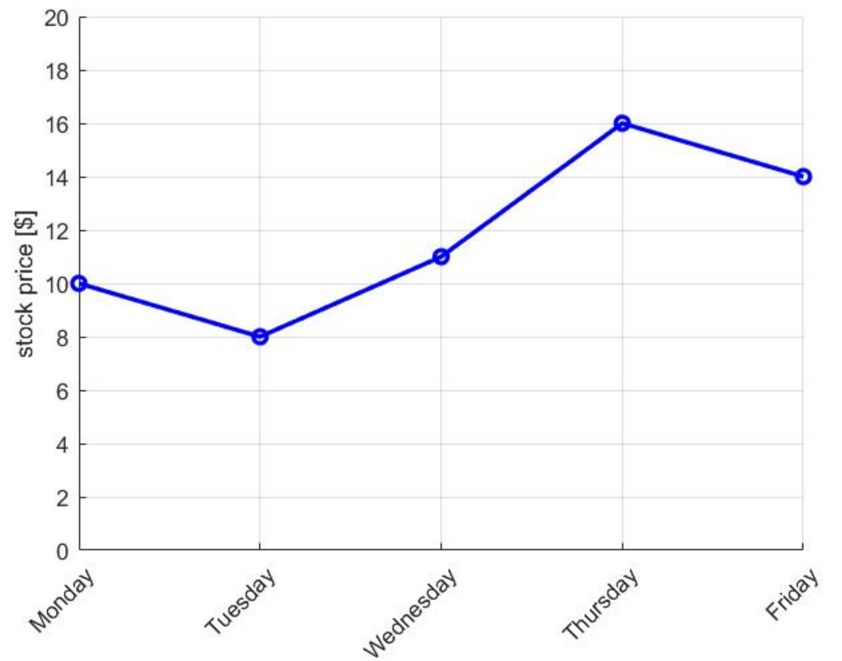
počet vlastněných akcií
(bude neznámá)



Obchodování na burze

<u>Portfolio</u> = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = x(t) \cdot \text{stock price}(t)$$



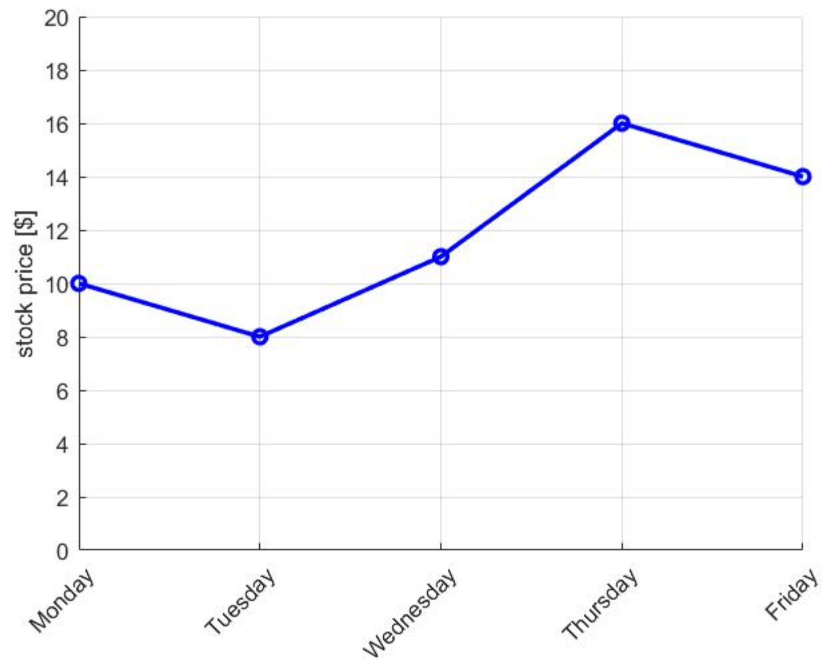
<u>Příklad</u>

- máme 1000 Kč

Obchodování na burze

Portfolio = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = x(t) \cdot \text{stock price}(t)$$



Příklad

- máme 1000 Kč
- všechno investujeme v pondělí

$$1000 = \text{portfolio(monday)} = 100 \cdot \text{stock price(monday)}$$

Obchodování na burze

Portfolio = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = x(t) \cdot \text{stock price}(t)$$

Příklad

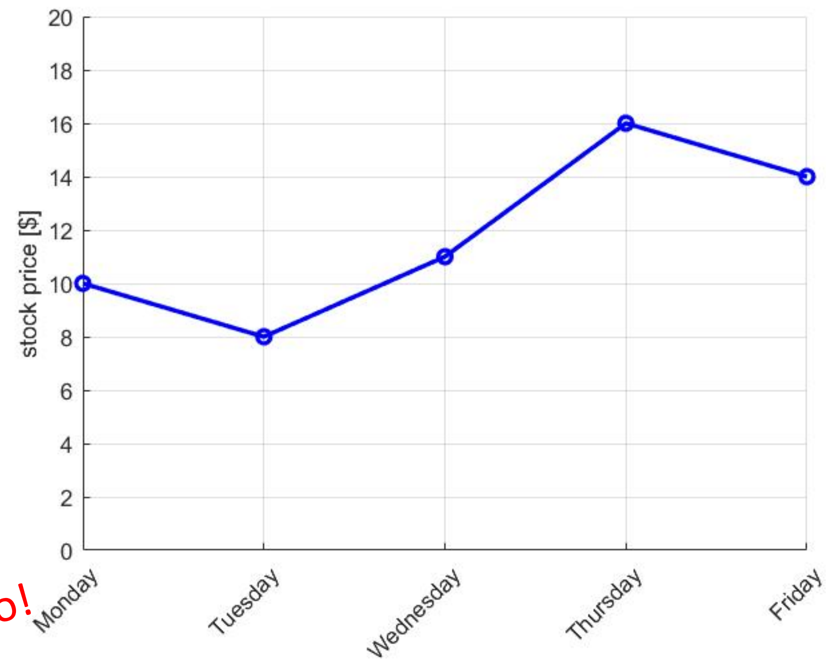
- máme 1000 Kč
- všechno investujeme v pondělí

$$1000 = \text{portfolio(monday)} = 100 \cdot \text{stock price(monday)}$$

- v pátek je situace jiná

$$1400 = \text{portfolio(friday)} = 100 \cdot \text{stock price(friday)}$$

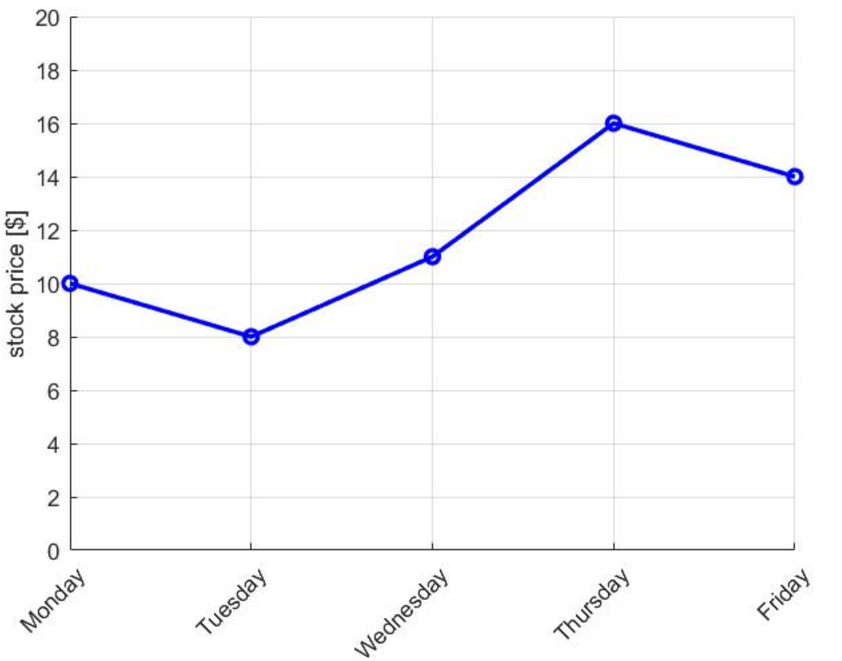
prodej to, prodej to!



Obchodování na burze

<u>Portfolio</u> = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = x(t) \cdot \text{stock price}(t)$$



<u>Příklad</u>

- máme 1000 Kč
- všechno investujeme v pondělí

$$1000 = \text{portfolio(monday)} = 100 \cdot \text{stock price(monday)}$$

- v pátek je situace jiná

$$1400 = \text{portfolio(friday)} = 100 \cdot \text{stock price(friday)}$$

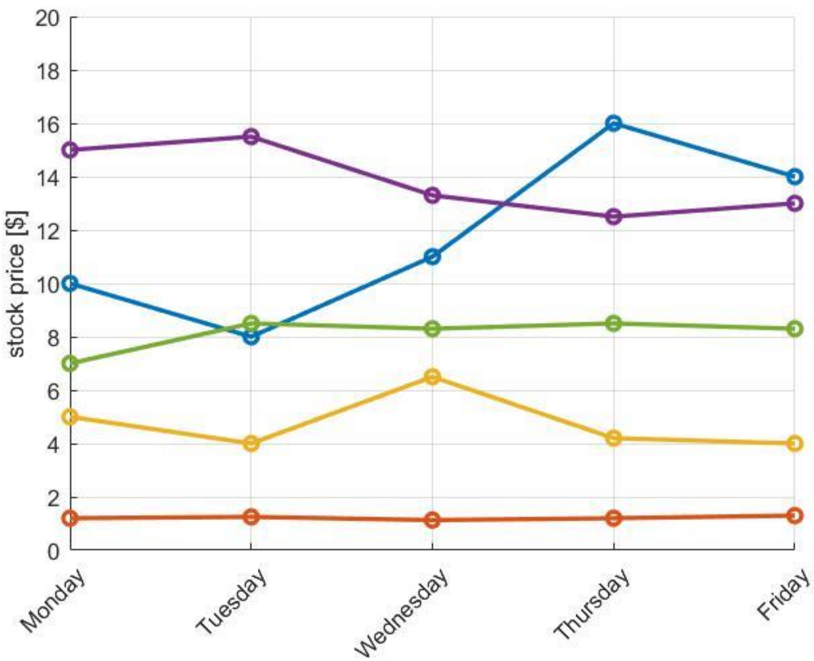
- máme tu nějaký zisk (výnos z investice)

$$\text{total profit} = \text{portfolio(friday)} - \text{portfolio(monday)} = 400$$

Obchodování na burze

<u>Portfolio</u> = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

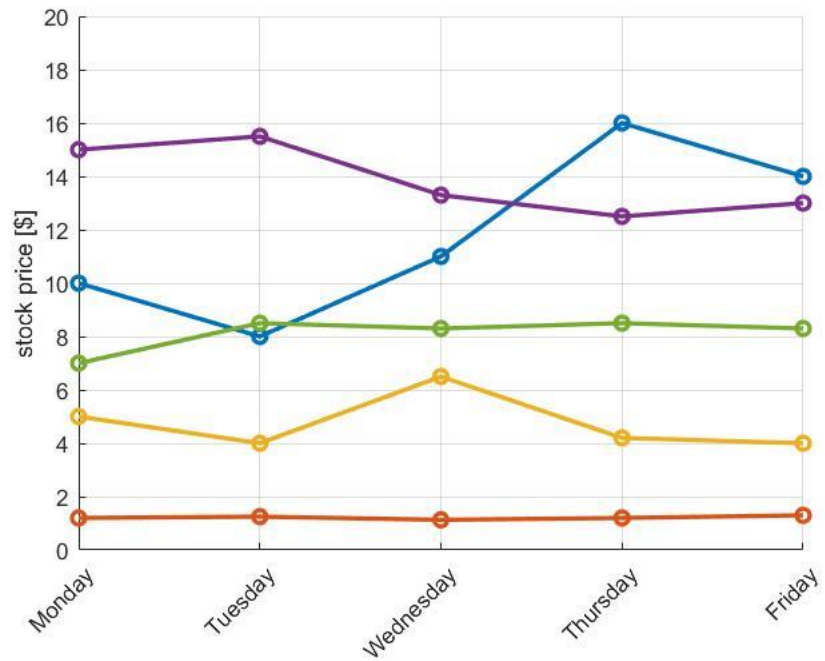
$$\mathrm{porfolio}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \mathrm{stock\ price}_i(t)$$



Obchodování na burze

Portfolio = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\mathrm{porfolio}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \text{stock price}_i(t)$$



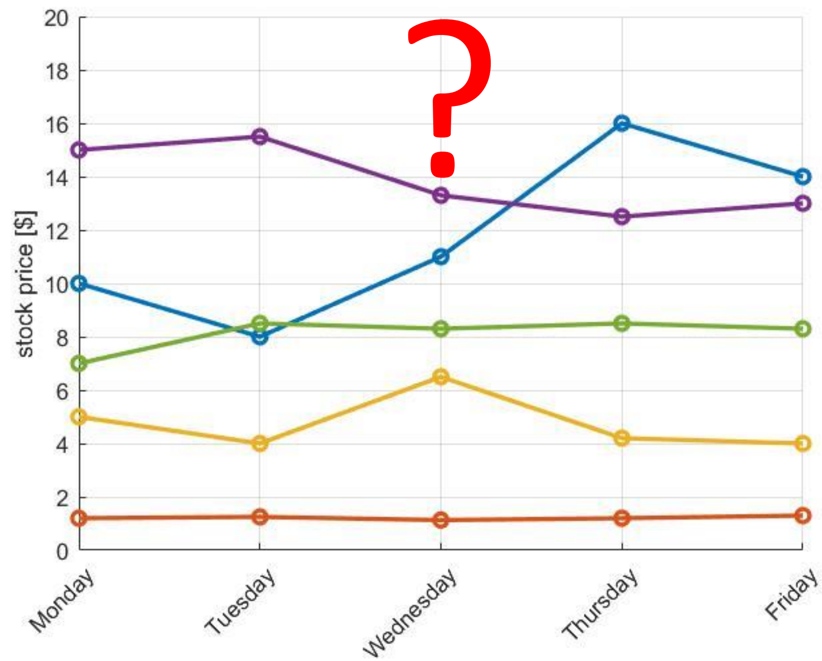
Problém: jak rozdělit investice do akcií?

abychom maximalizovali zisk

Obchodování na burze

<u>Portfolio</u> = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \text{stock price}_i(t)$$



<u>Problém:</u> jak rozdělit investice do akcií?

abychom maximalizovali zisk

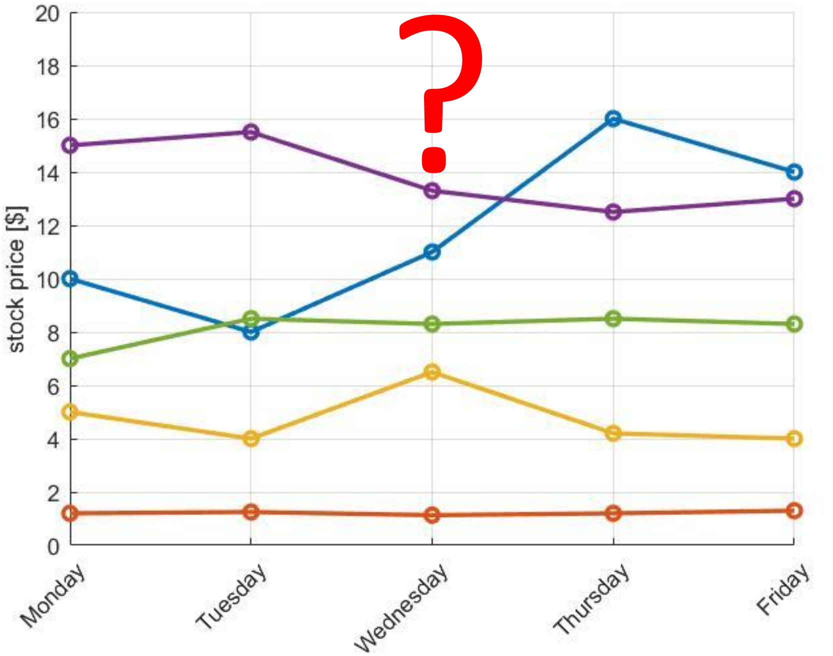
<u>Problém 2:</u> jak uhodnout tržní cenu?

zdroj: ezo.tv

Obchodování na burze

<u>Portfolio</u> = určitá sestava, soubor akcií a jiných cenných papírů v majetku jednoho investora.

$$\text{porfolio}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \text{stock price}_i(t)$$



<u>Problém:</u> jak rozdělit investice do akcií?

abychom maximalizovali zisk

<u>Problém 2:</u> jak ~~uhodnout~~ tržní cenu?

predikovat z historických dat

abychom minimalizovali riziko

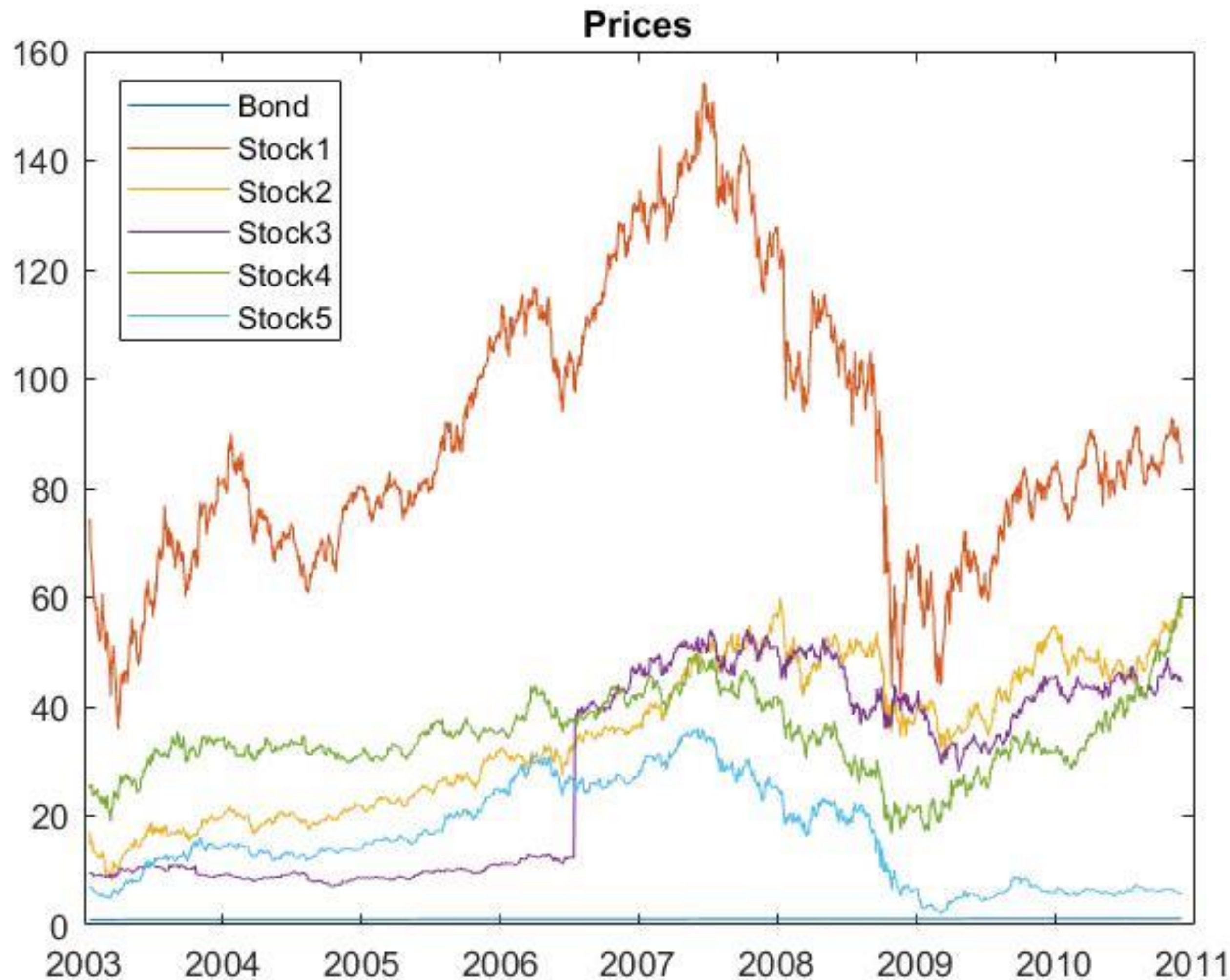
Obchodování na burze: stochastická úloha

$$\text{porfolio}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot \text{stock price}_i(t)$$

neznámá investice
(investujeme pouze jednou = stacionární)

stochastický proces
(časová řada)

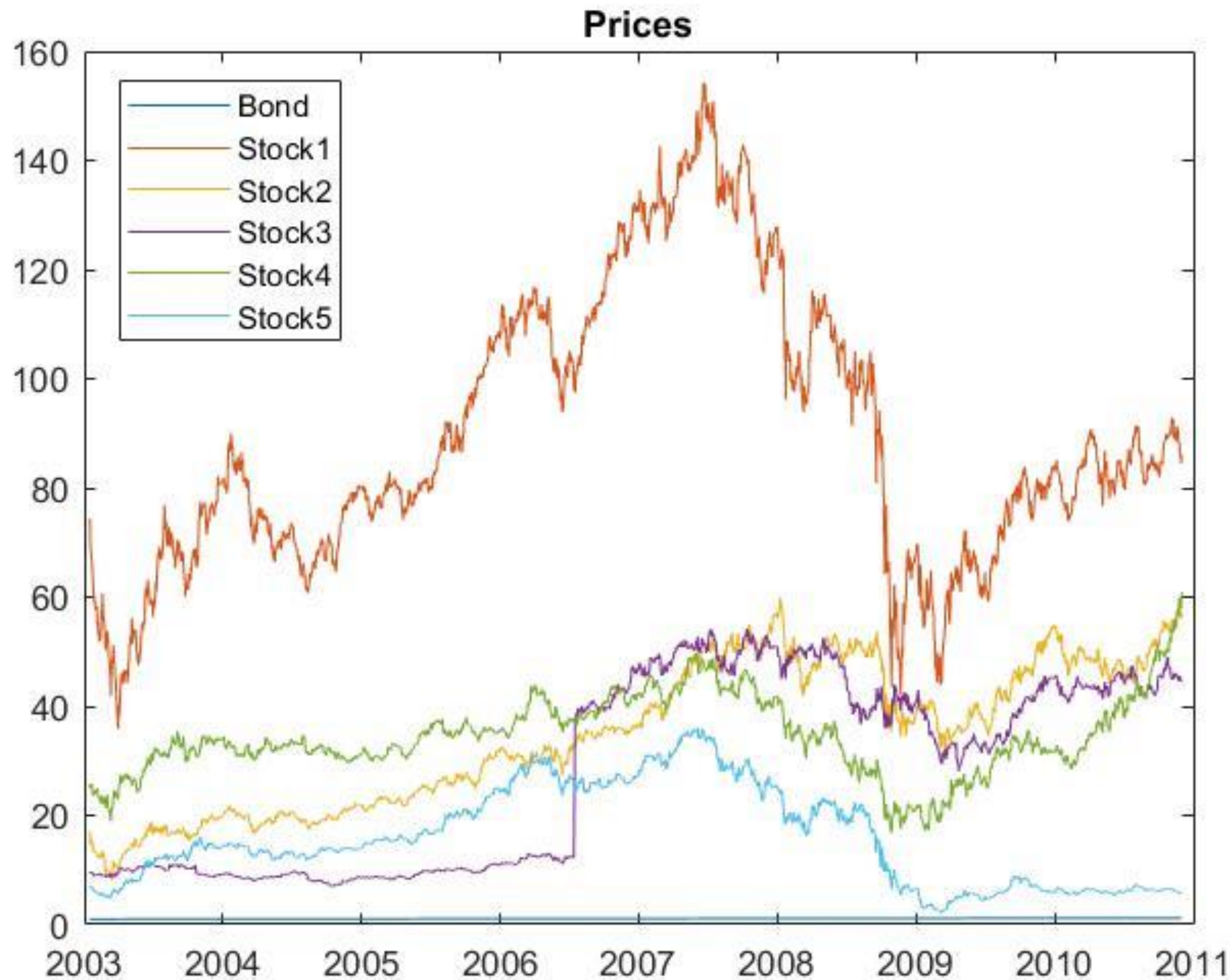
Obchodování na burze: stochastická úloha



$$T = 2050$$

Obchodování na burze: stochastická úloha

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(\text{Bond}) &= 0.0028 \\
\mathbb{D}(\text{Stock}_1) &= 626.8499 \\
\mathbb{D}(\text{Stock}_2) &= 172.9998 \\
\mathbb{D}(\text{Stock}_3) &= 300.7432 \\
\mathbb{D}(\text{Stock}_4) &= 51.7496 \\
\mathbb{D}(\text{Stock}_5) &= 79.8468
\end{aligned}$$



Dluhopis (bond) je dluhová investice, ve které investor půjčuje peníze subjektu (typicky korporátnímu nebo vládnímu), který si půjčuje finanční prostředky na definovanou dobu za variabilní nebo pevnou úrokovou sazbu.

Obchodování na burze: stochastická úloha

Zisk je objem získaných finančních prostředků, tj. rozdíl mezi vydělanou částkou a částkou vynaloženou na nákup, provoz nebo výrobu něčeho.

$$\text{profit}_i(t+1) = \text{stock price}_i(t+1) - \text{stock price}_i(t)$$ (za jednu akcii)

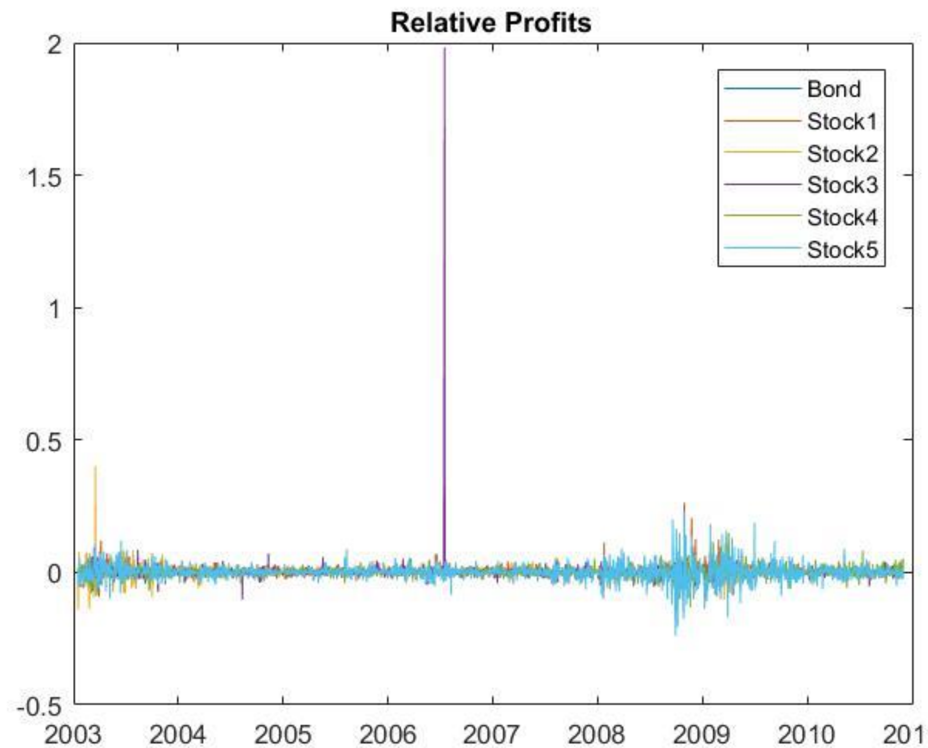
$$\text{relative profit}_i(t+1) = \frac{\text{stock price}_i(t+1) - \text{stock price}_i(t)}{\text{stock price}_i(t)}$$ „návratnost“

Obchodování na burze: stochastická úloha

Zisk je objem získaných finančních prostředků, tj. rozdíl mezi vydělanou částkou a částkou vynaloženou na nákup, provoz nebo výrobu něčeho.

$$\mathrm{profit}_i(t+1) = \mathrm{stock\ price}_i(t+1) - \mathrm{stock\ price}_i(t)$$ (za jednu akcii)

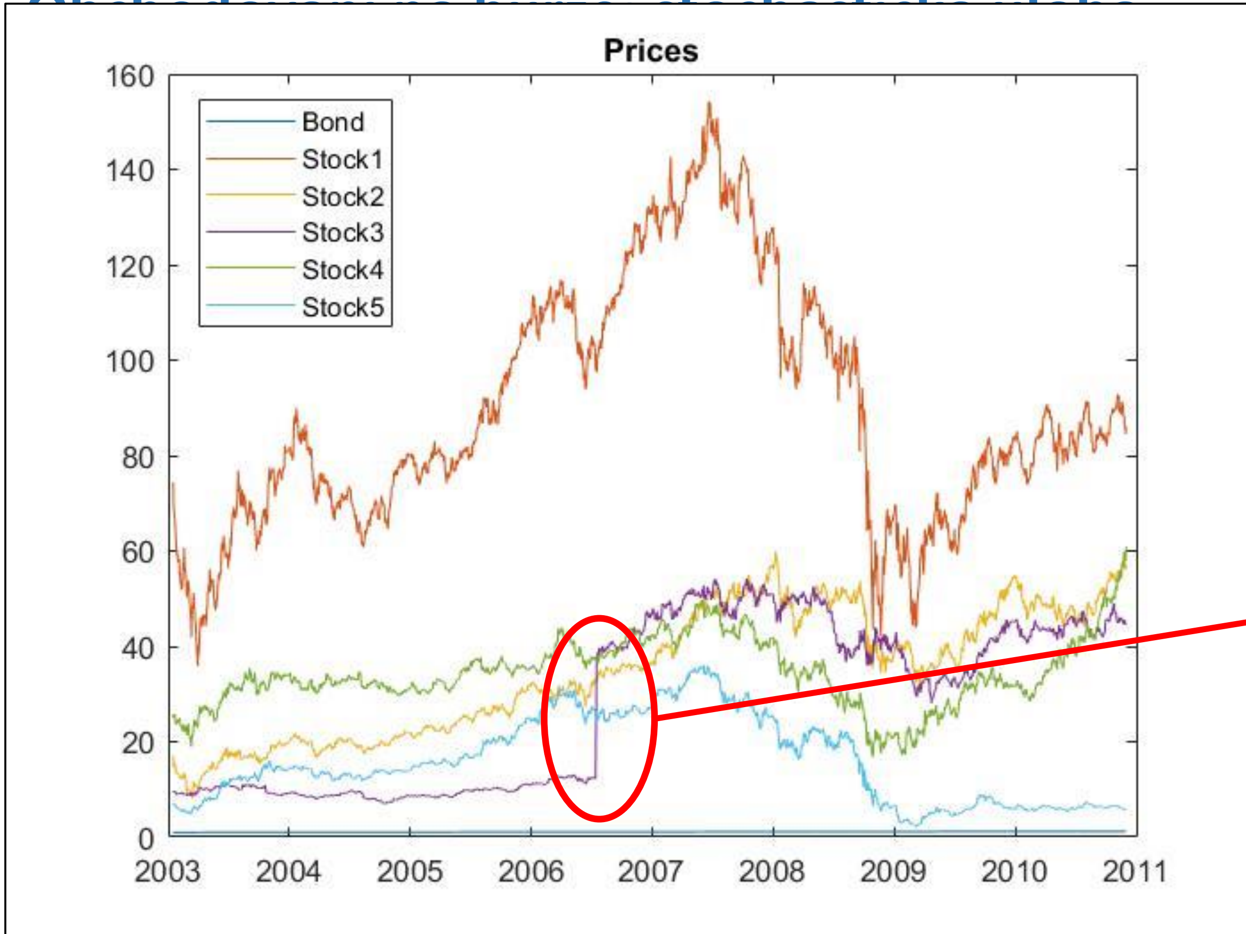
$$\mathrm{relative\ profit}_i(t+1) = \frac{\mathrm{stock\ price}_i(t+1) - \mathrm{stock\ price}_i(t)}{\mathrm{stock\ price}_i(t)}$$ „návratnost“

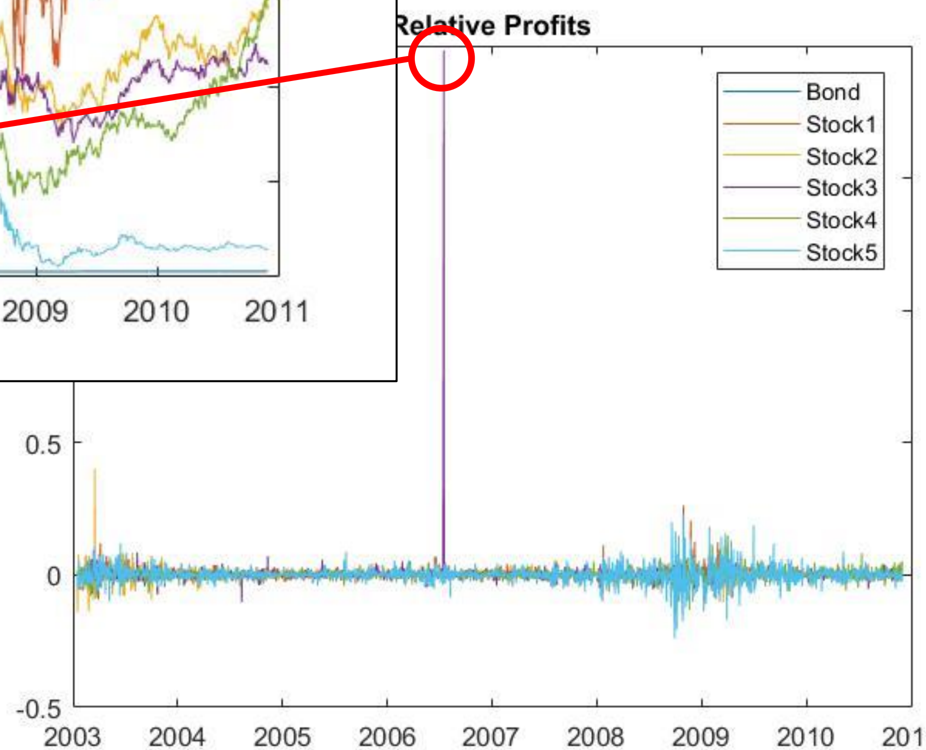


dělanou částkou a částkou

za jednu akcii)

návratnost“





Obchodování na burze: stochastická úloha

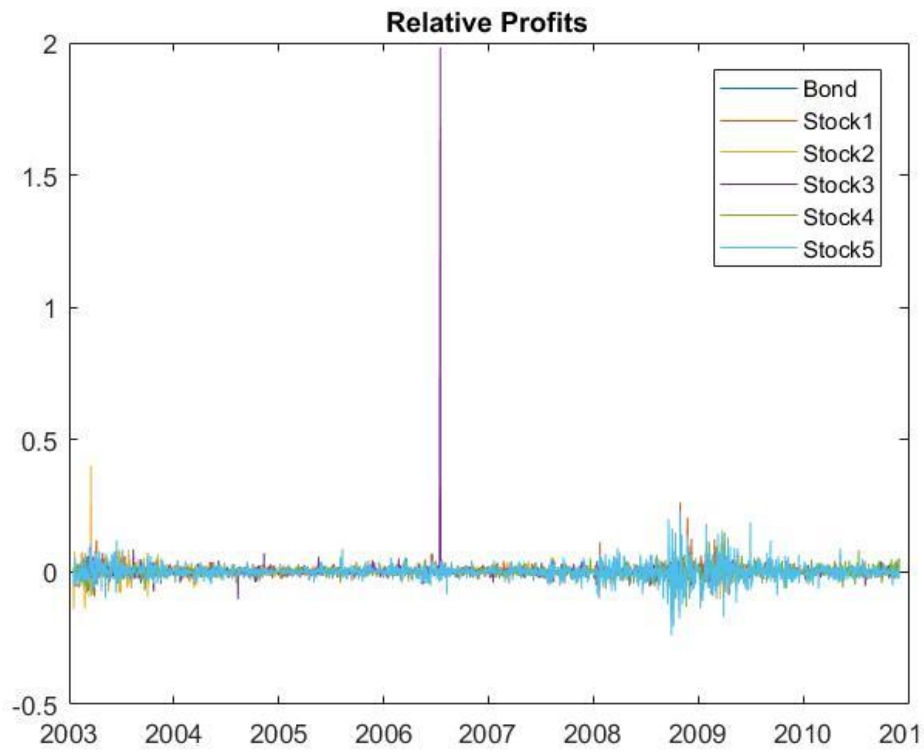
Zisk je objem získaných finančních prostředků, tj. rozdíl mezi vydělanou částkou a částkou vynaloženou na nákup, provoz nebo výrobu něčeho.

$$\text{profit}_i(t+1) = \text{stock price}_i(t+1) - \text{stock price}_i(t)$$

$$\text{relative profit}_i(t+1) = \frac{\text{stock price}_i(t+1) - \text{stock price}_i(t)}{\text{stock price}_i(t)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\text{relative profit}_1) &= 0.822 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_2) &= 3.524 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_3) &= 8.391 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_4) &= 13.058 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_5) &= 6.409 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_6) &= 3.687 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(\text{relative profit}_1) &= 7.282 \cdot 10^{-33} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_2) &= 5.625 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_3) &= 4.921 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_4) &= 21.601 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_5) &= 4.384 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_6) &= 9.546 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$



Obchodování na burze: maximalizace zisku

Maximalizovat zisk = maximalizovat očekávaný relativní zisk

$$\text{expected value of profit} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{relative profit}_i(t)\right] \quad \rightarrow \quad \max$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{stock price}_i(1) = 1000 \text{ Kč}$$

$$\forall i: \; x_i \geq 0$$

Obchodování na burze: maximalizace zisku

Maximalizovat zisk = maximalizovat očekávaný relativní zisk

$$\text{expected value of profit} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{relative profit}_i(t)\right] \quad \rightarrow \quad \max$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{stock price}_i(1) = 1000 \text{ Kč}$$

$$\forall i: \; x_i \geq 0$$

čas investice

Obchodování na burze: maximalizace zisku

Maximalizovat zisk = maximalizovat očekávaný relativní zisk

$$\text{expected value of profit} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{relative profit}_i(t)\right] \quad \rightarrow \quad \max$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{stock price}_i(1) = 1000 \text{ Kč}$$

$$\forall i: \ x_i \geq 0$$

čas investice

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{E}\left[\text{relative profit}_i\right] = \langle x, f \rangle$$

Obchodování na burze: maximalizace zisku

Maximalizovat zisk = maximalizovat očekávaný relativní zisk

$$\text{expected value of profit} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{relative profit}_i(t)\right] \quad \to \quad \max$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{stock price}_i(1) = 1000 \text{ Kč}$$

$$\forall i: \ x_i \geq 0$$

čas investice

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{E}\left[\text{relative profit}_i\right] = \langle x, f \rangle$$

$$\forall i: \quad f_i = \mathbb{E}\left[\text{relative profit}_i\right]$$

Obchodování na burze: maximalizace zisku

Maximalizovat zisk = maximalizovat očekávaný relativní zisk

$$\text{expected value of profit} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{relative profit}_i(t)\right] \quad \rightarrow \quad \max$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \text{stock price}_i(1) = 1000 \text{ Kč}$$

$$\forall i: \quad x_i \geq 0$$

čas investice

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{E}\left[\text{relative profit}_i\right] = \langle x, f \rangle$$

$$\forall i: \quad f_i = \mathbb{E}\left[\text{relative profit}_i\right]$$

$$x^* = \arg\max \langle f, x \rangle \quad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

(lineární programování)

Obchodování na burze: maximalizace zisku

<u>Maximalizovat zisk</u> = maximalizovat očekávaný relativní zisk

```
Profit=(Stocks(2:T,:)-Stocks(1:T-1,:))./Stocks(1:T-1,:);
f = -mean(Profit(1:T-1,:));
Aeq=Stocks(1,:);
beq=Money;
lb=zeros(size(Profit,2),1);
x = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);


% compute portfolio
Portfolio = zeros(1,T);
for t=1:T
    Portfolio(t)= dot(x,Stocks(t,:));
end
```

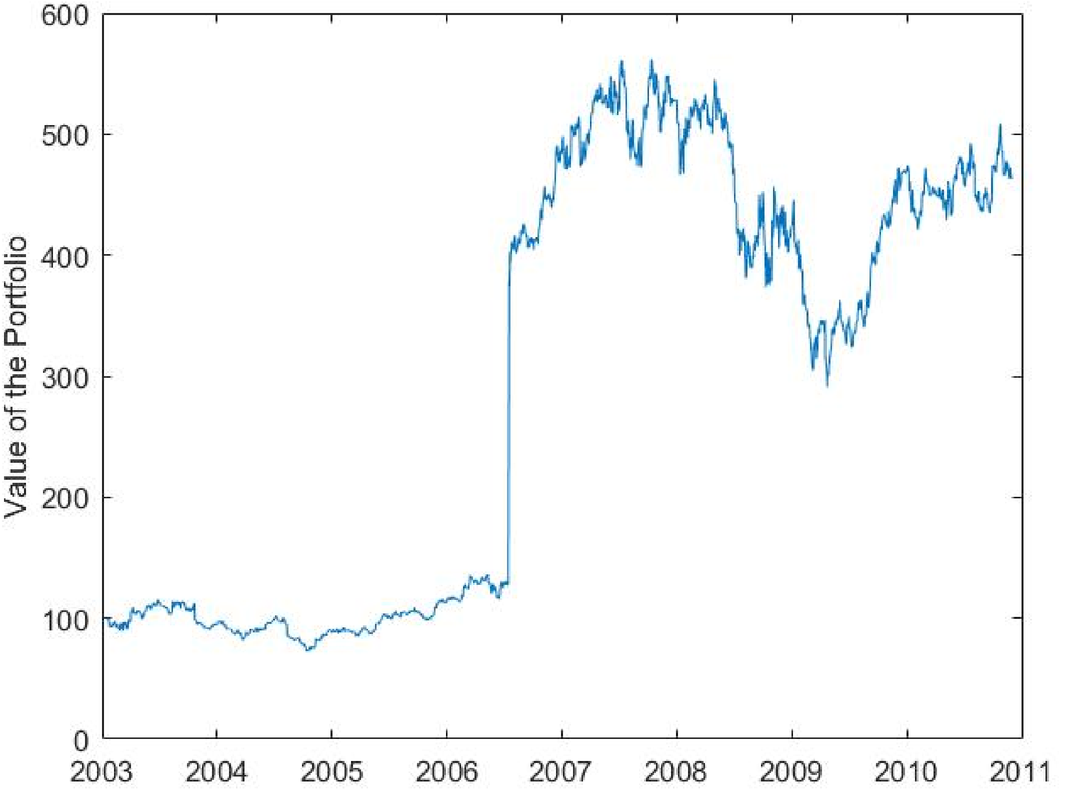
Obchodování na burze: maximalizace zisku

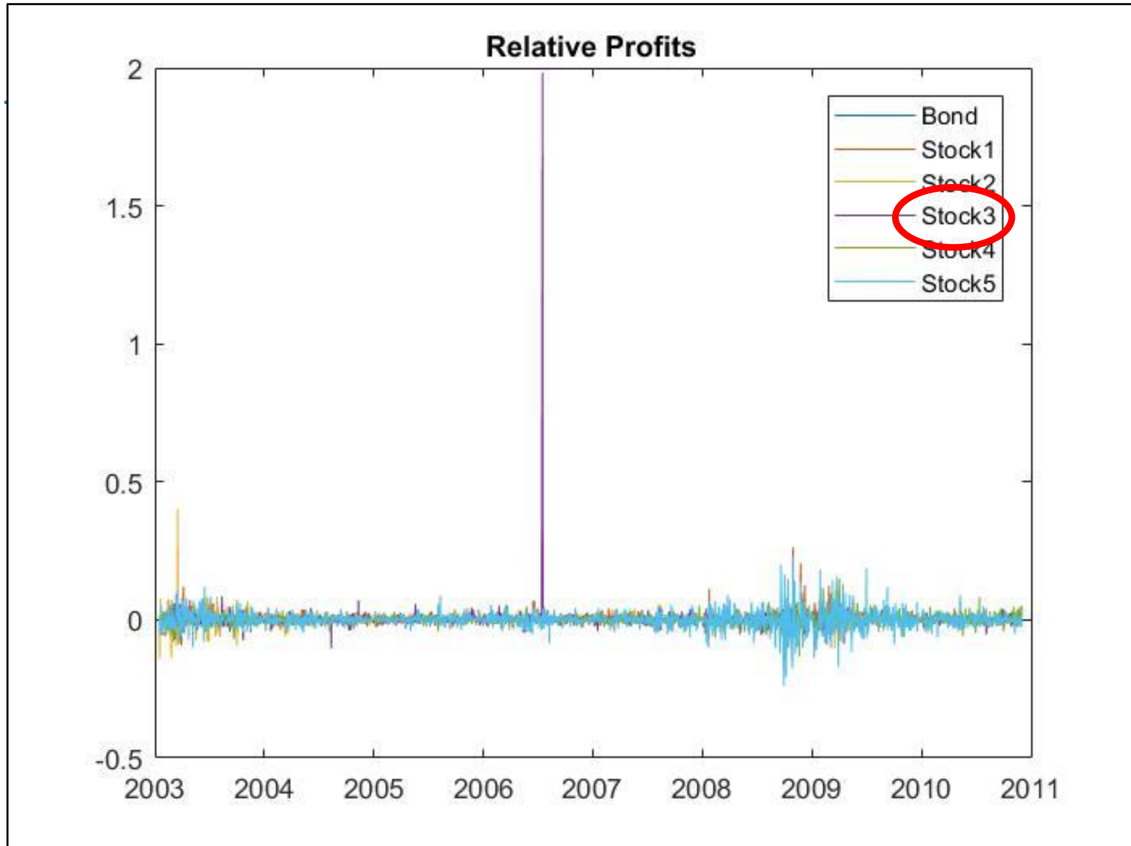
Maximalizovat zisk = maximalizovat očekávaný relativní zisk

```
Profit=(Stocks(2:T,:)-Stocks(1:T-1,:))./Stocks(1:T-1,:);
f = -mean(Profit(1:T-1,:));
Aeq=Stocks(1,:);
beq=Money;
lb=zeros(size(Profit,2),1);
x = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);
```

```
% compute portfolio
Portfolio = zeros(1,T);
for t=1:T
    Portfolio(t)= dot(x,Stocks(t,:));
end
```

$$x^* = [0, 0, 0, 10.3734, 0, 0]$$





sk

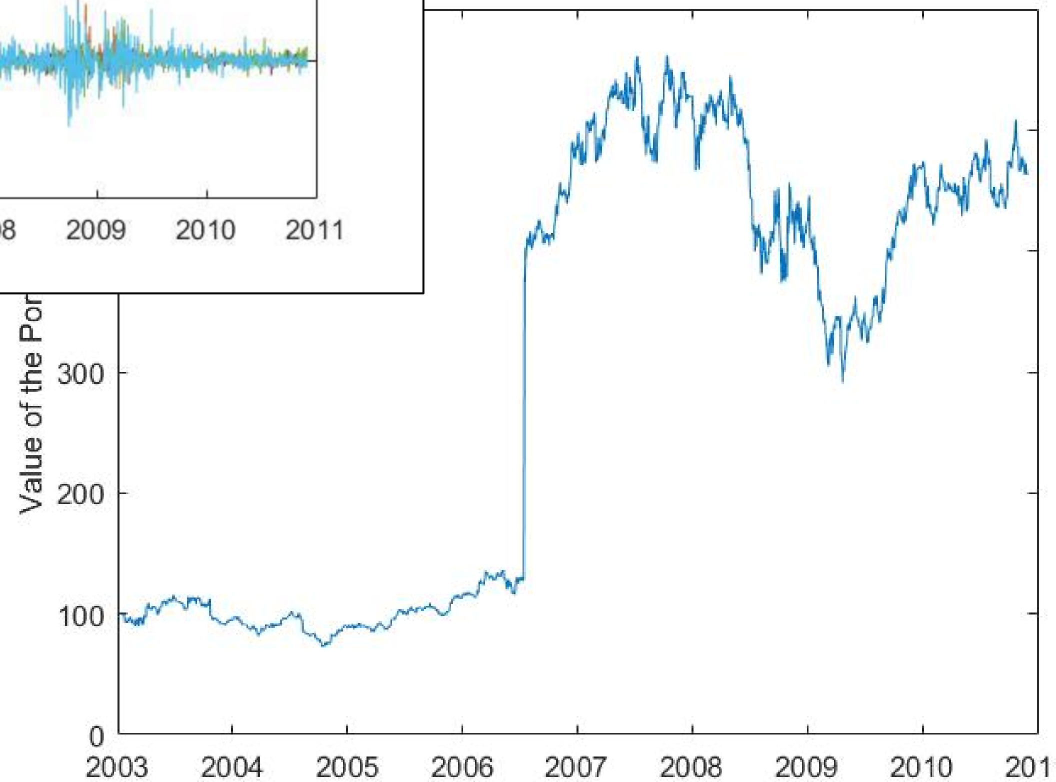
$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(\text{relative profit}_1) &= 7.282 \cdot 10^{-33} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_2) &= 5.625 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_3) &= 4.921 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_4) &= 21.601 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_5) &= 4.384 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_6) &= 9.546 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}
$$

... nicméně tato volba je nejrizikovější

$$x^* = [0, 0, 0, 10.3734, 0, 0]$$

investuj jen do akcií s největším očekávaným relativním ziskem...

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\text{relative profit}_1) &= 0.822 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_2) &= 3.524 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_3) &= 8.391 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_4) &= 13.058 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_5) &= 6.409 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_6) &= 3.687 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}
$$



Obchodování na burze: minimalizace rizika

Riziko je míra disperze výnosu. (= rozptyl)

$$\mathbb{D}(\text{return}) \quad \to \quad \min$$

Obchodování na burze: minimalizace rizika

Riziko je míra disperze výnosu. (= rozptyl)

$$\mathbb{D}(\text{return}) = \mathbb{D}(\langle x, f(t) \rangle) \qquad \to \quad \min$$

Obchodování na burze: minimalizace rizika

Riziko je míra disperze výnosu. (= rozptyl)

$$\mathbb{D}(\text{return}) = \mathbb{D}(\langle x, f(t) \rangle) = x^T \operatorname{Cov}(f(t))x \qquad \to \quad \min$$

$$\boxed{\text{Nechť } X \in \mathbb{R}^n \text{ je náhodná proměnná a } a \in \mathbb{R}^n. \text{ Pak } \mathbb{D}(a^T X) = a^T \operatorname{Cov}(X) a.}$$

Obchodování na burze: minimalizace rizika

Riziko je míra disperze výnosu. (= rozptyl)

$$\mathbb{D}(\text{return}) = \mathbb{D}(\langle x, f(t) \rangle) = x^T \operatorname{Cov}(f(t)) x \qquad \rightarrow \quad \min$$

$$\boxed{\text{Nechť } X \in \mathbb{R}^n \text{ je náhodná proměnná a } a \in \mathbb{R}^n. \text{ Pak } \mathbb{D}(a^T X) = a^T \operatorname{Cov}(X) a.}$$

Příklad: (poněkud patologický)

$$x^* = \arg\min x^T H x, \qquad H = \operatorname{Cov}(f(t))$$ - SPD matice

(bez omezení)

Obchodování na burze: minimalizace rizika

Riziko je míra disperze výnosu. (= rozptyl)

$$\mathbb{D}(\text{return}) = \mathbb{D}(\langle x, f(t) \rangle) = x^T \text{Cov}(f(t)) x \qquad \to \quad \min$$

$\boxed{\text{Nechť } X \in \mathbb{R}^n \text{ je náhodná proměnná a } a \in \mathbb{R}^n\text{. Pak } \mathbb{D}(a^T X) = a^T \text{Cov}(X) a.}$

Příklad: (poněkud patologický)

$$x^* = \arg\min x^T H x, \qquad H = \text{Cov}(f(t))$$ - SPD matice

(bez omezení)

Triviální řešení:

$x^* = 0$ - pokud neuděláme žádné investice, pak je to bez rizika :)

Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{array}{rcl} x^T f & \rightarrow & \max \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{array}{rcl} x^T f & \rightarrow & \max \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

$$\begin{array}{rcl} -x^T f & \rightarrow & \min \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{array}{rcl} x^T f & \rightarrow & \max \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

$$\begin{array}{rcl} -x^T f & \rightarrow & \min \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

<u>Obecně:</u>

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \min g(x) \end{cases}$$

Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{array}{rcl} x^T f & \rightarrow & \max \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

$$\begin{array}{rcl} -x^T f & \rightarrow & \min \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

Obecně:

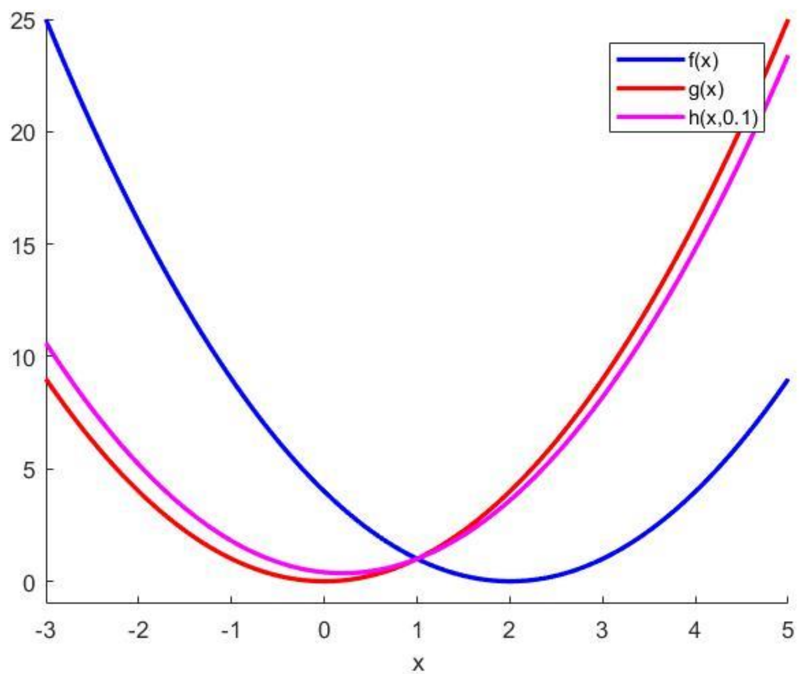
$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ \min g(x) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \min \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x),$$

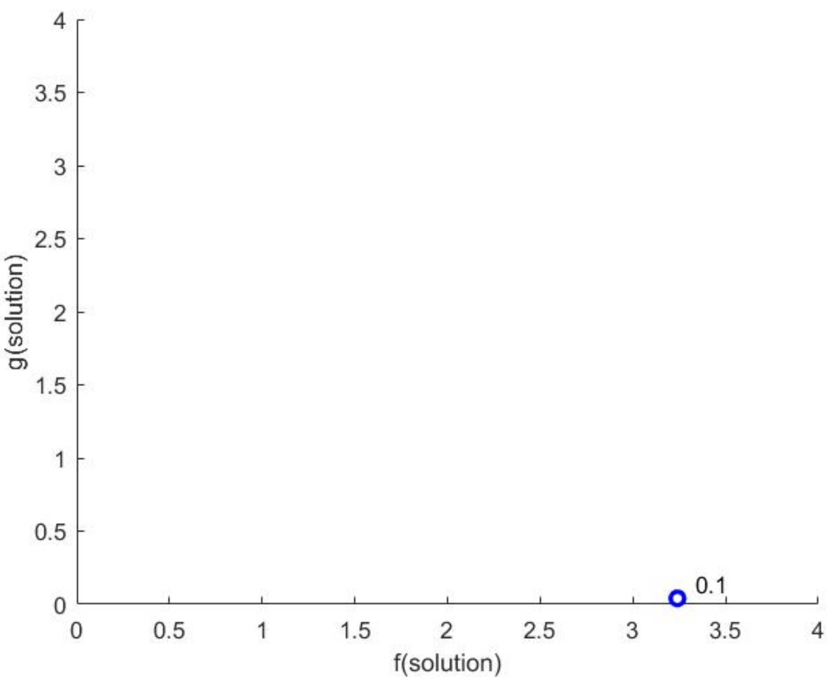
kde $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ určují důležitost $f(x), g(x)$ (obvykle $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).

(který z optimalizačních problémů je důležitější)

Vícekriteriální optimalizace: agregace

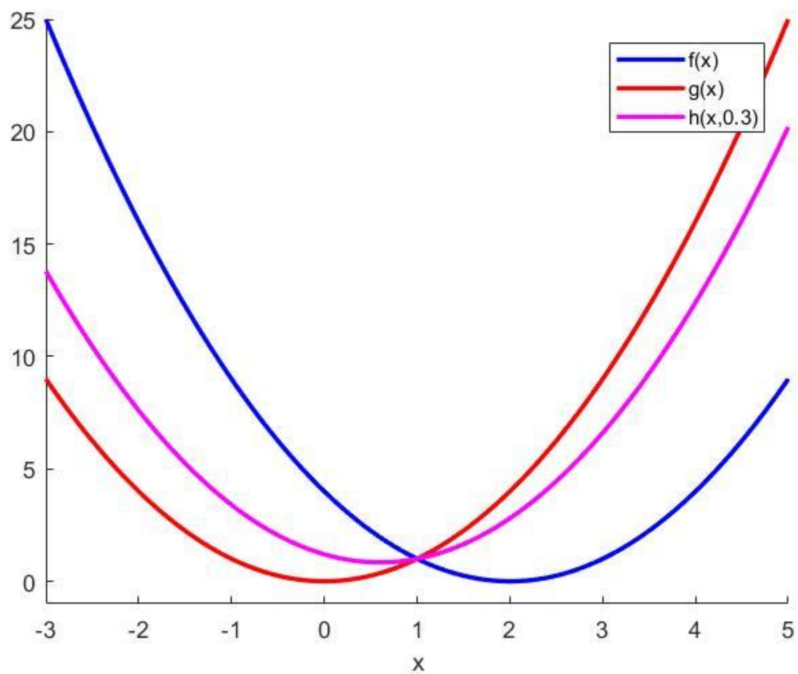
$$\begin{cases} \min f(x), & f(x) = (x-2)^2 \\ \min g(x), & g(x) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \min_x h(x,\alpha), \quad h(x,\alpha) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x),$$

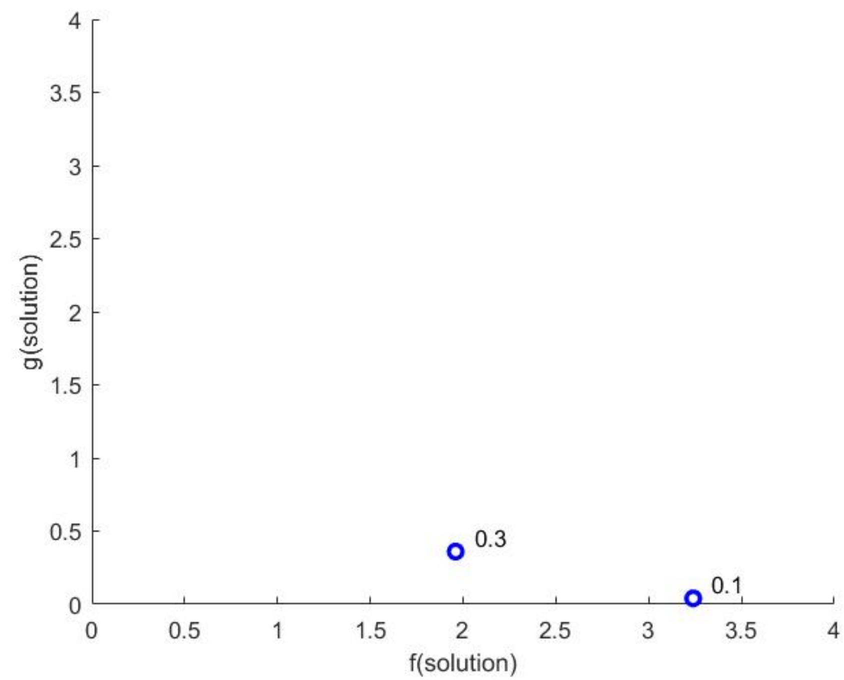




Vícekriteriální optimalizace: agregace

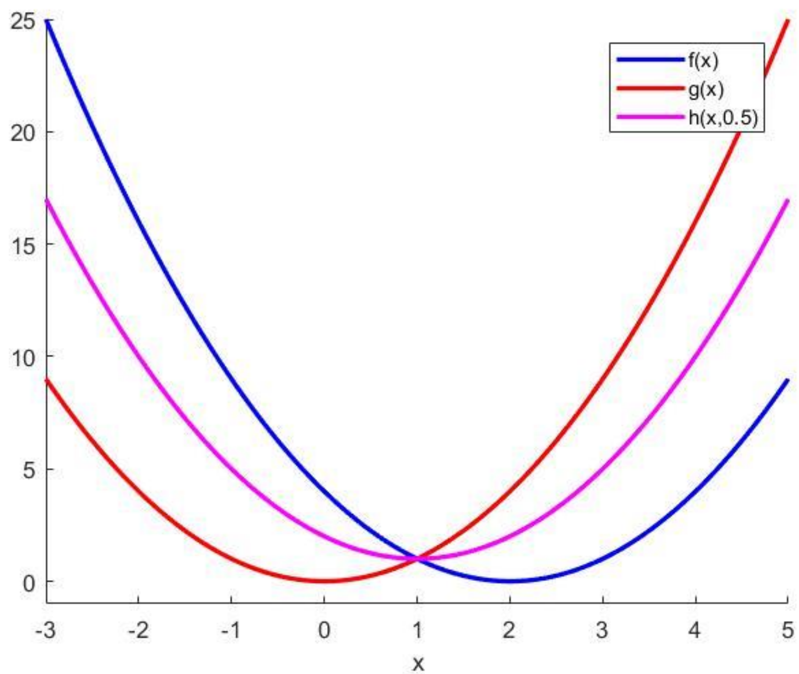
$$\begin{cases} \min f(x), & f(x) = (x-2)^2 \\ \min g(x), & g(x) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \min_x h(x,\alpha), \quad h(x,\alpha) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x),$$

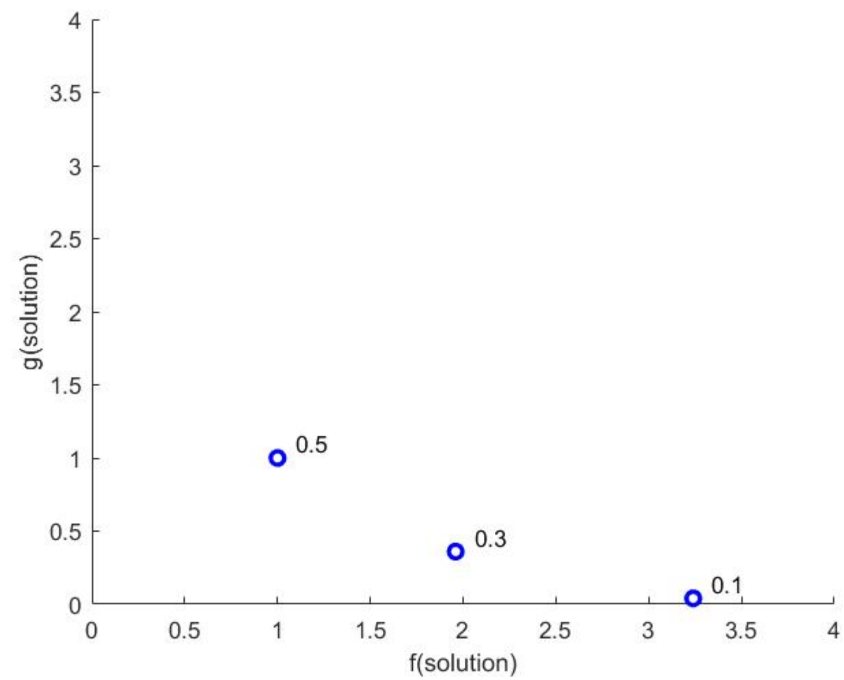




Vícekriteriální optimalizace: agregace

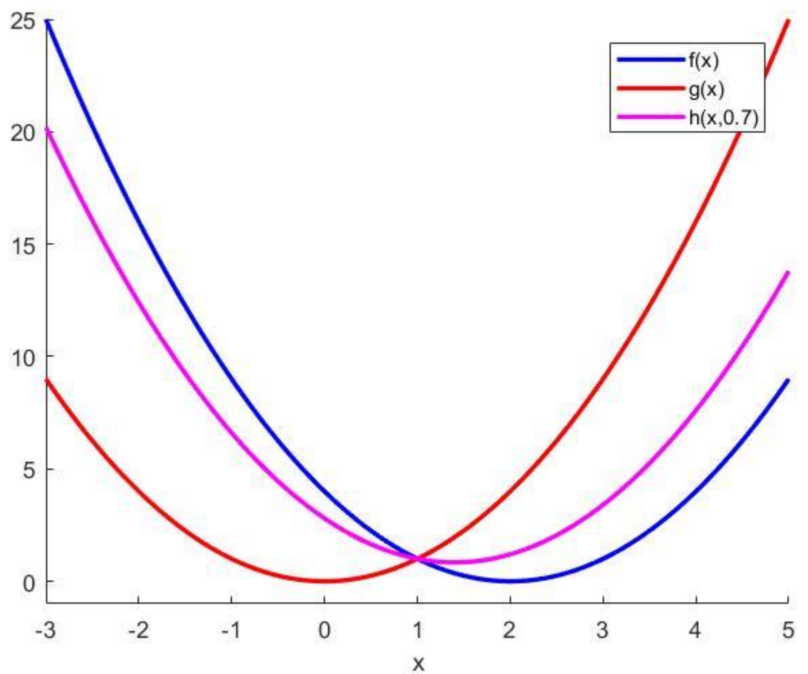
$$\begin{cases} \min f(x), & f(x) = (x-2)^2 \\ \min g(x), & g(x) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \min_x h(x,\alpha), \quad h(x,\alpha) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x),$$

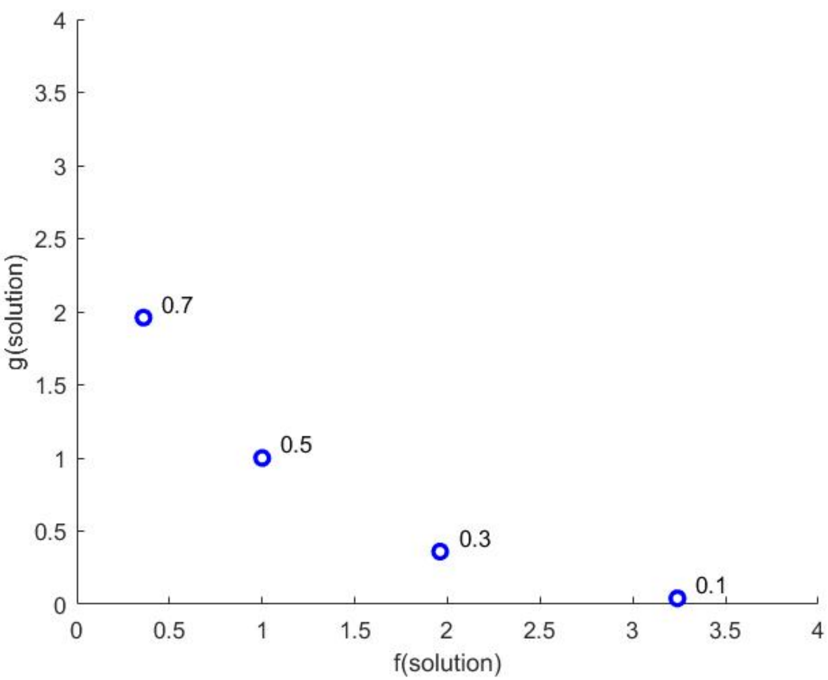




Vícekriteriální optimalizace: agregace

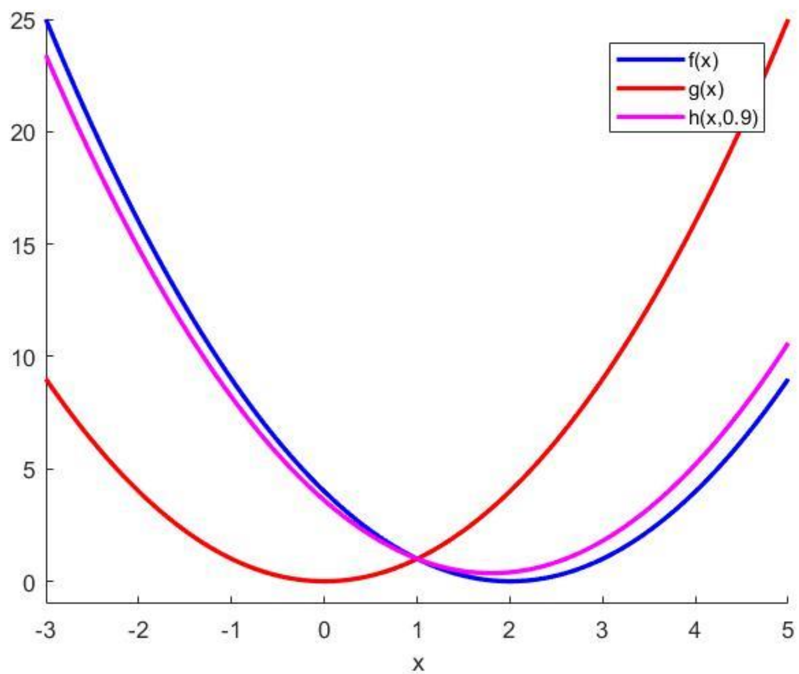
$$\begin{cases} \min f(x), & f(x) = (x-2)^2 \\ \min g(x), & g(x) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \min_x h(x,\alpha), \quad h(x,\alpha) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x),$$

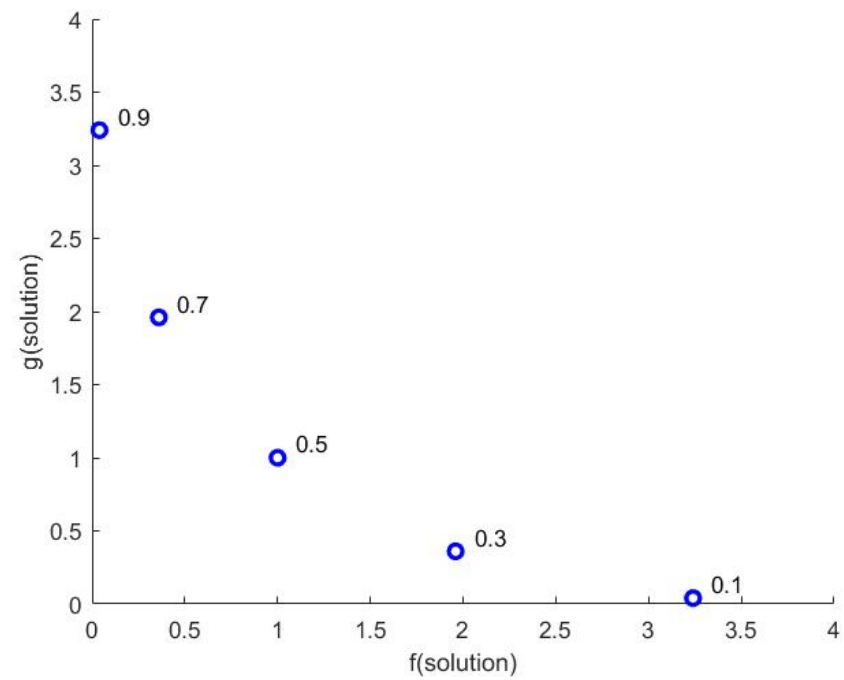




Vícekriteriální optimalizace: agregace

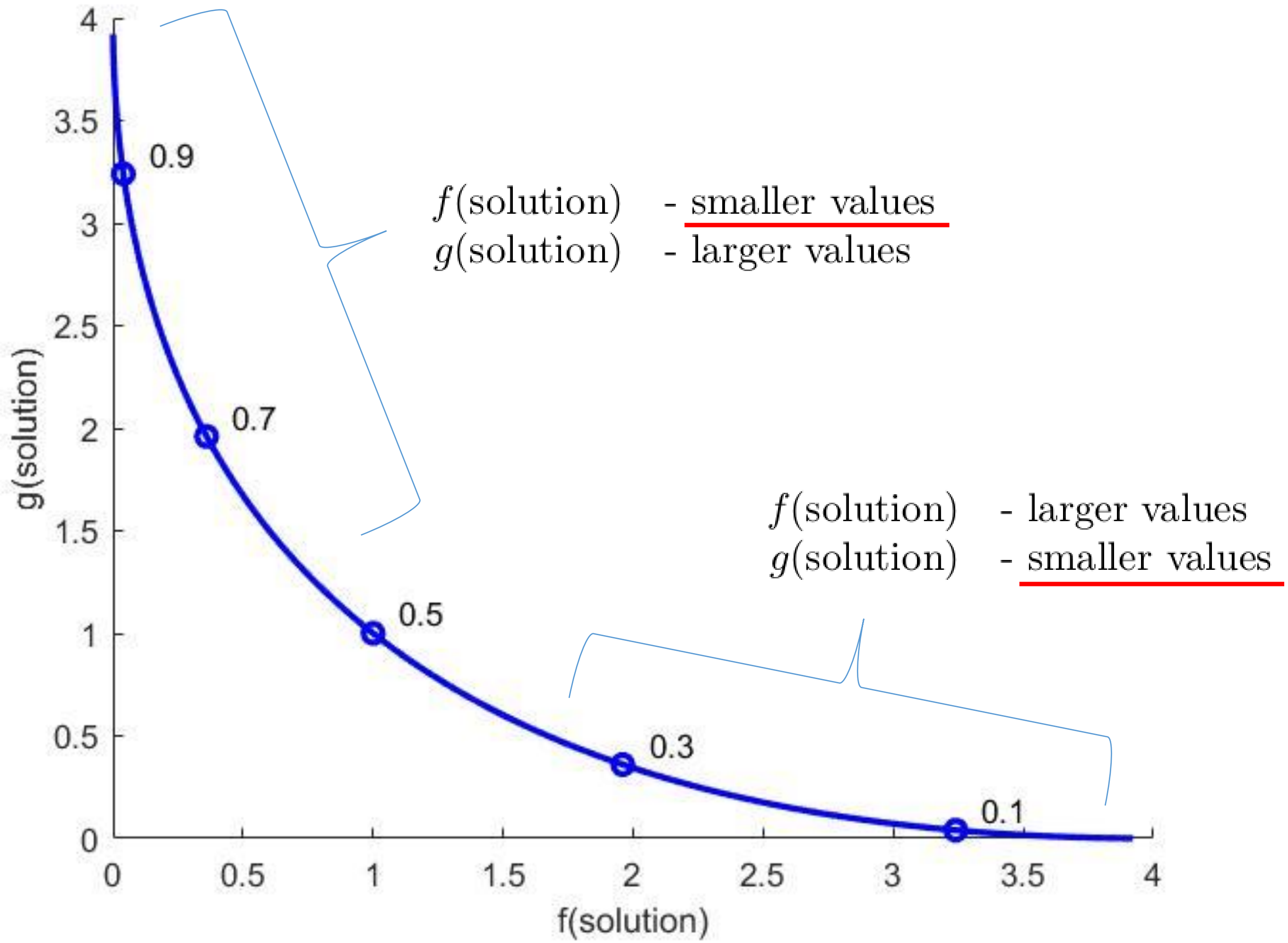
$$\begin{cases} \min f(x), & f(x) = (x-2)^2 \\ \min g(x), & g(x) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \min_x h(x,\alpha), \quad h(x,\alpha) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x),$$





Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{cases} \min f(x), & f(x) = (x-2)^2 \\ \min g(x), & g(x) = x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \min_x h(x,\alpha), \quad h(x,\alpha) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x),$$



Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{array}{lcl} -x^T f & \rightarrow & \min \\ x^T H x & \rightarrow & \min \end{array} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

Vícekriteriální optimalizace: agregace

$$\begin{aligned} -x^T f &\rightarrow \min \\ x^T H x &\rightarrow \min \end{aligned} \qquad \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0$$

Definujme koeficient „averze rizika“ (jak moc je důležité minimalizovat riziko) $\alpha \in \langle 0, 1)$

$\alpha = 0$ - riziko není pro nás důležité

$\alpha = 0.99999$ - riziko je pro nás moc důležité

$$\boxed{\begin{gathered} x^* = \arg\min \left[\ \alpha \left(x^T H x \right) \ - \ (1-\alpha) x^T f \ \right] \\ \text{s.t. } A_{eq}x = b_{eq}, x \geq 0 \\ \text{(kvadratické programování)} \end{gathered}}$$

Vícekriteriální optimalizace: agregace

```
Profit=(Stocks(2:T,:)-Stocks(1:T-1,:))./Stocks(1:T-1,:);
f = -mean(Profit(1:T-1,:));
H = 2*cov(Profit(1:T-1,:));
Aeq=Stocks(1,:);
beq=Money;
lb=zeros(size(Profit,2),1);

alpha = 0.999;
x = quadprog(alpha*H,(1-alpha)*f,[],[],Aeq,beq,lb);

% compute portfolio
Portfolio = zeros(1,T);
for t=1:T
    Portfolio(t)= dot(x,Stocks(t,:));
end
```

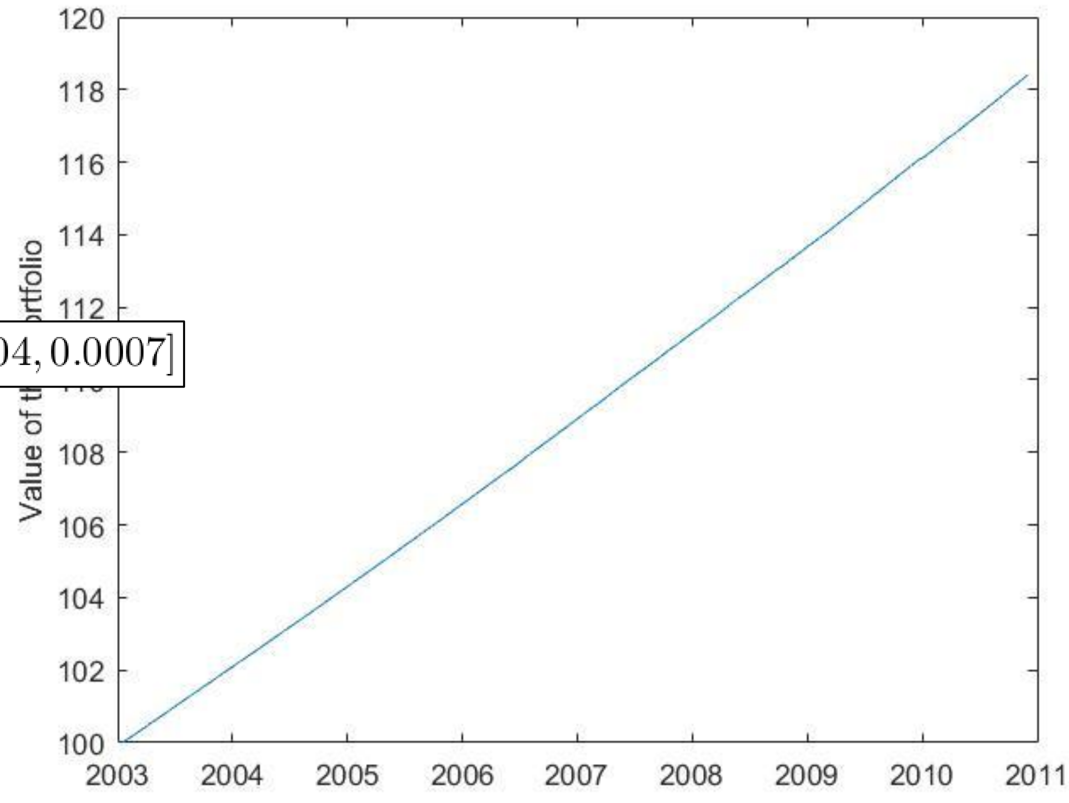
Vícekriteriální optimalizace: agregace

```
Profit=(Stocks(2:T,:)-Stocks(1:T-1,:))./Stocks(1:T-1,:);
f = -mean(Profit(1:T-1,:));
H = 2*cov(Profit(1:T-1,:));
Aeq=Stocks(1,:);
beq=Money;
lb=zeros(size(Profit,2),1);

alpha = 0.999;
x = quadprog(alpha*H,(1-alpha)*f,[],[],Aeq,beq,lb);

% compute portfolio
Portfolio = zeros(1,T);
for t=1:T
    Portfolio(t)= dot(x,Stocks(t,:));
end
```

$$x^* = [99.9644, 0, 0.0007, 0.0007, 0.0004, 0.0007]$$



Vícekriteriální optimalizace: agregace

```
Profit=(Stocks(2:T,:)-Stocks(1:T-1,:))./Stocks(1:T-1,:);
f = -mean(Profit(1:T-1,:));
H = 2*cov(Profit(1:T-1,:));
Aeq=Stocks(1,:);
beq=Money;
lb=zeros(size(Profit,2),1);

alpha = 0.999;
x = quadprog(alpha*H,(1-alpha)*f,[],[],Aeq,beq,lb);

% compute portfolio
Portfolio = zeros(1,T);
for t=1:T
    Portfolio(t)= dot(x,Stocks(t,:));
end
```

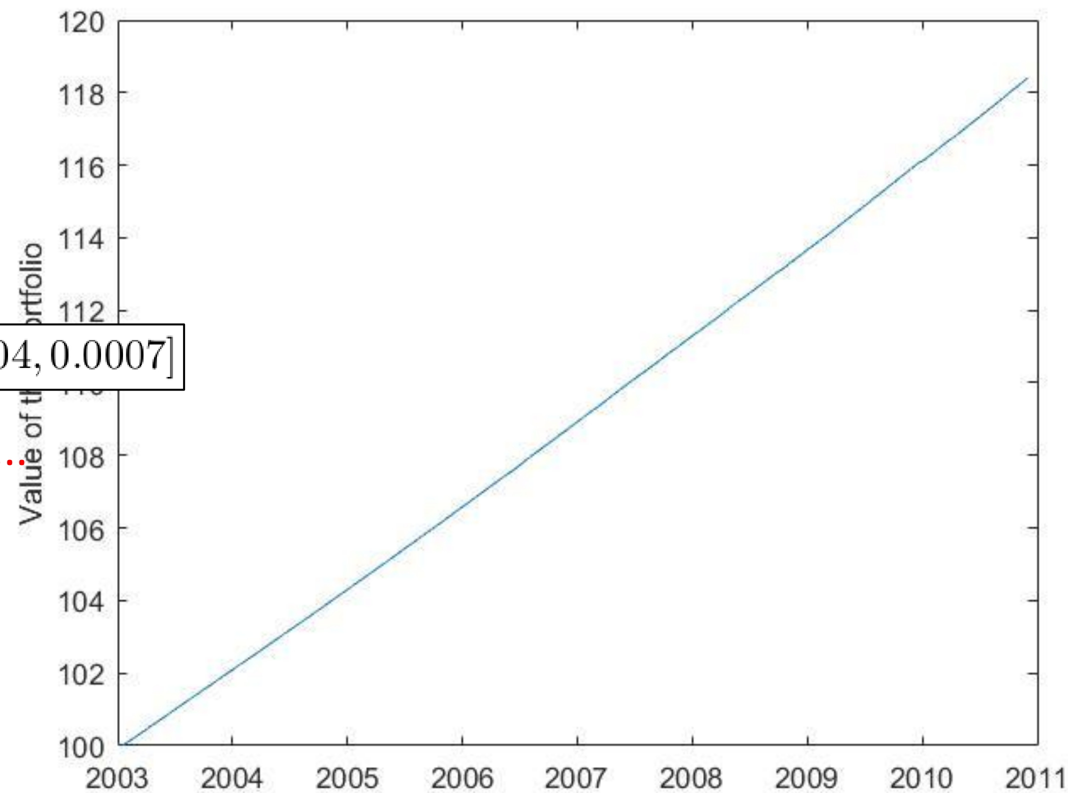
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\text{relative profit}_1) &= 0.822 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_2) &= 3.524 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_3) &= 8.391 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_4) &= 13.058 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_5) &= 6.409 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{E}(\text{relative profit}_6) &= 3.687 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

... ale očekávaný výnos nic moc

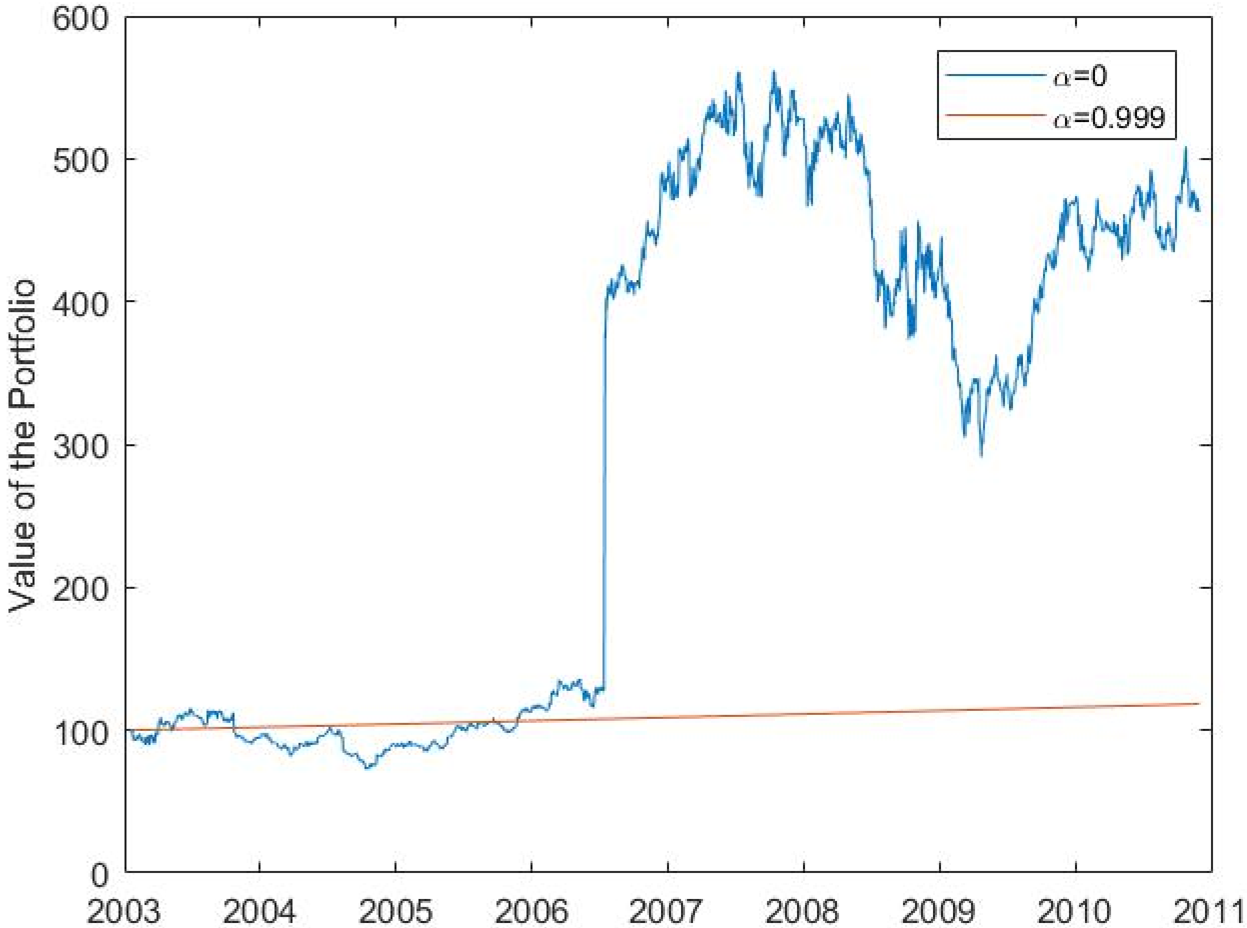
$$\boxed{x^* = [99.9644, 0, 0.0007, 0.0007, 0.0004, 0.0007]}$$

investuj do „nejstabilnějších“ akcií...

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(\text{relative profit}_1) &= 7.282 \cdot 10^{-33} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_2) &= 5.625 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_3) &= 4.921 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_4) &= 21.601 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_5) &= 4.384 \cdot 10^{-4} \\
\mathbb{D}(\text{relative profit}_6) &= 9.546 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

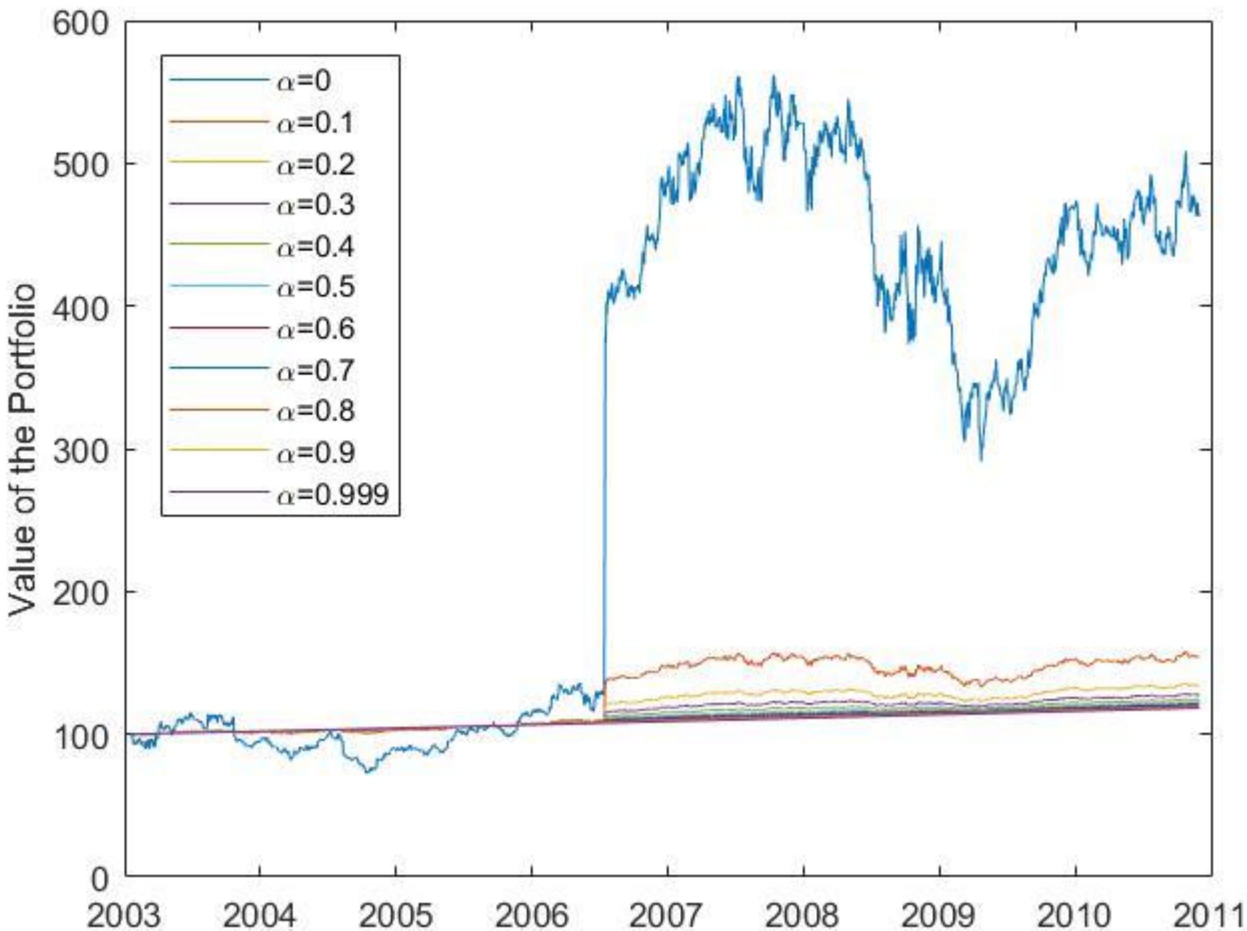


Řešení

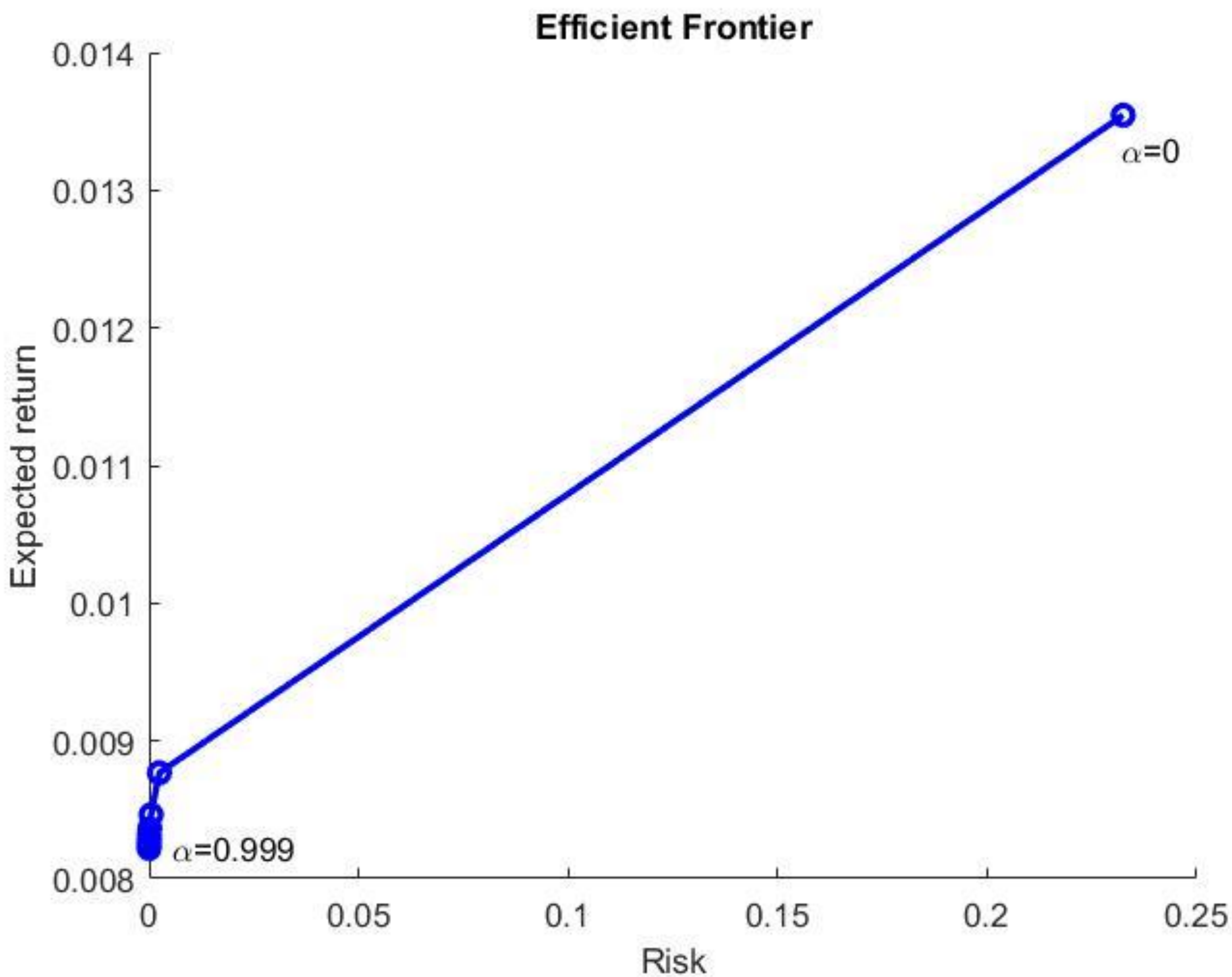


600
500
400
300
200
100
0
Value of the Portfolio
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
α=0
α=0.999

Řešení

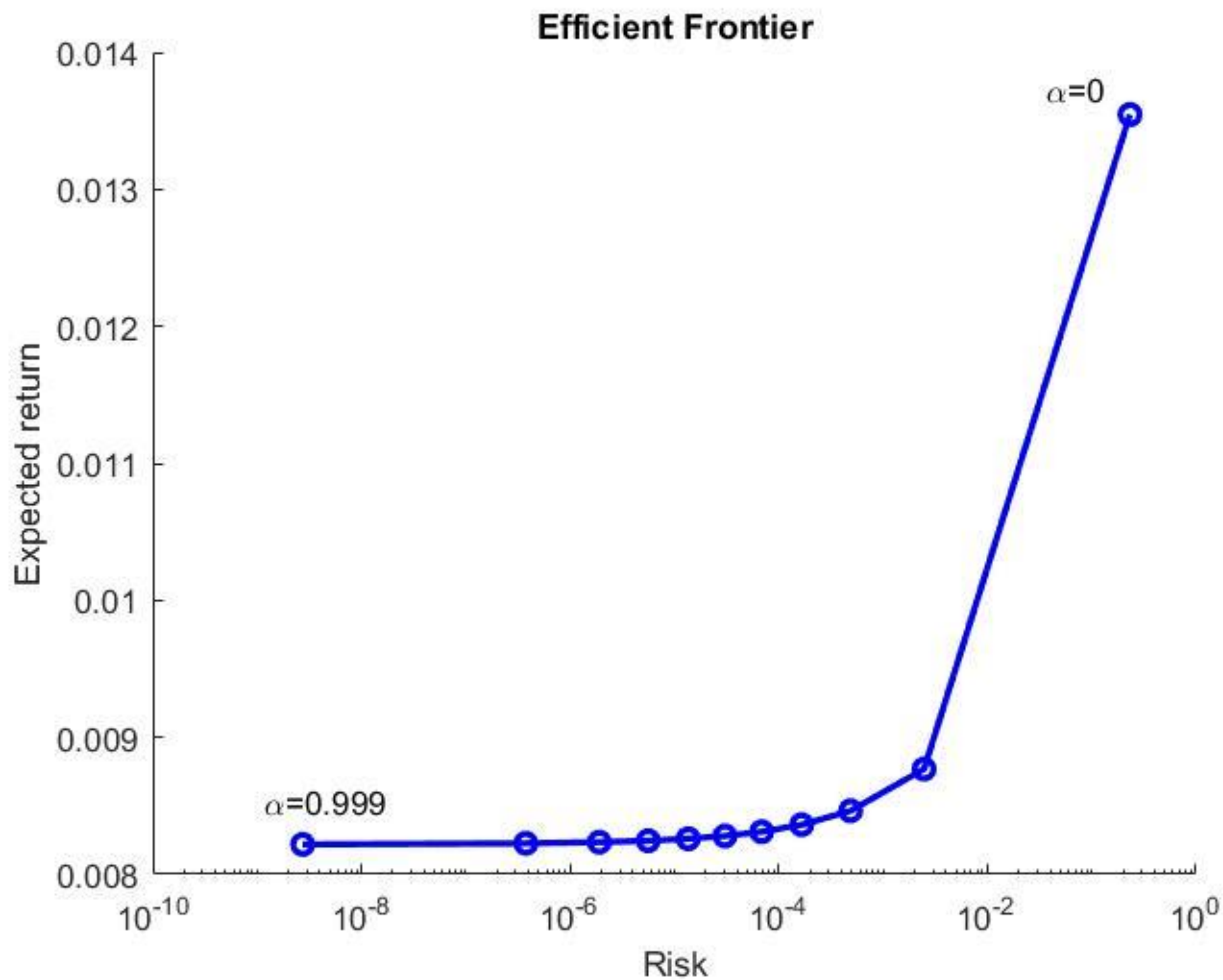

600
500
400
300
200
100
0
Value of the Portfolio
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
α=0
α=0.1
α=0.2
α=0.3
α=0.4
α=0.5
α=0.6
α=0.7
α=0.8
α=0.9
α=0.999

Řešení



<u>Efektivní hranice</u> (efficient frontier) je množina optimálních portfólií, které nabízí nejvyšší zisk s nejnižším rizikem pro předem definovanou míru rizika investice.

Řešení



<u>Efektivní hranice</u> (efficient frontier) je množina optimálních portfólií, které nabízí nejvyšší zisk s nejnižším rizikem pro předem definovanou míru rizika investice.

Cross-validation

Otázky k zamyšlení:

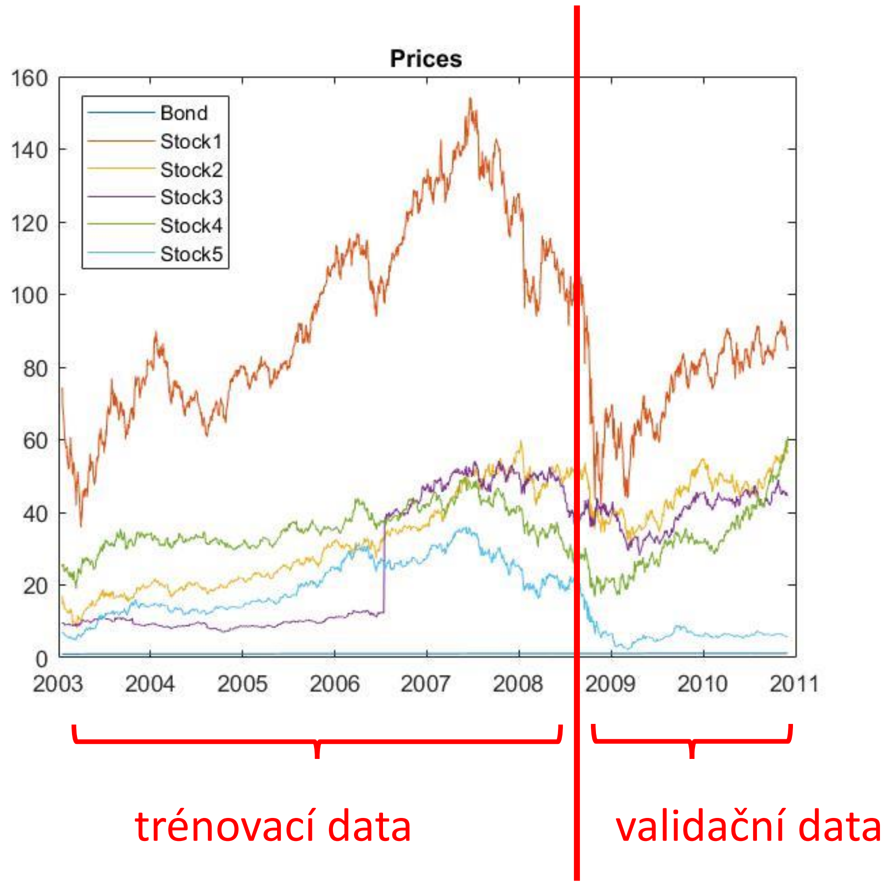
- Funguje to?
- Existuje nějaký způsob jak zkontrolovat naše predikce?
- Jak zjistit, jak *dobrá* je naše predikce?

Cross-validation

<u>Otázky k zamyšlení:</u>

- Funguje to?
- Existuje nějaký způsob jak zkontrolovat naše predikce?
- Jak zjistit, jak *dobrá* je naše predikce?

<u>Nápad:</u>

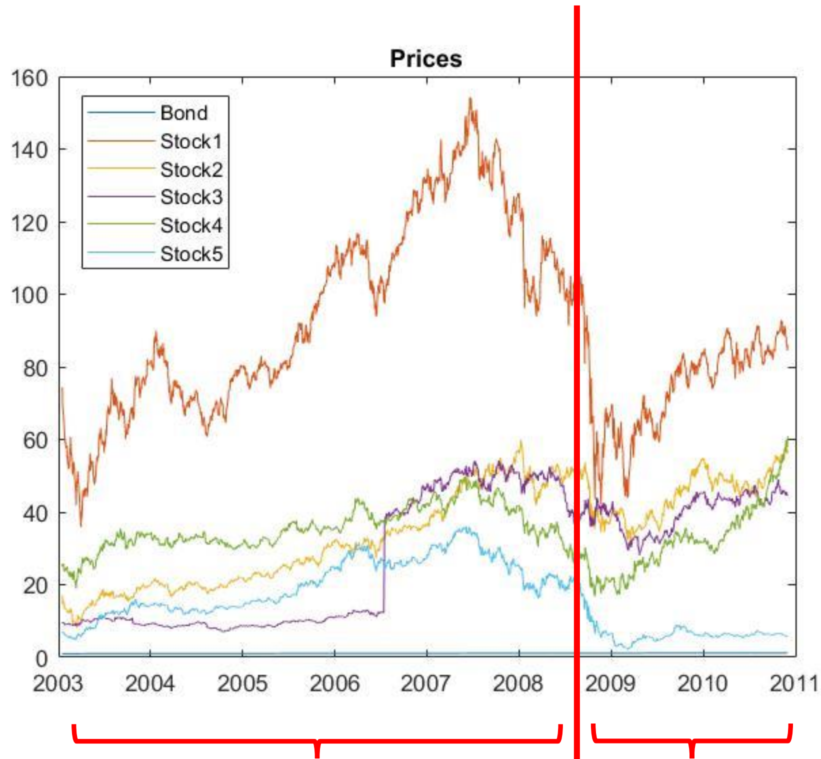


Cross-validation

<u>Otázky k zamyšlení:</u>

- Funguje to?
- Existuje nějaký způsob jak zkontrolovat naše predikce?
- Jak zjistit, jak *dobrá* je naše predikce?

<u>Nápad:</u>



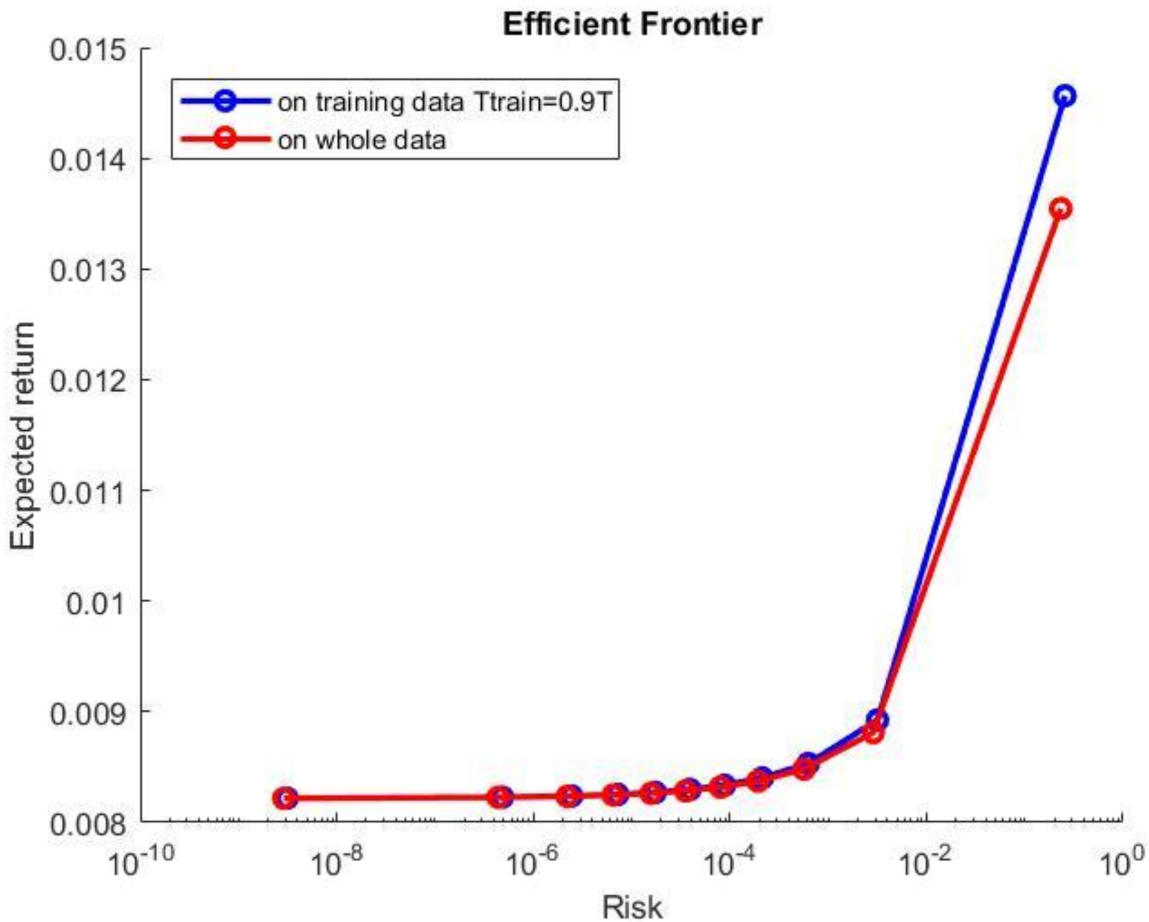
trénovací data

validační data

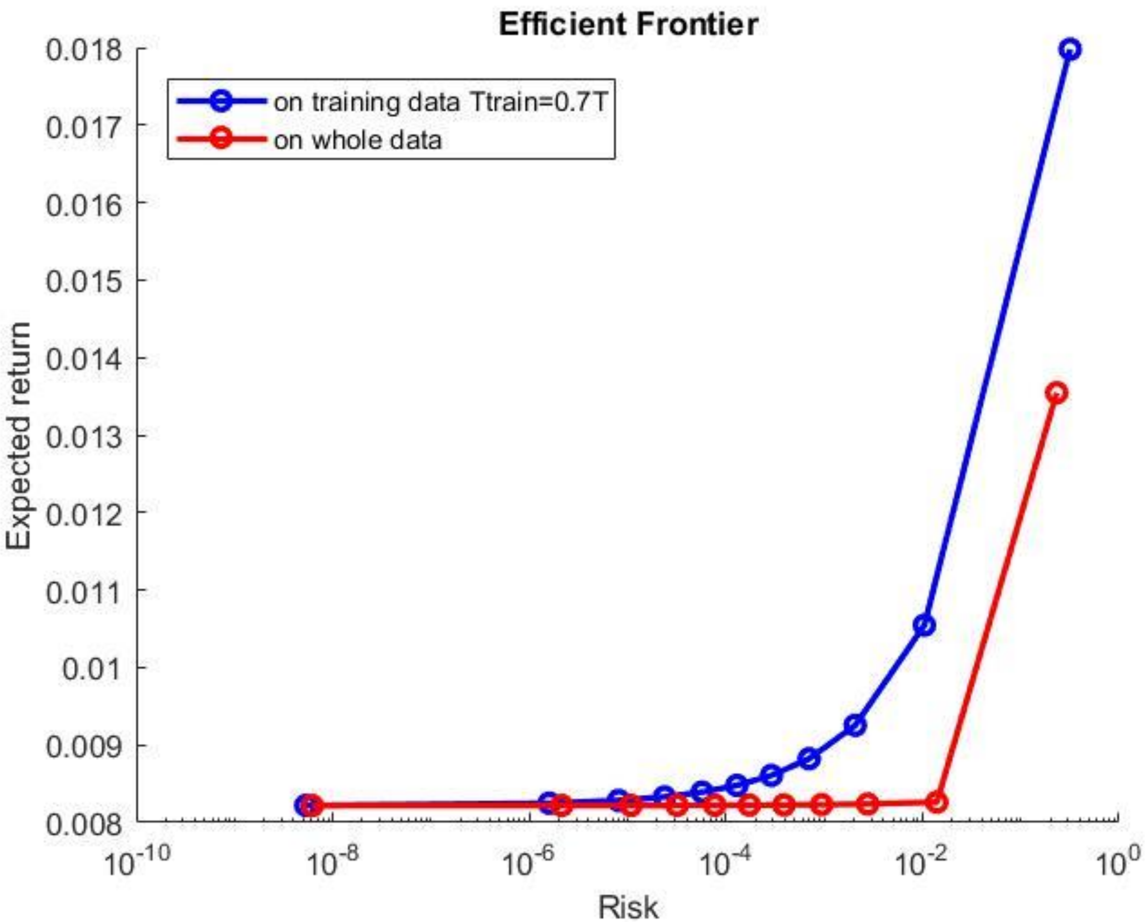
<u>Plán akce:</u>

- spočteme optimální portfolio na trénovacích datech
- sestavíme efektivní hranici na trénovacích datech
- porovnáme s efektivní hranicí na celých datech

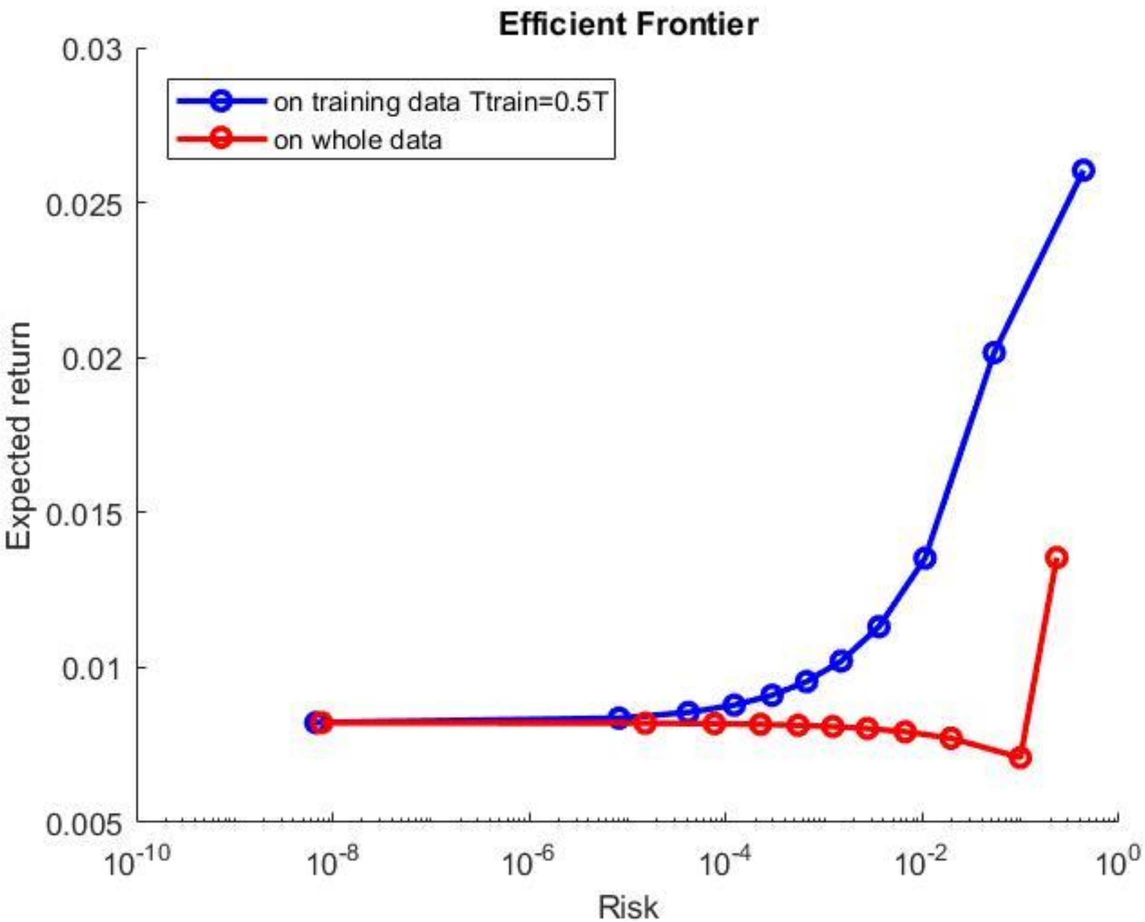
Cross-validation



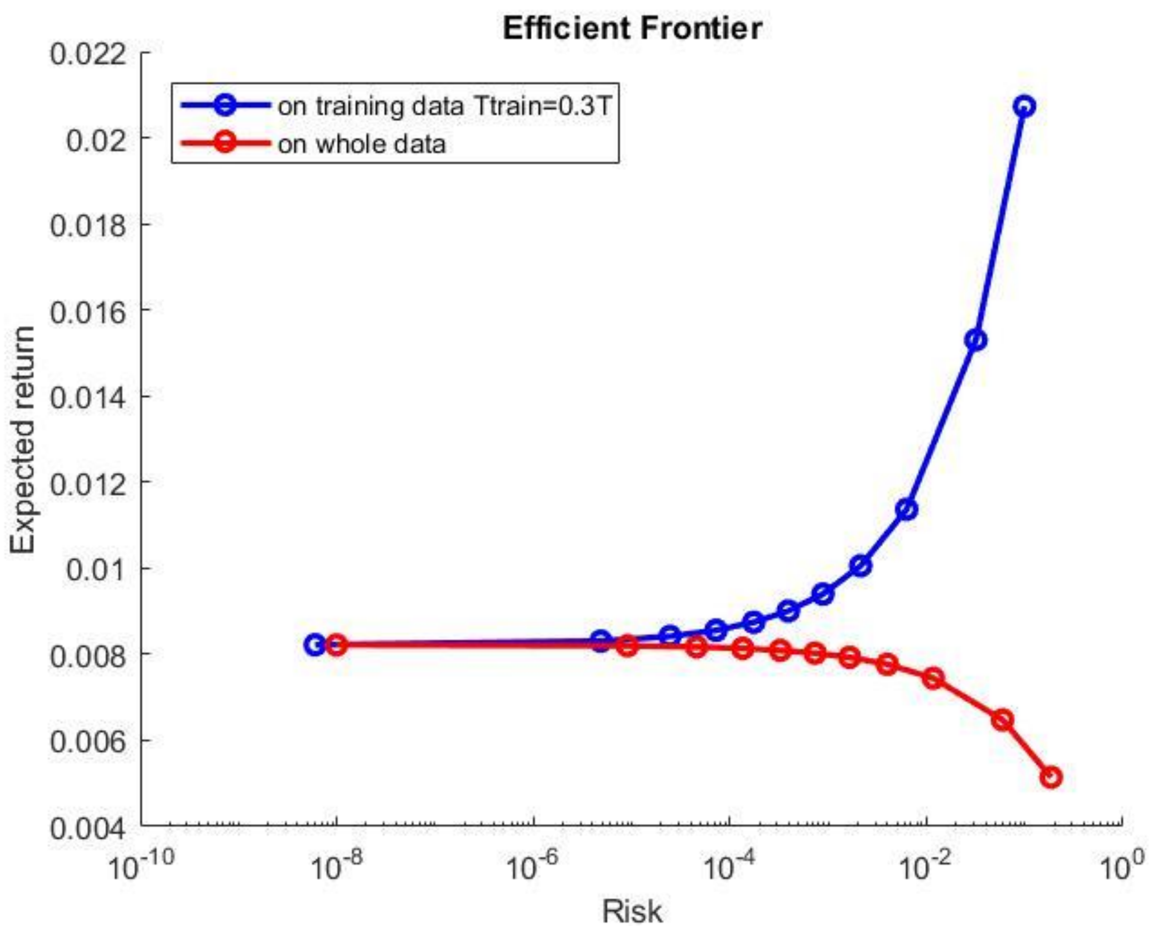
Cross-validation



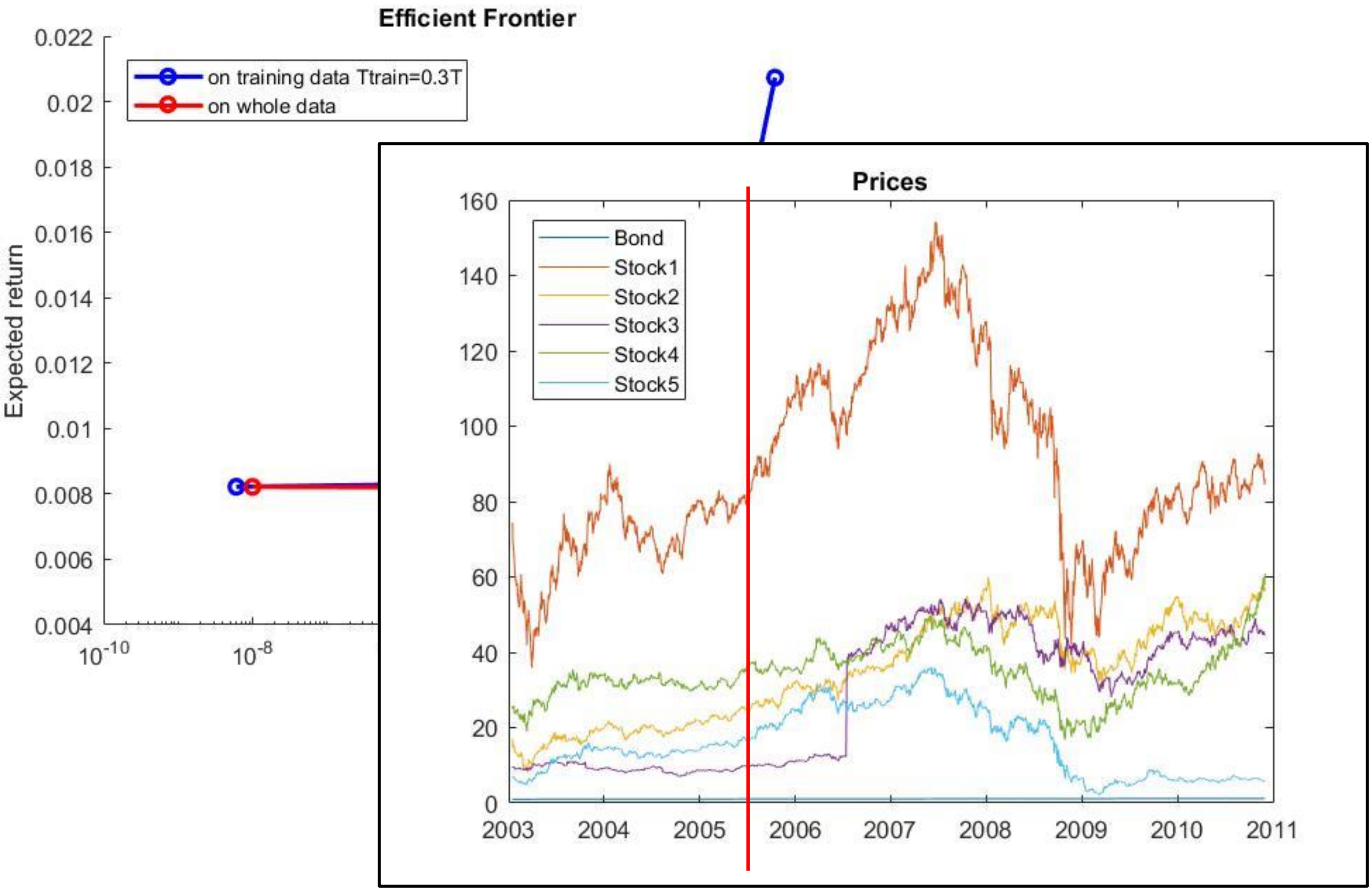
Cross-validation



Cross-validation



Cross-validation



3. Závěr

Závěrem *(take-home message)*

O čem byla tato přednáška:

- mám rád optimalizace
- neměl jsem rád statistiku, ale teď už ji umím tolerovat
- řešení optimalizačních úloh má mnohá praktická využití

- studujte aplikovanou matematiku, stojí to za to!

Děkuji za pozornost.