Diferenciální rovnice a jejich využití

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Ostrava, 1.2. 2022

(ŠKOMAM 2022)

Význam derivace – opakování

Vyjadřuje-li $V(t)$ hodnotu veličiny V v čase t, pak $V'(t)$ nám dává informaci o rychlosti změny této veličiny v čase t.

Důležitý příklad:

Pohybuje-li se těleso po přímce a označíme-li si $s(t)$ jeho polohu v čase t, pak $s'(t)$ vyjadřuje okamžitou rychlost tohoto tělesa v čase t a $s''(t)$ vyjadřuje jeho okamžité zrychlení v čase t.

Obyčejná diferenciální rovnice (ODR)

Definice:

Obyčejnou diferenciální rovnicí n–tého řádu ($n \in \mathbb{N}$) rozumíme rovnici, kterou lze napsat ve tvaru

$$F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (*)$$

kde $F: R^{n+2} \to \mathbb{R}$.

Řešením rovnice $(*)$ nazýváme každou funkci $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu I takovou, že

$$(\forall t \in I): \; F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0.$$

Příklady ODR

- $y' = 5$
  Obecné řešení: $y(t) = 5t + c$
- $y' = 3t^2$
  Obecné řešení: $y(t) = t^3 + c$
- $y' = y$
  Obecné řešení: $y(t) = ce^t$
- $y'' - 3y' + 2y = t^2$
  Obecné řešení: $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + \frac{1}{4}\left(2t^2 + 6t + 7\right)$
- $(y'')^2 - \sin(ty) + t^3 y' - 17t^5 = 0$
  Rovnici neumíme vyřešit.
- ...

Populační model – naivní

Růst populace je přímo úměrný aktuální velikosti populace.

Odpovídající ODR:

Označíme-li $y(t)$ velikost populace v čase t, dostaneme diferenciální rovnici

$$y' = ky$$

s tzv. počáteční podmínkou $y(0) = \alpha_0$, kde k je konstanta úměrnosti (související se schopností se množit) a α_0 je velikost populace v čase $t = 0$.

Řešení ODR:

$$y(t) = \alpha_0 e^{kt}$$

Rozepsané řešení problému $y' = ky,\ y(0) = \alpha_0$

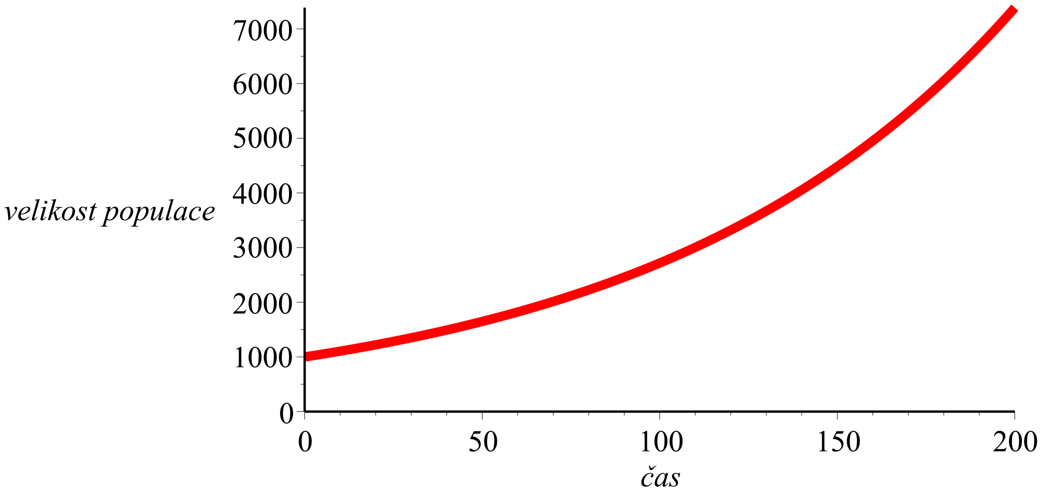
$$\begin{aligned} y' &= ky \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky \\ \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= k\,\mathrm{d}t \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int k\,\mathrm{d}t \\ \ln y &= kt + c \end{aligned}$$

Přihlédneme-li k počáteční podmínce $y(0) = \alpha_0$, dostaneme $c = \ln \alpha_0$. Následné odlogaritmování nám dává

$$y = \alpha_0 e^{kt}.$$

Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

$$\alpha_0 = 1000, \quad k = \frac{1}{100}$$



Radioaktivní rozpad

Rychlost rozpadu je přímo úměrná hmotnosti dosud nerozpadnuté radioaktivní látky.

Odpovídající ODR:

Označíme-li $y(t)$ hmotnost dosud nerozpadnuté radioaktivní látky v čase t, dostaneme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = -ky, \quad y(0) = \alpha_0,$$

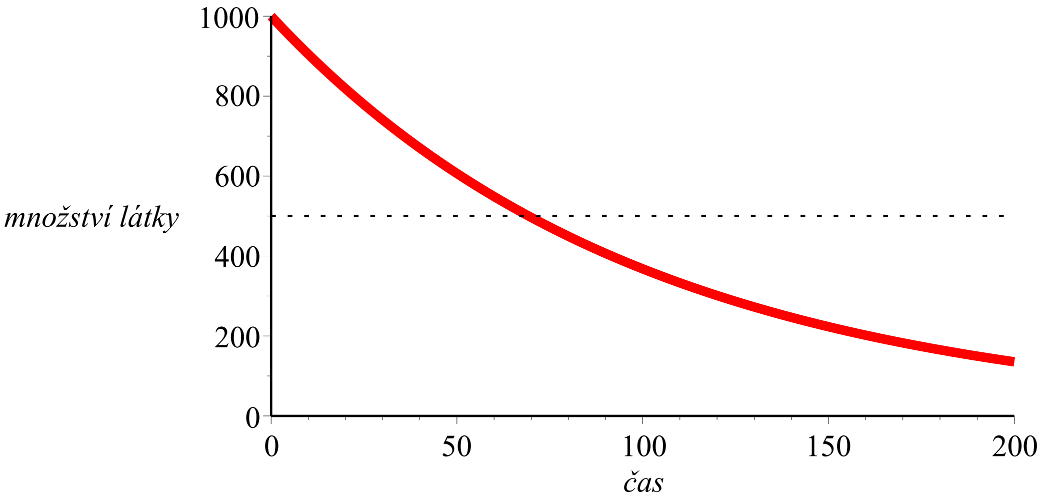
kde k je konstanta úměrnosti (související s poločasem rozpadu dané látky) a α_0 hmotnost radioaktivní látky v čase $t = 0$.

Řešení ODR:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-kt}$$

Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

$$\alpha_0 = 1000, \quad k = \frac{1}{100}$$



Otázka:

Jak souvisí konstanta k s poločasem rozpadu radioaktivní látky?

Populační model – vylepšený

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

$$y' = ky(r - y), \quad y(0) = \alpha_0$$

- $y = y(t)$ – velikost populace v čase t
- α_0 – velikost populace v čase $t = 0$
- k – konstanta související se schopností se množit
- r – maximální (dlouhodobě udržitelná) velikost populace

Řešení ODR:

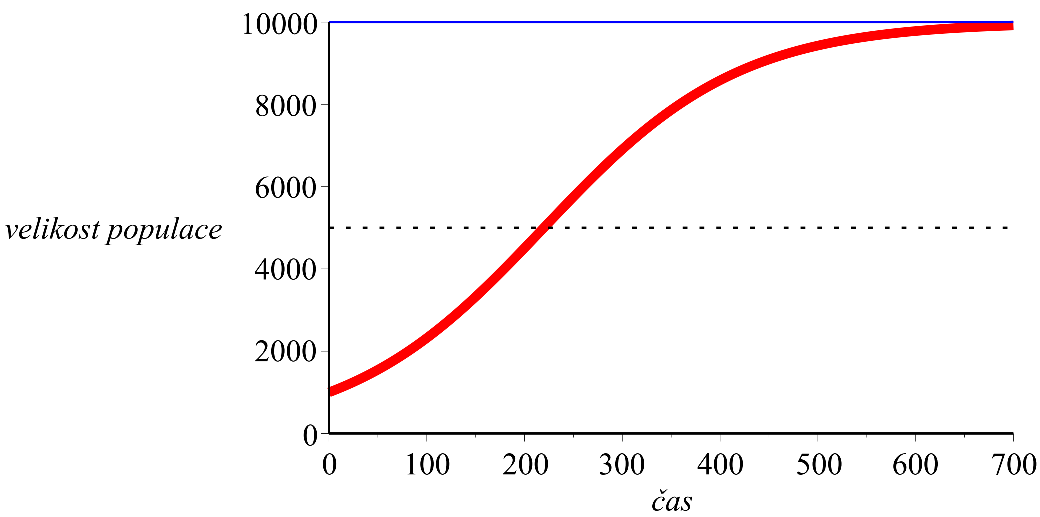
$$y(t) = \frac{\alpha_0 r}{\alpha_0 + e^{-rkt}(r - \alpha_0)}$$

Rozepsané řešení problému $y' = ky(r-y),\ y(0) = \alpha_0$

$$
\begin{aligned}
y' &= ky(r-y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky(r-y) \\
\frac{r}{y(r-y)}\,\mathrm{d}y &= rk\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{r}{y(r-y)}\,\mathrm{d}y &= \int rk\,\mathrm{d}t \\
\ln\left|\frac{y}{r-y}\right| &= rkt + \widetilde{c} \\
\frac{y}{r-y} &= ce^{rkt} \\
y &= \frac{cr}{c+e^{-rkt}} \\
y &= \frac{\alpha_0 r}{\alpha_0 + e^{-rkt}(r-\alpha_0)}
\end{aligned}
$$

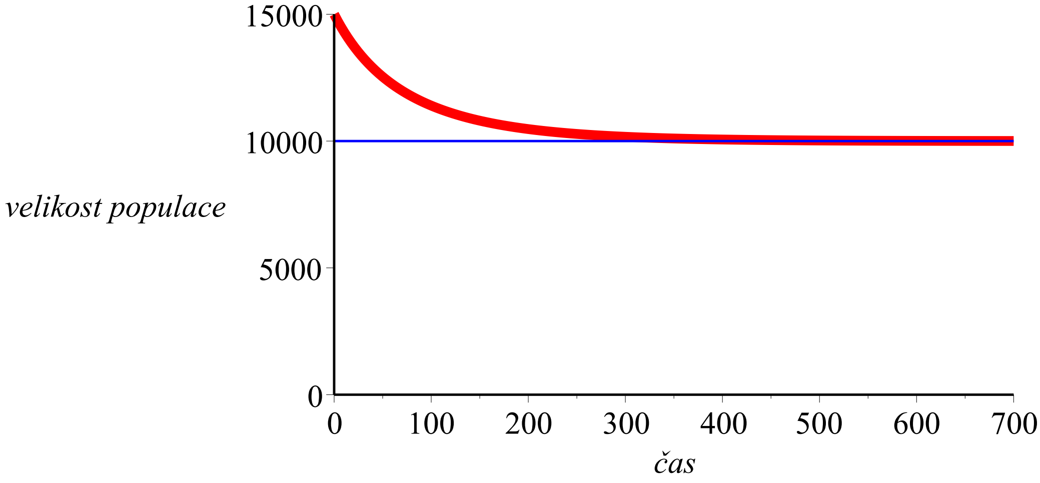
Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

$$\alpha_0 = 1000, \quad k = 10^{-6}, \ r = 10000$$



Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

$$\alpha_0 = 15000, \quad k = 10^{-6}, \quad r = 10000$$



Otázka:

Jak by vypadalo řešení v případě $\alpha_0 = r = 10000$?

Volný pád bez odporu prostředí

Nepůsobí-li na těleso žádná odporová síla, je jeho zrychlení po celou dobu volného pádu rovno tíhovému zrychlení g.

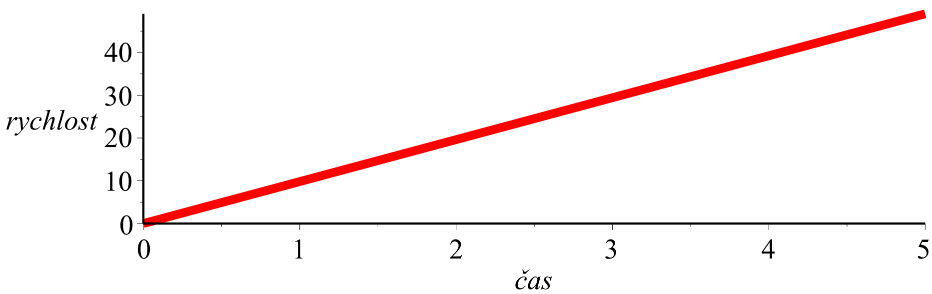
Budeme přitom předpokládat, že g je konstantní.

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

$$v' = g, \quad v(0) = 0$$

Řešení ODR:

$$v(t) = gt$$



Volný pád s odporem prostředí

Odporová síla je přímo úměrná hustotě prostředí (v našem případě vzduchu) a druhé mocnině rychlosti tělesa, tj.

$$F_{\mathrm{odp}} = k\varrho v^2,$$

kde k je konstanta specifická pro padající těleso.

Označme si $v(t)$ rychlost padajícího tělesa v čase t. Uvědomíme-li si, jaké na těleso o hmotnosti m působí síly, dostaneme (pro výslednou sílu F) vztah

$$F = F_g - F_{\mathrm{odp}}, \quad \text{ze kterého získáme}$$
$$mv' = mg - k\varrho v^2.$$

Poslední rovnici lze psát ve tvaru

$$v' = g - \frac{k\varrho}{m} v^2.$$

Volný pád s odporem prostředí

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

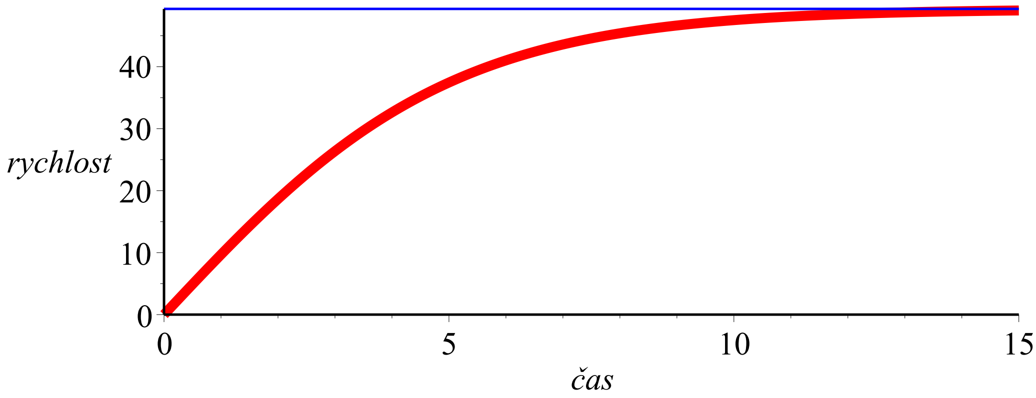
$$v' = g - \frac{k\varrho}{m} v^2, \quad v(0) = 0$$

Řešení ODR:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k\varrho}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{\frac{k\varrho g}{m}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{k\varrho g}{m}}} + 1}$$

Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

$$m = 80, \quad \varrho = 1,29, \quad k = 0,25, \quad g = 9,81$$



Rychlost se bude limitně blížit k hodnotě $v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k\varrho}}$ (v našem případě necelých 50 metrů za sekundu) a za 15 sekund urazí těleso vzdálenost necelých 570 metrů.

Při volném pádu bez odporu prostředí by to bylo více než 1100 metrů.

Felix Baumgartner

14. října 2012 v Roswellu v americkém státě Nové Mexiko vystoupal v návratové kapsli nesené héliovým balónem do výšky kolem 39 000 m, odkud seskočil. Po více než čtyřech minutách volného pádu otevřel padák a bezpečně přistál. Kapsle zaznamenávající důležitá data se také odpoutala od balónu a přistála na vlastním padáku. Baumgartner byl vybaven speciálním oblekem, o který projevila zájem i NASA, která by jej ráda využila pro případnou záchranu astronautů. Akci sponzorovala společnost Red Bull.

Felix Baumgartner překonal svým výkonem tři rekordy:

- nejvyšší dosažená výška balónu s lidskou posádkou – cca. 39 002 m (dosavadní rekord: 34 668 m, Malcolm D. Ross a Victor E. Prather, 1961)
- skok z nejvyšší výšky nad zemským povrchem – cca. 39 000 m (dosavadní rekord: 31 332 m, Joseph Kittinger, 1960)
- nejvyšší dosažená rychlost při volném pádu – cca. 1 170 km/h (dosavadní rekord: 988 km/h, rovněž Joseph Kittinger, 1960)

Felix Baumgartner

Volný pád s odporem prostředí (ϱ se mění)

Pokud bychom uvažovali volný pád z velkých výšek, kde je podstatně nižší hustota vzduchu, museli bychom náš model upravit.

Lze ukázat, že hustota vzduchu závisí (při stálé teplotě) na nadmořské výšce h podle vztahu

$$\varrho(h) = \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}},$$

kde ϱ_0 je hustota vzduchu na hladině moře a p_0 je atmosférický tlak na hladině moře. Tento vztah obdržíme vyřešením vhodné ODR.

Představme si, že skočíme z výšky h a vzdálenost, kterou urazíme za čas t, si označíme jako $s(t)$. Pak pro okamžitou rychlost v čase t platí

$$v(t) = s'(t)$$

a pro okamžité zrychlení v čase t

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Volný pád s odporem prostředí ($\varrho(h) = \varrho_0 e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}$)

Diferenciální rovnici

$$v' = g - \frac{k\varrho}{m} v^2$$

je třeba poupravit (neboť ϱ se v závislosti na čase mění).

Dostaneme rovnici druhého řádu

$$s'' = g - \frac{k\varrho_0}{m} e^{-\frac{\varrho_0 g (h-s)}{p_0}} (s')^2$$

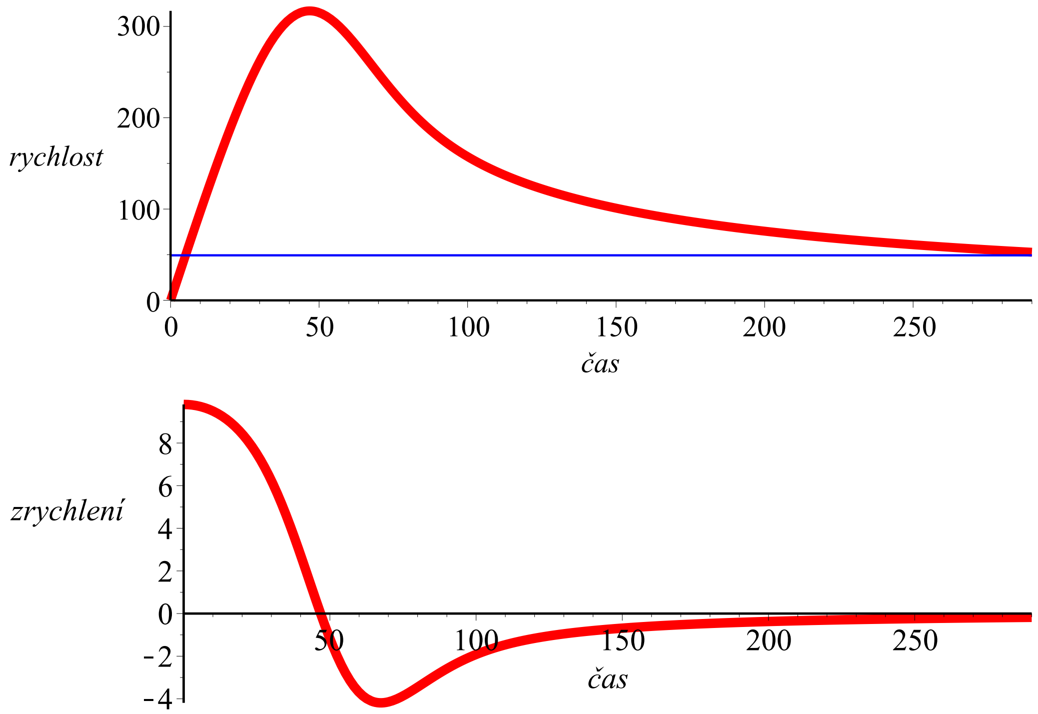
s počátečními podmínkami

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

Pokud bychom chtěli takovouto rovnici řešit analyticky, dostali bychom se do problémů. Proto přistoupíme k numerickému řešení.

Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

$$m = 80, \quad \varrho_0 = 1,29, \quad p_0 = 101325, \quad k = 0,25, \quad g = 9,81, \quad h = 39000$$



Kmitání tělesa na pružině

Diferenciální rovnice s počátečními podmínkami:

$$ms'' = -ks - rs', \quad s(0) = -s_0, \; s'(0) = 0$$

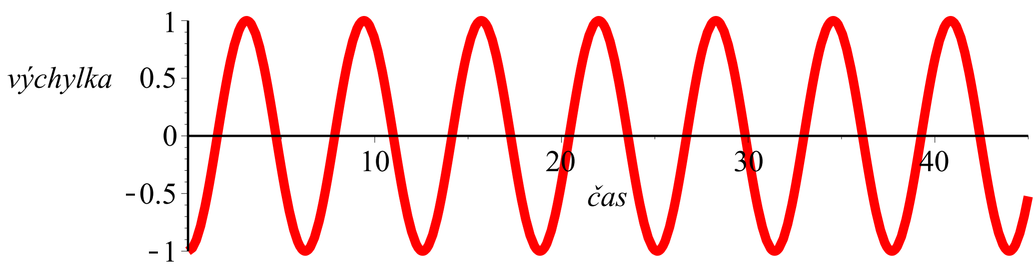
- $s = s(t)$ – výchylka v čase t
- s_0 – počáteční výchylka
- m – hmotnost tělesa
- k – tuhost pružiny
- r – konstanta související s odporem prostředí

Řešení ODR:

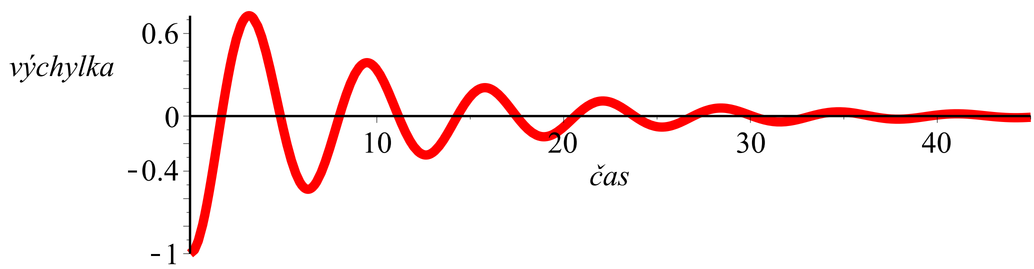
Chování řešení je závislé na vzájemném vztahu parametrů m, k a r.

Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů $(0 \leq r < 2\sqrt{mk})$

$$m = 1, \quad k = 1, \quad r = 0$$

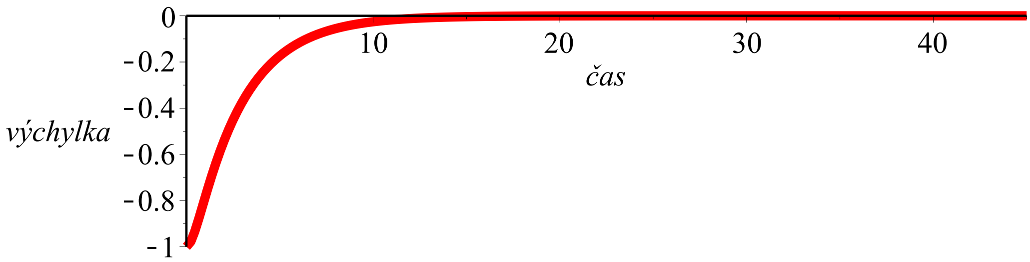


$$m = 1, \quad k = 1, \quad r = \frac{1}{5}$$



Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů $(r \geq 2\sqrt{mk})$

$$m = 1, \quad k = 1, \quad r = 3$$



V tomto případě vůbec k oscilacím nedochází.

Bonus – šnek na gumě

Uvažujme dokonale pružnou gumu délky d, která je připevněna jedním koncem ke zdi. Na druhý konec položíme šneka a necháme ho lézt směrem ke zdi. Šnek je přitom schopen se pohybovat rychlostí v. Zároveň druhý konec gumy chytneme a natahujeme ho konstantní rychlostí w směrem od zdi. Určete, zda (a za jakých předpokladů) šnek doleze ke zdi. V kladném případě také určete čas, za který to šnek zvládne.

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

Označíme-li si $s(t)$ jako vzdálenost šneka od zdi v čase t, dostaneme

$$s' = \frac{w}{d + wt} s - v, \quad s(0) = d.$$

Řešení ODR:

$$s(t) = \left(t + \frac{d}{w}\right)\left(v \ln d + w - v \ln(wt + d)\right)$$

Šnek na gumě $\quad s(t) = \left(t + \frac{d}{w}\right)\left(v \ln d + w - v \ln(wt + d)\right)$

Šnek doleze ke zdi, pokud existuje $t_0 > 0$ takové, že $s(t_0) = 0$.

Poměrně snadno se lze přesvědčit, že takové t_0 existuje. Dokonce víme, že

$$t_0 = \frac{d}{w}\left(e^{\frac{w}{v}} - 1\right),$$

z čehož plyne, že šnek ke zdi doleze za všech okolností.

Například pro konkrétní hodnoty

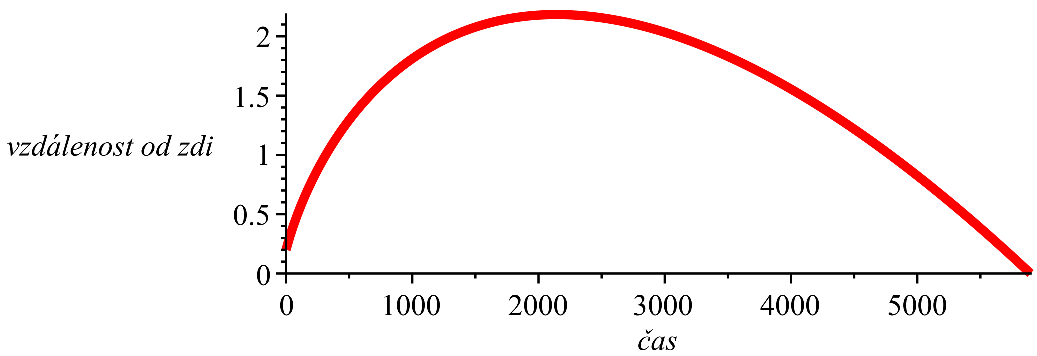
$$d = 20\,\mathrm{cm}, \;\; v = 1\,\mathrm{mm/s}, \;\; w = 5\,\mathrm{mm/s}$$

dostaneme

$$t_0 \doteq 5897\,\mathrm{s} \qquad (1 \text{ hodina } 38 \text{ minut } 17 \text{ sekund}).$$

Ilustrace pro konkrétní hodnoty parametrů

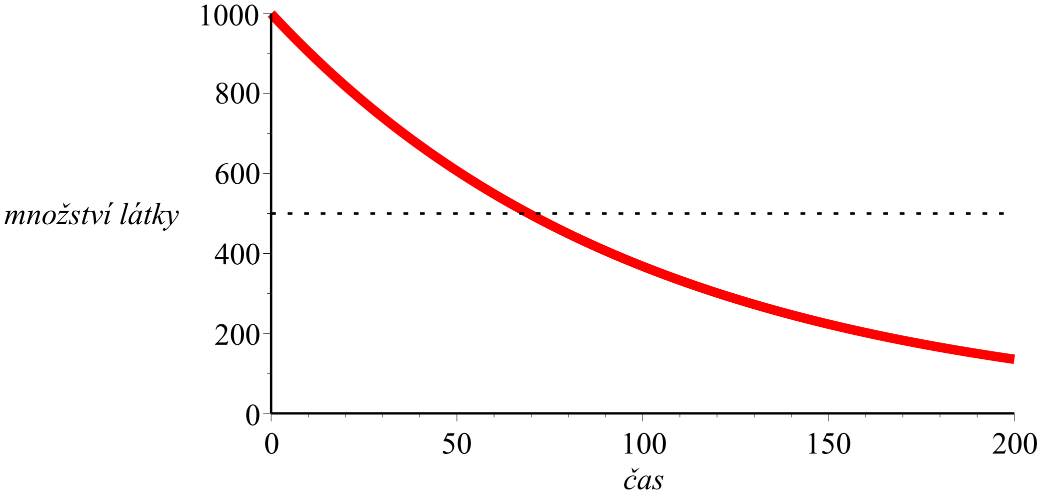
$$d = 20\,\mathrm{cm}, \;\; v = 1\,\mathrm{mm/s}, \;\; w = 5\,\mathrm{mm/s}$$



ŠKOMAM Cup

Radioaktivní rozpad:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-kt}$$



Otázka:

Jak souvisí konstanta k s poločasem rozpadu radioaktivní látky?

Odkazy

- https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ma3_bc.pdf
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Odpor_prostředí
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Atmosférický_tlak
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Felix_Baumgartner

Děkuji za pozornost.