Ř+A+D+Y+...

Jiří Bouchala

VÝPOČETNÍ A APLIKOVANÁ MATEMATIKA

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

18. ledna 2023, přednáška v semináři Škomam

- n-karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet

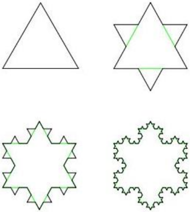
- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka

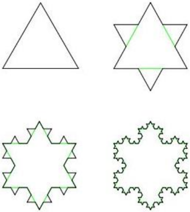
- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,
  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka



- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

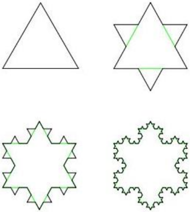


$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka



$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

Domácí úkol.
Vypočtěte obsah a délku hranice $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)$.

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,\textcolor{red}{1415}926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,\,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,\,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,\,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3, 1415926\ldots$ počet Krokových dcer

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots$$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2}$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

$$s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

$$s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$$

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - s \;\Rightarrow\; s = \tfrac{1}{2}$$

$$s \;= ?$$

Definice.

<u>Řadou</u> (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Definice.

<u>Řadou</u> (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme <u>n-tým členem řady</u> (1),

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1).

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>součtem řady</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>součtem řady</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1) <u>konverguje</u>.

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

- Buď $q \in (-1,1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

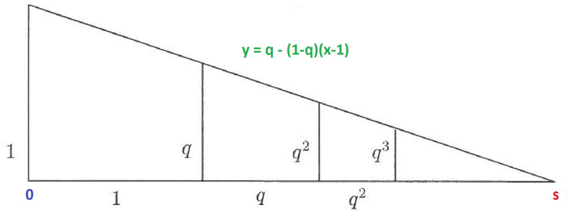
$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q},$$

a proto

$$\color{red}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$



- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu,

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

a proto

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}n=\infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$\color{red}{s} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$\color{red}{s}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\color{red}{\infty}.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 9 \cdot 1 + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \ldots =$$

- Uvažujme řadu
$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$
Pak
$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 9 \cdot 1 + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \ldots =$$
$$= 9 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots\right) = 90.$$

- Nyní uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p}$$

- Nyní uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

- Nyní uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

Dá se ukázat, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

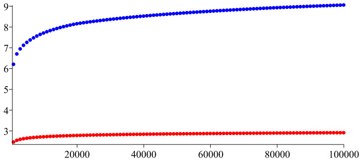
Varování.

Varování. Nedělejme ukvapené závěry jen na základě numerických experimentů.

Varování. Nedělejme ukvapené závěry jen na základě numerických experimentů. Na obrázku jsou znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p}$$

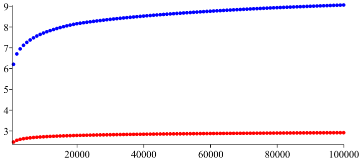
pro $n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}$.



Varování. Nedělejme ukvapené závěry jen na základě numerických experimentů. Na obrázku jsou znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1\\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p}$$

pro $n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}$.

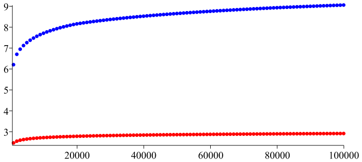


Obrázek nás svádí k domněnce, že $\displaystyle\sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} < \sum_{\substack{n=1\\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}$,

Varování. Nedělejme ukvapené závěry jen na základě numerických experimentů. Na obrázku jsou znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p}$$

pro $n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}$.



Obrázek nás svádí k domněnce, že $\displaystyle\sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} < \sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}$,

ale my už víme, že

$$\sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 90 < +\infty = \sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p}.$$

- Dá se ukázat, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=$$

- Dá se ukázat, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Dá se ukázat, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots = \ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Současně ale taky platí, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

- Dá se ukázat, že
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$
- Současně ale taky platí, že
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2 \doteq 1.039720771.$$

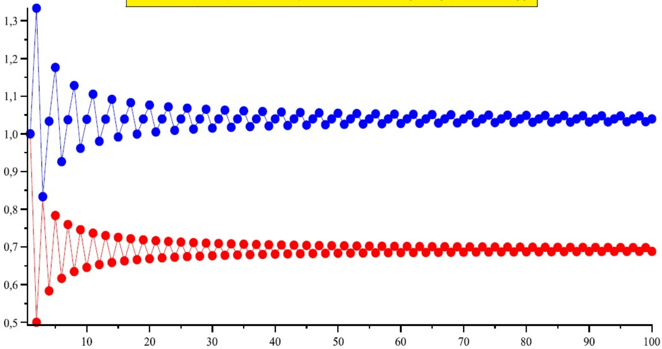
- Dá se ukázat, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Současně ale taky platí, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2 \doteq 1.039720771.$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):



Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

Věta.

Nechť
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

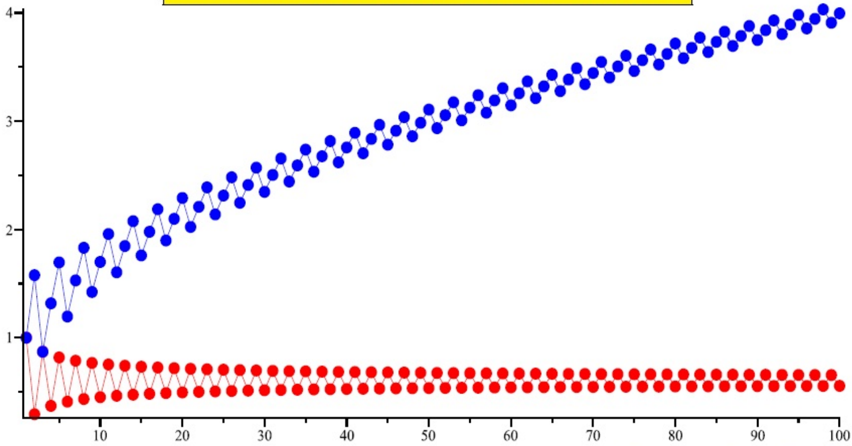
Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$
- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

(Vhodným přerovnáním neabsolutně konvergentní řady lze získat jakýkoliv výsledek.)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\dots \neq 1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\dots$$

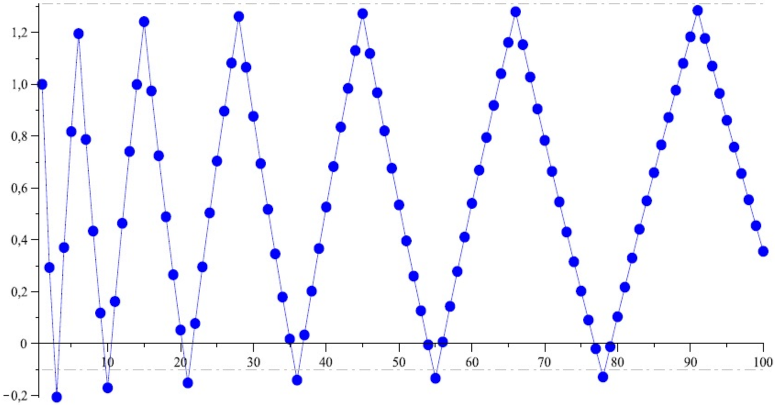
Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



(další přerovnání řady $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\dots$)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{17}}-\dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi \; : \; \mathbb{N} \to \mathbb{N} \;\; \text{bijekce.}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

(Součet absolutně konvergentní řady a řady vzniklé jejím přerovnáním je stejný.)

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \dots$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

  $\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots$

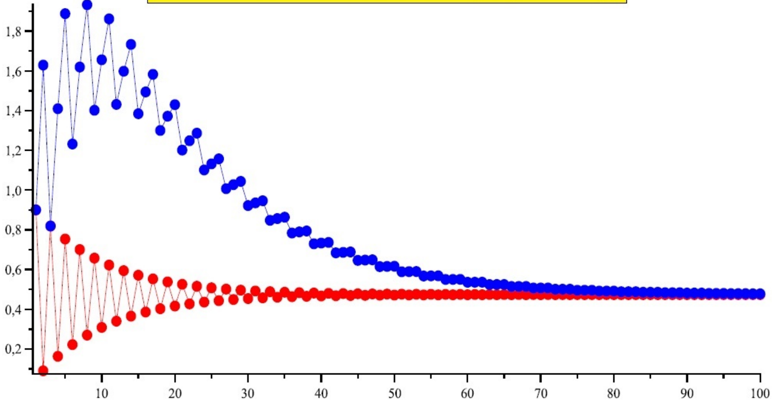
- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

  $\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots = \frac{9}{19}$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots = \frac{9}{19}$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):



Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+...
  Svět matematických aplikací II, JČMF, 2020

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

E. Calda, HgS
Základy patamatematiky
Prometheus, Praha 2005

J. Bouchala, P. Vodstrčil
Ř+A+D+Y+...
Svět matematických aplikací II, JČMF, 2020

J. Bouchala, P. Vodstrčil
O přerovnávání řad
http://am.vsb.cz/osma

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

E. Calda, HgS
Základy patamatematiky
Prometheus, Praha 2005

J. Bouchala, P. Vodstrčil
Ř+A+D+Y+...
Svět matematických aplikací II, JČMF, 2020

J. Bouchala, P. Vodstrčil
O přerovnávání řad
http://am.vsb.cz/osma

P. Vodstrčil
... ten, co umí (nejen) s Maplem
Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

E. Calda, HgS
Základy patamatematiky
Prometheus, Praha 2005

J. Bouchala, P. Vodstrčil
Ř+A+D+Y+...
Svět matematických aplikací II, JČMF, 2020

J. Bouchala, P. Vodstrčil
O přerovnávání řad
http://am.vsb.cz/osma

P. Vodstrčil
... ten, co umí (nejen) s Maplem
Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)

MatematiKant
(hlava v oblacích
a nohy pevně na zemi)