

Obyčejné diferenciální rovnice v neobyčejném pojetí aneb Zase nám lhali...

D. Ulčák, B. Krajc a kolegyně M. Sadowská a E. Poláchová

Katedra Aplikované Matematiky, FEI VŠB TUO

19. 1. 2023

Poděkování

Děkujeme za Vaši následující pozornost !

O rychlosti a derivaci

Průměrná rychlost s jakou se mění veličina v časovém rozmezí $[c, t]$:

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c}.$$

Okamžitá rychlost v čase:

$$f'(c) = \lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}.$$

Aproximace (pro t blízka c a hezké funkce):

$$f'(c) \doteq \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \implies f(t) \doteq f(c) + f'(c) \cdot (t - c).$$

Model šíření (absolutní a ihned uvěřitelné) pravdy

Zkoumejme šíření pravdivého výroku \mathcal{V} mezi skupinou lidí. Populaci o velkém a konstantním množství lidí rozdělíme do dvou skupin.

První skupina \mathcal{S} o (velkém) počtu S lidí představuje populaci, které se s tvrzením \mathcal{V} dosud neseznámila.

Druhá skupina \mathcal{I} o (velkém) počtu I lidí jsou lidé, kteří se výrok \mathcal{V} přijali za pravdivý. Tedy stručně:

\mathcal{S} ... Strašně neinformovaní (S)

\mathcal{I} ... Indoktrinovaní (Informovaní) (I)

Symbole $S'(t)$, $I'(t)$ pak znamenají rychlosti s jakou se mění množství lidí ve skupinách \mathcal{S} , \mathcal{I} v čase t .

Úvaha 1

Budeme předpokládat, že každý člověk v daném čase osloví jen jisté procento celkové populace lidí.

Proto, čím více lidí je informováno, tím rychleji klesá počet neinformovaných lidí.

Podobně, čím méně je dosud neinformovaných lidí v populaci, tím pomaleji se mění jejich počet S .

Zjednodušeně tedy budeme předpokládat, že přírůstek (rychlost) s jakou se mění S je přímo úměrný počtu S těchto lidí a počtu I lidí, kteří jsou informovaní:

$$S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t).$$

Konstanta úměrnosti $\beta \in \mathbb{R}^+$ představuje koeficient „doslechu“.

Nechť $\beta = 10^{-4}$. Je-li například v daném čase $S = 10^5$, $I = 10^2$, pak dojde k úbytku 10^3 neinformovaných lidí. Podobně (opět $\beta = 10^{-4}$):

$$S(t) = 10^6, I(t) = 10^2 \implies S'(t) = -10^3.$$

Model 1

$$S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t)$$

$$I'(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t)$$

Protože všechny veličiny sledujeme ve stejném čase, budeme psát stručněji jen:

$$S' = -\beta \cdot S \cdot I$$

$$I' = \beta \cdot S \cdot I$$

Model šíření (absolutní ale netriviální) pravdy

Zkoumejme nyní opět šíření pravdivého výroku \mathcal{V} mezi skupinou lidí. Populaci o velkém a konstantním množství lidí tentokrát rozdělíme do tří skupin. První skupina \mathcal{S} o (velkém) počtu S lidí představuje populaci, které se s tvrzením \mathcal{V} dosud neseznámila. Druhá skupina \mathcal{I} o (velkém) počtu I lidí jsou lidé, kteří se výrok \mathcal{V} přijali za pravdivý. A konečně, třetí skupina \mathcal{R} o (velkém) počtu R představuje populaci, která nevěří, že \mathcal{V} je pravda. Tedy stručně:

\mathcal{S} ... Strašně neinformovaní (S)

\mathcal{I} ... Indoktrinovaní (I)

\mathcal{R} ... Rebelové (R)

Úvaha 2

Opět budeme předpokládat, že každý člověk v daném čase osloví jen jisté procento celkové populace lidí.

Navíc budeme předpokládat, že pouze dané procento z lidí, kteří se dozví danou informaci pozná, že jde o pravdivou informaci.

Proto, čím více lidí je informováno, tím rychleji klesá počet neinformovaných lidí S .

Podobně, čím méně je dosud neinformovaných lidí v populaci, tím pomaleji se mění jejich počet S .

Podobně můžeme postupovat i u I , R .

Opět budeme zjednodušeně předpokládat, že všechny uvažované závislosti lze popsat pomocí přímých úměr.

Model 2

$$S' = -\beta \cdot S \cdot I$$

$$I' = \rho \cdot \beta \cdot S \cdot I$$

$$R' = (1 - \rho) \cdot \beta \cdot S \cdot I$$

β ... koeficient doslechu

ρ ... koeficient uvěřitelnosti

Připomeňme, že β odpovídá procentu lidí, kteří se danou informací doslechnou, a ρ bude odpovídat podílu lidí, kteří dané informace uvěří.

Schéma 1

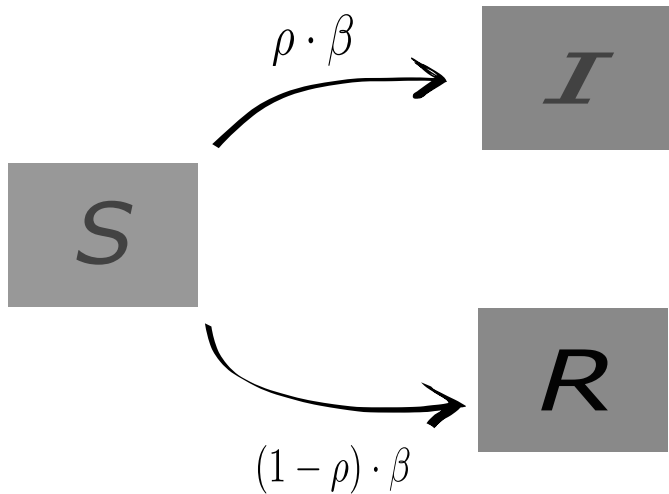


Figure: Interakce 1

Model šíření pomluvy

Zkoumejme nyní opět šíření **nepravdivého** výroku \mathcal{V} mezi skupinou lidí. Populaci o velkém a konstantním množství lidí tentokrát rozdělíme do tří skupin. První skupina \mathcal{S} o (velkém) počtu S lidí představuje populaci, které se s tvrzením \mathcal{V} dosud neseznámila. Druhá skupina \mathcal{I} o (velkém) počtu I lidí jsou lidé, kteří se výrok \mathcal{V} přijali za pravdivý. A konečně, třetí skupina \mathcal{R} o (velkém) počtu R představuje populaci, která nevěří, že \mathcal{V} je pravda. Tedy stručně:

\mathcal{S} ... Strašně neinformovaní (S)

\mathcal{I} ... Indoktrinovaní (I)

\mathcal{R} ... Rebelové (R)

Schéma 2

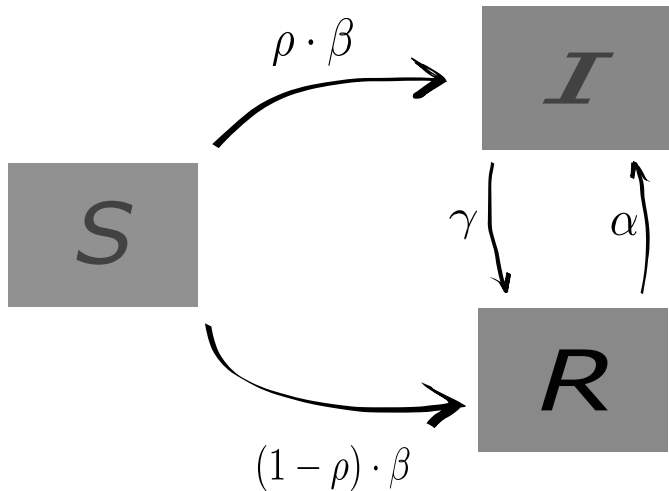


Figure: Interakce 2

Model 3

$$S' = -\beta \cdot S \cdot I$$

$$I' = \rho \cdot \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I + \alpha \cdot R$$

$$R' = (1 - \rho) \cdot \beta \cdot S \cdot I + \gamma \cdot I - \alpha \cdot R$$

Parametry:

β ... koeficient doslechu

ρ ... koeficient uvěřitelnosti

γ ... koeficient zmoudření

α ... koeficient zhloupnutí

Interpretace systému pro modely šíření epidemií (SIR)

Jiná interpretace předchozí soustavy diferenciálních rovnic:

\mathcal{S} ... část, která se dosud nestřetla s nákazou (Susceptible)

\mathcal{I} ... infikovaní (Infected)

\mathcal{R} ... zotavení (Recovered)

Parametry:

β ... charakteristika rozšiřování viru

ρ ... charakteristika náchylnosti k onemocnění při styku s virem

γ ... charakteristika možnosti uzdravení

α ... charakteristika možnosti opětovného onemocnění

Zdroje:

1. J. Deters, I. P. Aguiar, J. Feuerborn: *The Mathematics of Gossip*, CODEE Journal, Volume 12, Article 7, 2-13-2019

(https://www.researchgate.net/publication/332006650_The_Mathematics_of_Gossip/link/5ca38e5692851c8e64aeac9/download)

2. P. Beremlijski, M. Béreš, R. Cosić, M. Sadowská: Počítačová cvičení, ŠKOMAM 2021

(http://am-nas.vsb.cz/skomam/2021/cviceni/SKOMAM_2021_cviceni.pdf)