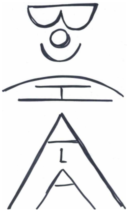
O reálné a imaginární matematice

Jiří Bouchala



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

23. ledna 2024, přednáška v semináři Škomam

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ … $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ … $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ … $x + 2 = 1$;

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ … $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ … $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ … $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ … $x^2 - 2 = 0$;

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ... $x^2 + 1 = 0$.

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ... $x^2 + 1 = 0$.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ... $x^2 + 1 = 0$.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Slovník cizích slov:

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ... $x^2 + 1 = 0$.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Slovník cizích slov:

- reálný ... skutečně existující, skutečný;

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ... $x + 2 = 5$;
- $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ... $x + 2 = 1$;
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ... $2x + 3 = 0$;
- $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ... $x^2 + 1 = 0$.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Slovník cizích slov:

- reálný ... skutečně existující, skutečný;
- imaginární ... vymyšlený, pomyslný, domnělý, neskutečný.

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\mathrm{Re}\, z$ resp. $\mathrm{Im}\, z$.

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

 číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru
$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$
číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.
- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.
- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left[\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\right]$.

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

  číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.

- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left[\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\right]$.

- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x,\ y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

 číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.

- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj. $z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow\ \left[\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \ \wedge\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\right]$.

- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru
$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$
číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.
- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.
- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left[\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\right]$.
- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.
- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left[\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\right]$.
- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

- Komplexní čísla jsou čísla tvaru

$$z = x + iy, \text{ kde } x,\ y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

  číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$.

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná. Reálná čísla jsou charakterizovaná podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$.

- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left[\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \ \wedge\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2\right]$.

- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

  a je-li $z_2 \neq 0 = 0 + 0i$, definujeme taky

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \cdot (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2).$$

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1 = 5+\sqrt{-15}$, $x_2 = 5-\sqrt{-15}$;

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1 = 5+\sqrt{-15}$, $x_2 = 5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10 - x) = 40$ ... $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$, $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x + \sqrt{-1}\, y$;

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x+\sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x+\sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";
- Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), . . . ;

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x+\sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";
- Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), ...;
- Leonhard Euler (1707-1783):
  označení imaginární jednotky symbolem "i"(1777);

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x+\sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";
- Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), . . . ;
- Leonhard Euler (1707-1783):
  označení imaginární jednotky symbolem "i"(1777);
- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), *A new proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree* (1799):

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x+\sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";
- Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), . . . ;
- Leonhard Euler (1707-1783):
  označení imaginární jednotky symbolem "i"(1777);
- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), *A new proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree* (1799): důkaz základní věty algebry;

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x)=40$ ... $x_1=5+\sqrt{-15}$, $x_2=5-\sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x+\sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";
- Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), . . . ;
- Leonhard Euler (1707-1783):
  označení imaginární jednotky symbolem "i" (1777);
- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), *A new proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree* (1799): důkaz základní věty algebry;
- Louis Augustin Cauchy (1789–1857);
- Bernhard Riemann (1826–1866);
- Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \;\leftrightarrow\; \mathbb{R}^2 \quad \ldots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \;\leftrightarrow\; \mathbb{R}^2 \quad \ldots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x+iy)+(u+iv) = (x+u)+i(y+v) \leftrightarrow (x+u, y+v)$,

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \dots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \leftrightarrow (x + u, y + v)$,
- $x(u + iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv)$,

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \ldots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \leftrightarrow (x + u, y + v)$,
- $x(u + iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv)$,
- $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu) \leftrightarrow (xu - yv, xv + yu)$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \dots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v) \leftrightarrow (x+u, y+v),$
- $x(u+iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv),$
- $(x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv + yu) \leftrightarrow (xu - yv, xv + yu)$

$$\Big[r(\cos t + i\sin t) \cdot \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \dots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \leftrightarrow (x + u, y + v),$
- $x(u + iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv),$
- $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu) \leftrightarrow (xu - yv, xv + yu)$

$$\Big[r(\cos t + i\sin t) \cdot \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= r\varrho\Big((\cos t\cos\alpha - \sin t\sin\alpha) + i(\cos t\sin\alpha + \sin t\cos\alpha)\Big) =$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

$$\mathbb{C} \ \leftrightarrow \ \mathbb{R}^2 \quad \ldots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \leftrightarrow (x + u, y + v)$,
- $x(u + iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv)$,
- $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu) \leftrightarrow (xu - yv, xv + yu)$

$$\Big[r(\cos t + i\sin t) \cdot \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= r\varrho\Big((\cos t\cos\alpha - \sin t\sin\alpha) + i(\cos t\sin\alpha + \sin t\cos\alpha)\Big) =$$
$$= r\varrho\big(\underbrace{\cos(t+\alpha) + i\sin(t+\alpha)}\big)\Big]$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

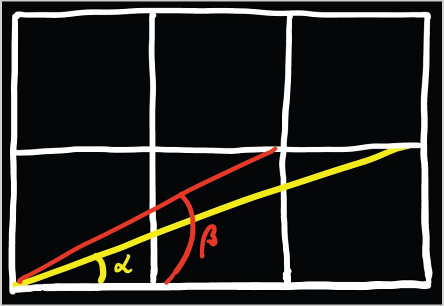
$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \ldots \quad x + iy \leftrightarrow (x, y);$$

- $(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v) \leftrightarrow (x+u, y+v)$,
- $x(u+iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv)$,
- $(x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv + yu) \leftrightarrow (xu - yv, xv + yu)$

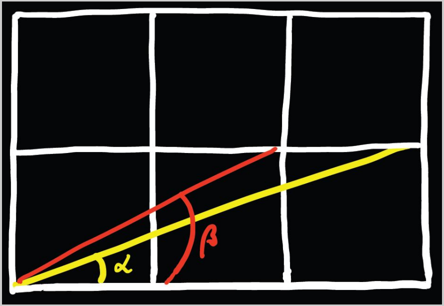
$$\Big[r(\cos t + i\sin t) \cdot \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= r\varrho\Big((\cos t\cos\alpha - \sin t\sin\alpha) + i(\cos t\sin\alpha + \sin t\cos\alpha)\Big) =$$
$$= r\varrho\big(\underbrace{\cos(t+\alpha) + i\sin(t+\alpha)}\big)\Big]$$

… **otočení.**

Příklad 1.

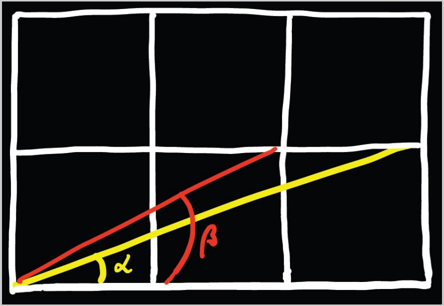


Příklad 1.

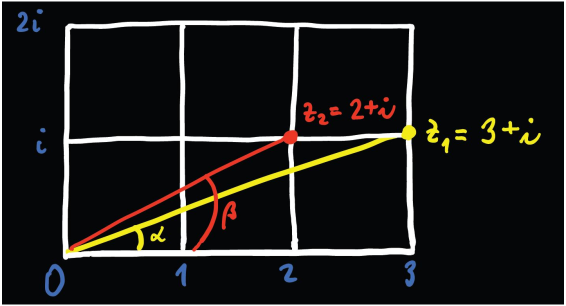


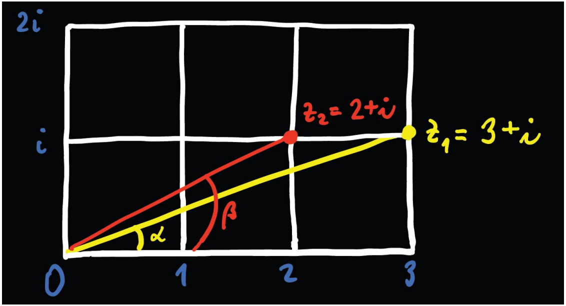
Určete $\alpha + \beta$

Příklad 1.

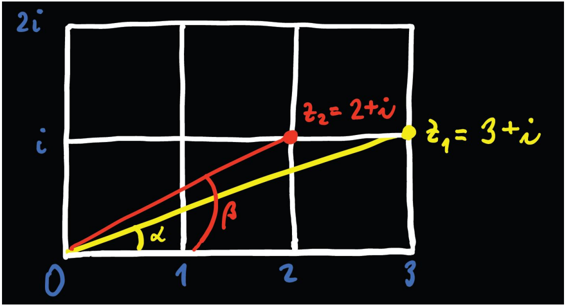


Určete $\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

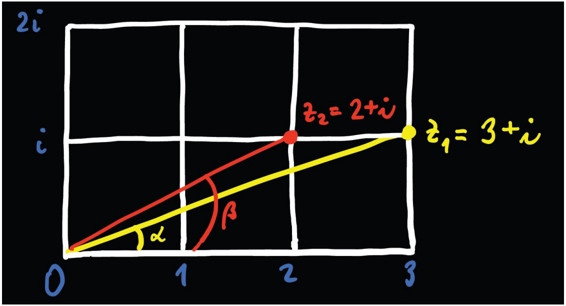

2i
i
0
1
2
3
z₂ = 2+i
z₁ = 3+i
α
β



$$z_1 z_2 = (3+i)(2+i) = 5+5i$$



$$z_1 z_2 = (3+i)(2+i) = 5 + 5i = \sqrt{50}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$



$$z_1 z_2 = (3+i)(2+i) = 5+5i = \sqrt{50}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

a proto

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = x + iy$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N},\ \ z^n = ?$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$n \in \mathbb{N},\ \ z^n = ?$$

$$z^n = (x + iy)^n = \ldots$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N},\ \ z^n = ?$$

$$z^n = (x+iy)^n = \ldots \ \ = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n =$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N}, \; z^n = ?$$

$$z^n = (x + iy)^n = \ldots \; = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad z^n = ?$$

$$z^n = (x + iy)^n = \ldots \quad = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N},\quad z^n = ?$$

$$z^n = (x+iy)^n = \dots \quad = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

Řešení. Hledejme z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N},\ \ z^n = ?$$

$$z^n = (x+iy)^n = \dots \quad = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

Řešení. Hledejme z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pak vlastně řešíme rovnici

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = 1$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad z^n = ?$$

$$z^n = (x+iy)^n = \dots \quad = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

Řešení. Hledejme z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pak vlastně řešíme rovnici

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N},\ \ z^n = ?$$

$$z^n = (x+iy)^n = \dots \ \ = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

Řešení. Hledejme z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pak vlastně řešíme rovnici

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = 1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0).$$

Odtud již snadno plyne, že $z^n = 1$ právě tehdy, je-li $|z| = 1$ a současně existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $n\varphi = 0 + 2k\pi$,

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad z^n = ?$$

$$z^n = (x+iy)^n = \dots \quad = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

Řešení. Hledejme z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pak vlastně řešíme rovnici

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

Odtud již snadno plyne, že $z^n = 1$ právě tehdy, je-li $|z| = 1$ a současně existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $n\varphi = 0 + 2k\pi$, tzn.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\}$$

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$n \in \mathbb{N},\ \ z^n = ?$$
$$z^n = (x+iy)^n = \dots \ \ = \Big[|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

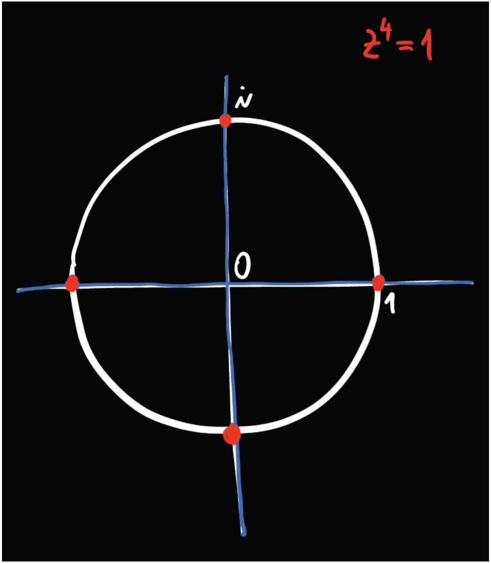
Příklad 2. Buď $n \in \mathbb{N}$. Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $z^n - 1 = 0$.

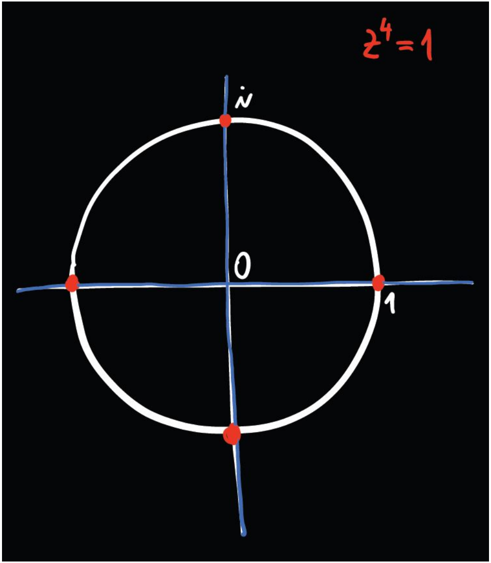
Řešení. Hledejme z ve tvaru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pak vlastně řešíme rovnici

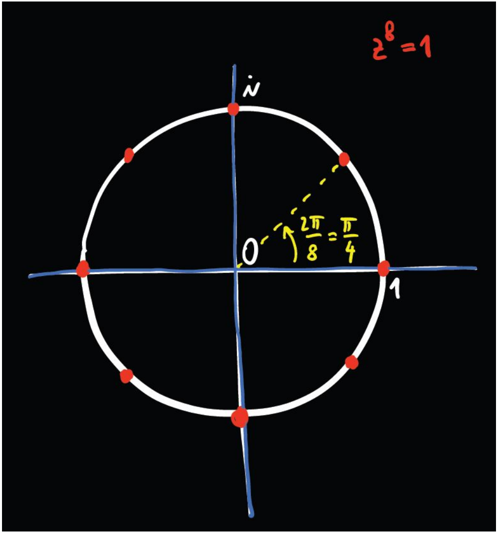
$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

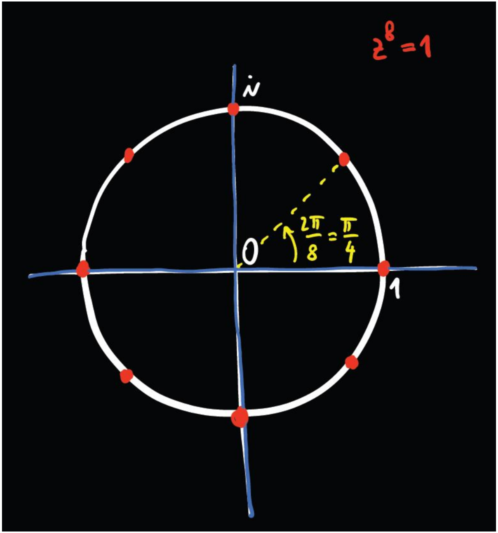
Odtud již snadno plyne, že $z^n = 1$ právě tehdy, je-li $|z| = 1$ a současně existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $n\varphi = 0 + 2k\pi$, tzn.

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\} =$$
$$= \bigcup_{k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}} \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\}.$$


z^4=1
i
0
1


$z^4=1$
i
0
1


$z^8=1$
i
0
$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$
1


$z^8 = 1$
i
0
$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$
1

Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy}$$

Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}} .$$

Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}} .$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Exponenciální funkci definujeme předpisem

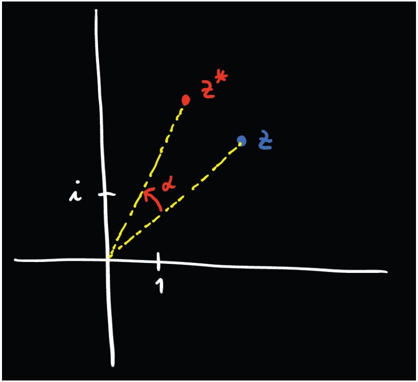
$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}} .$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| e^{i\varphi} .$$

Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}}.$$

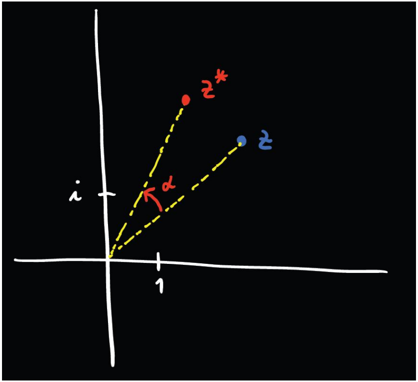
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

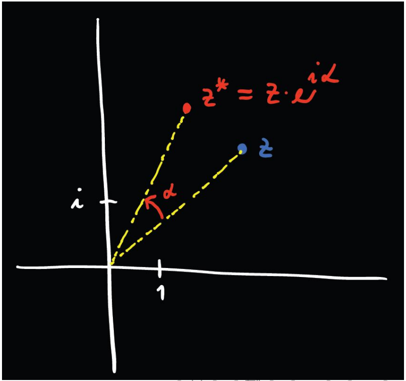


Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}} .$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} .$$

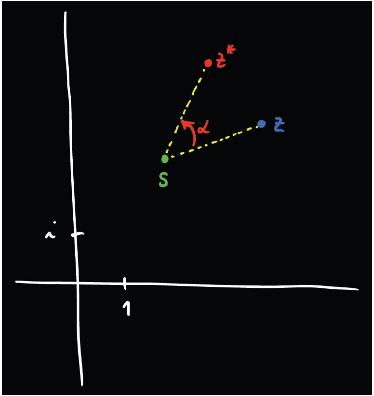




Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}}.$$

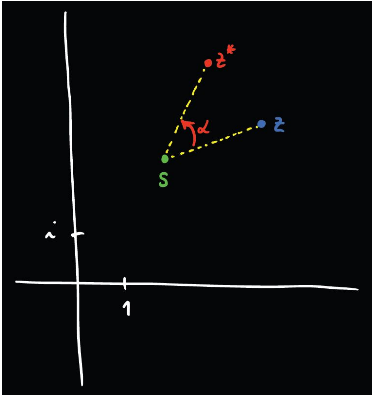
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

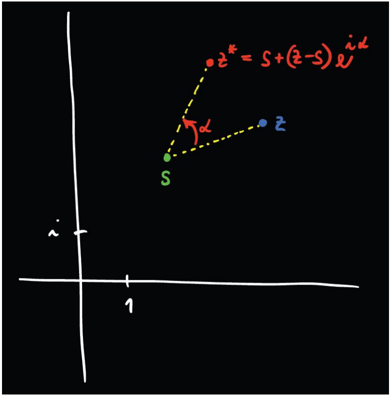


Exponenciální funkci definujeme předpisem

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \underbrace{\left(\cos y + i \sin y\right)}_{= e^{iy}}.$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$





Nejkrásnější matematická věta:

Nejkrásnější matematická věta:

$$\mathrm{e}^{i\pi} = -1.$$

Nejkrásnější matematická věta:

$$\boxed{\boxed{e^{i\pi}+1=0}}.$$

Dvoubarevná pravda

Literatura

- Jiří Veselý
  Komplexní analýza pro učitele
  Univerzita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum, Praha (2000)

- Jiří Bouchala
  Funkce komplexní proměnné
  www.am.vsb.cz/bouchala