Řešení (nejen) kubických rovnic

Lenka Přibylová

lenka.pribylova@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

ŠKOMAM 2024

Ostrava, 24.1. 2024

Začněme řešením (v reálném oboru) kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ kde } a,\ b,\ c, \in R,\ a \neq 0$$

Nejprve tuto kvadratickou rovnici v tzv. **obecném tvaru**

$$ax^2 + bx + c = 0 \ / : a$$

převedeme na **normovaný tvar**

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0.$$

První dva členy "doplníme na čtverec"

$$\underbrace{\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right)} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Obdržíme

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Po převedení posledních dvou členů na pravou stranu již lehce vyjádříme známý vzorec pro kořeny $x_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Kořeny $x_{1,2}$ lze nalézt v oboru reálných čísel za předpokladu, že diskriminant kvadratické rovnice je nezáporný.

Příklad 1.

Řešte v R:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Řešení: První dva členy doplníme na čtverec

$$\underbrace{(x^2 + 2x + 1)} - 1 - 3 = 0$$

$$(x+1)^2 - 4 = 0$$

$$(x+1)^2 = 4$$

Zavedeme substituci
y=$(x+1)$

$$y^2 = 4$$

$$y_{1,2} = \pm 2$$

$$\underline{\underline{x_1 = 1,\ x_2 = (-3)}}$$

Příklad 2.

Řešte v R:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Řešení: Uhádneme celočíselné kořeny 1, 2, -1.

Hornerovo schéma - ověříme, že se jedná o řešení rovnice.

	1	-2	-1	2
1	1	-1	-2	0
2	1	0	-1	0
-1	1	-3	2	0

$$\underline{\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = (-1)}}$$

Ze základní věty algebry víme, že polynomická rovnice 3. stupně, má <u>právě 3 kořeny</u>.

POZOR! Kořeny mohou být komplexní !

Příklad 2.

Příklad 2 také můžeme vyřešit postupným vytýkáním

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Řešení: Postupné vytýkání:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2}\underbrace{-x + 2} = x^2(x-2) - 1(x-2) =$$

$$= (x^2 - 1)(x-2) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

$$\underline{\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = (-1)}}$$

Příklad 3.

Řešte v R:

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

Řešení: Uhádneme první kořen: $\underline{\underline{x_1 = 1}}$.

Další dva kořeny dostaneme po vydělení kořenovým činitelem (x-1):

$$(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1$$

Nyní najdeme kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Tedy dalšími dvěma reálnými kořeny jsou:

$$\underline{\underline{x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}}.$$

Podrobné kroky při dělení polynomů polynomem:

$$
\begin{array}{l}
x^3 \qquad\qquad - 2x + 1 : (x-1) = x^2 + x - 1 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\qquad\quad x^2 - 2x + 1 \\
\qquad -(x^2 - x) \\
\hline
\qquad\qquad -x + 1 \\
\qquad\qquad -(x-1) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Koeficienty výsledné kvadratické rovnice $x^2 + x - 1$ také můžeme nalézt přímo v Hornerově schématu:

	1	0	-2	1
$x_0 = 1$	1	1	-1	0
	(a=1)	(b=1)	(c=-1)	

Příklad 4.

Řešte v C:

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$$

Řešení: Použijeme podobný trik jako doplnění na čtverec:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(x + \dots)^3 = x^3 + 3x^2(\dots) + \dots$$

Tedy

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} + 6x + 4 =$$

$$= (x + 1)^3 + 6(x + 1) - 2 = 0$$

Příklad 4.

Řešte v C:

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$$

Místo původní rovnice

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$$

můžeme tedy hledat řešení rovnice

$$(x+1)^3 + 6(x+1) - 2 = 0$$

resp. po zavedení substituce $z = x + 1$

$$z^3 + 6z - 2 = 0$$

Příklad 4 dořešíme později.

Kubická rovnice

Obecný tvar kubické rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ kde } a,\ b,\ c,\ d \in R,\ a \neq 0$$

Normovaný tvar kubické rovnice

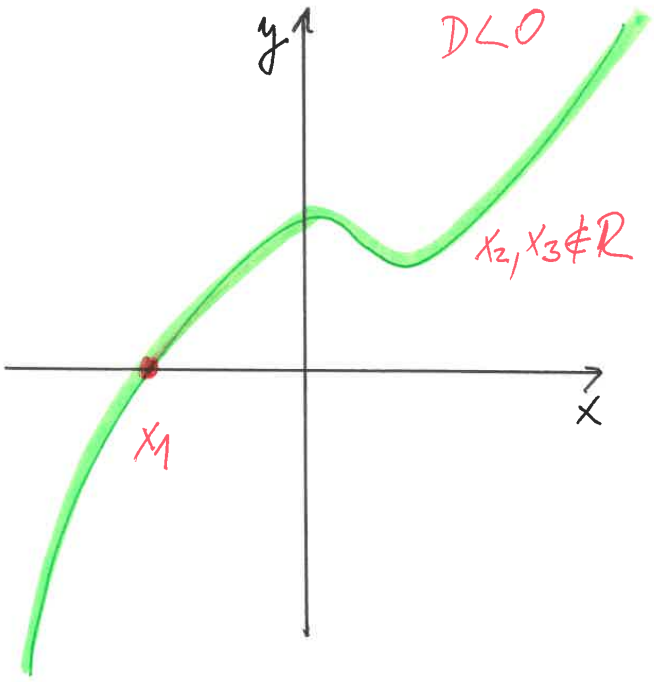
$$x^3 + \frac{b}{a} \cdot x^2 + \frac{c}{a} \cdot x + \frac{d}{a} = 0.$$

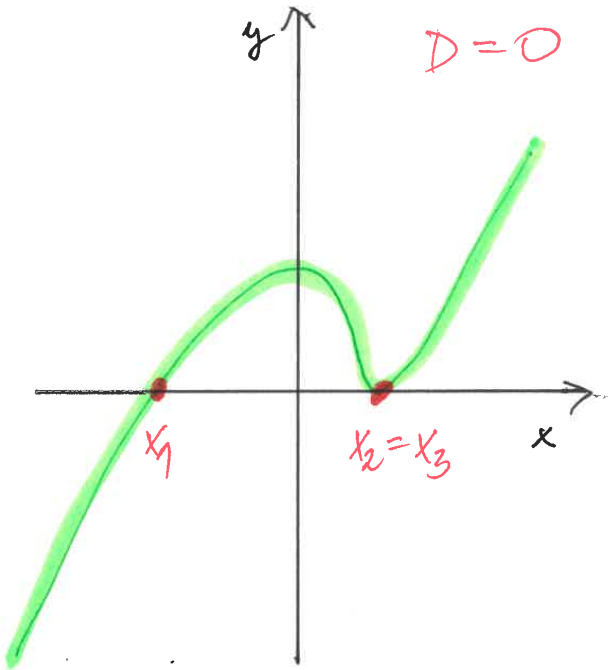
$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

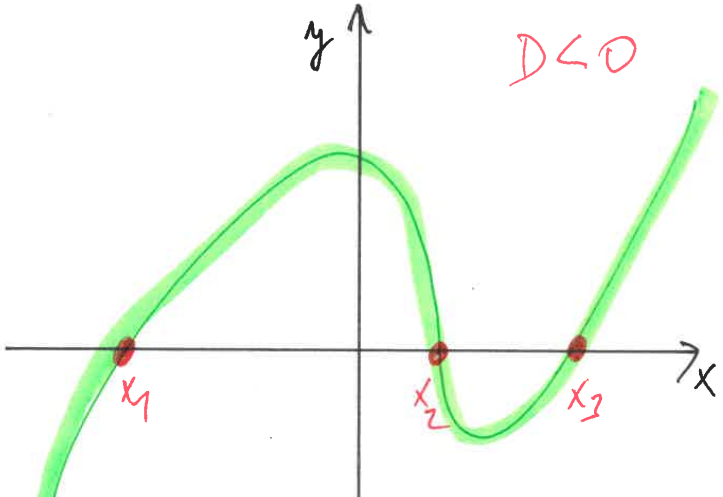
Redukovaný tvar kubické rovnice (subst $x = z - \frac{\alpha}{3}$)

$$z^3 + p \cdot z + q = 0.$$

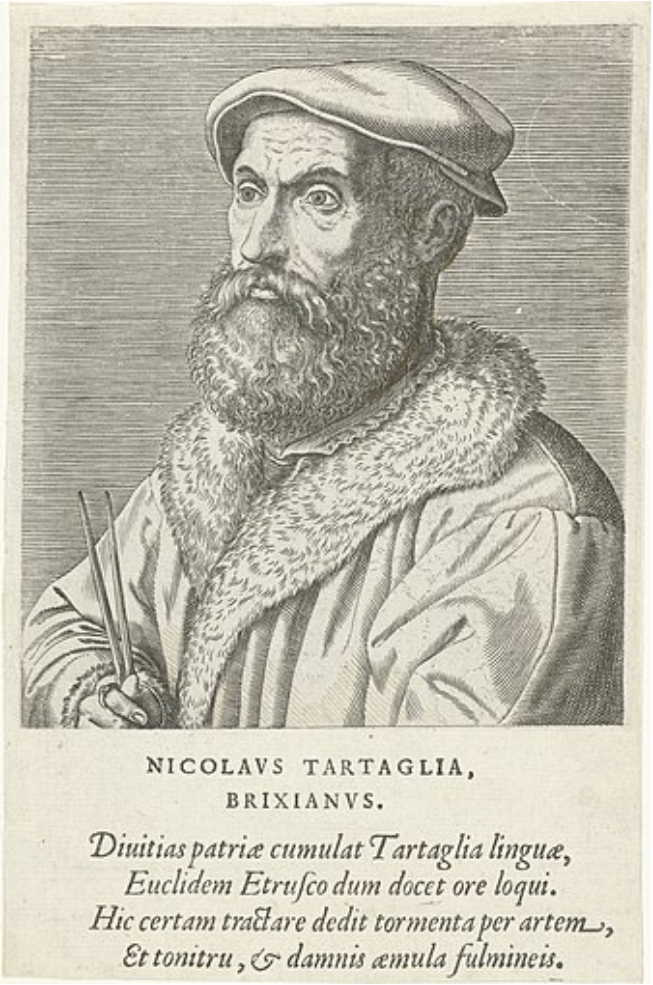
Grafické řešení kubických rovnic





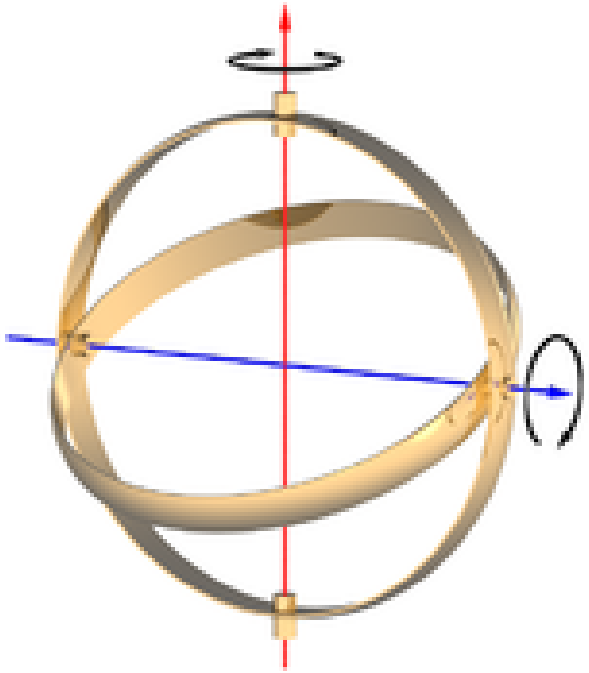


Obrázek: *Gerolamo Cardano (1501 Pavia – 1576 Řím), italský matematik, filosof, astronom, astrolog a šachista. V mládí se těžko prosazoval a živil se často hazardní hrou, kde mu pochopení zásad matematické pravděpodobnosti dávalo vůči protihráčům značnou výhodu. Posléze působil jako profesor matematiky v Miláně, Pavii a Bologni.*



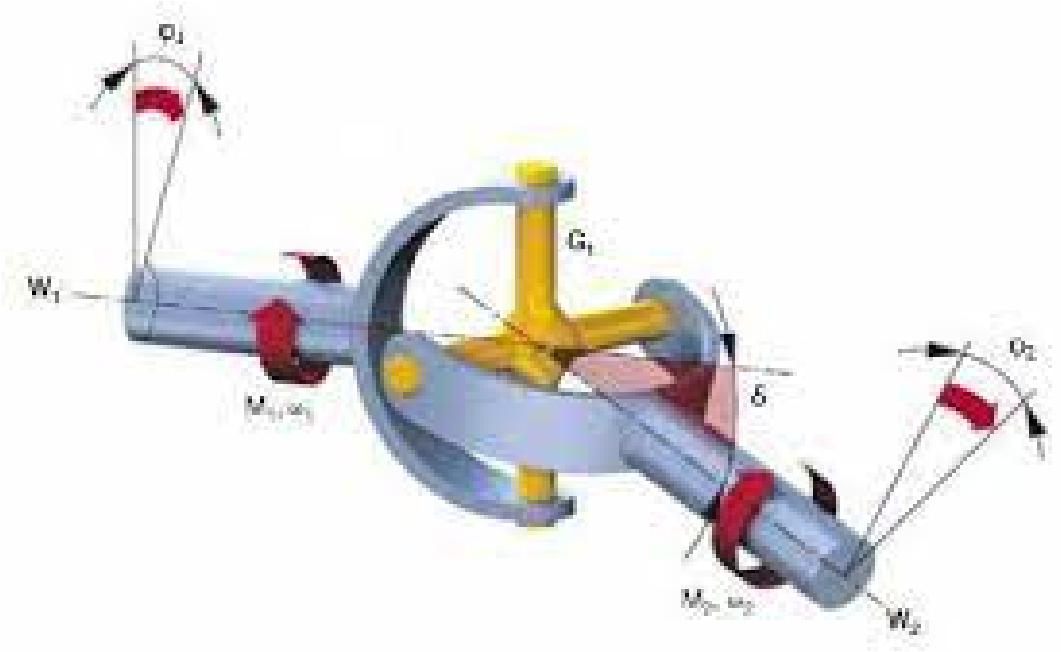
Obrázek: *Niccolò Fontana Tartaglia (1499 Brescia - 1557 Benátky), žák Cardana, byl italský renesanční matematik a konstruktér. Publikoval množství knih včetně prvních italských překladů děl Archiméda a Euklida. Jako první užil matematiku ke studiu drah dělových koulí.*

Gerolamo Cardano v roce 1545 napsal svůj hlavní spis Ars Magna, ve kterém uveřejnil postupy pro řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně, jejichž výsledkem jsou Cardanovy vzorce. Tyto postupy vymysleli jeho žáci Niccolò Fontana Tartaglia, Scipione del Ferro, resp. Lodovico Ferrari. Jako první se zabýval matematickou pravděpodobností, popsal tzv. **Cardanův závěs** *a* **Cardanův kloub**.

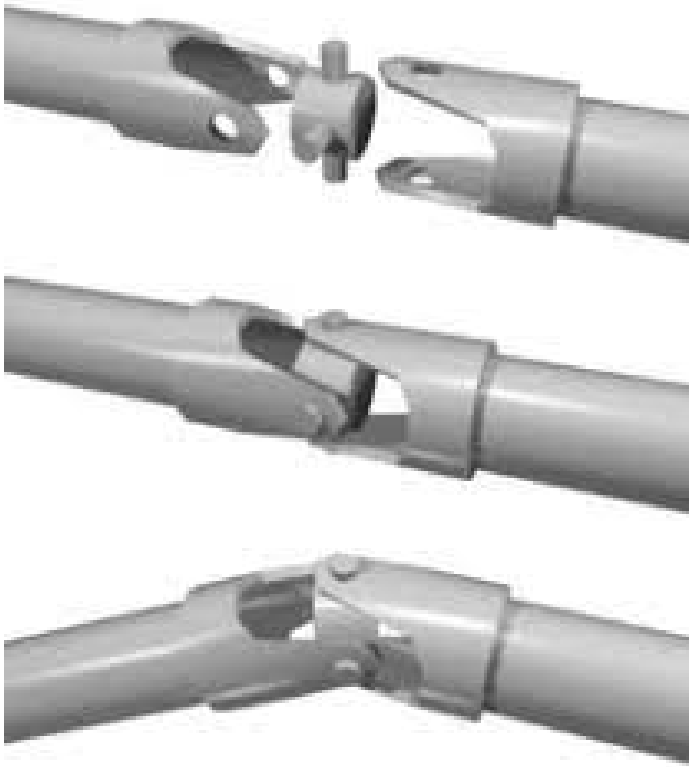


Obrázek: Cardanův závěs (zdroj: Wikipedie)

Kardanův závěs (křížový závěs) je uložení, které umožňuje zavěšenému přístroji volný pohyb ve všech třech osách. Tvoří je tři v sobě umístěné obvykle kovové prstence, spojené otočnými čepy tak, že osy čepů sousedících prstenců jsou navzájem kolmé, zdroj: wikipedie.



Obrázek: Kardanův závěs (zdroj: CVUT DSpace)



Obrázek: *Kardanův závěs (zdroj: wikipedie)*

Kardanův kloub je křížová kloubová spojka umožňující přenos točivého momentu mezi dvěma různoběžnými hřídeli. Používá se například pro pohon motorových vozidel, obráběcích a hospodářských strojů. Nevýhodou jednoduchého Kardanova kloubu je nestejnoběžnost, tedy proměnnou úhlovou rychlost hnaného hřídele v případě konstantní úhlové rychlosti hnacího hřídele. Tato nestejnoběžnost způsobuje nežádoucí vibrace.

Obrázek: Kardanův (úhlový) kloub (zdroj: wikipedie)

Obrázek: *Homokinetický kardanův kloub, dosahuje v jednom členu téže úhlové rychlosti hnací a hnané části, tedy již nedochází k vibracím. (zdroj: wikipedie)*

Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$

Nápad!

Řešení budeme hledat ve tvaru součtu

$$\boxed{z=u+v}$$

Tedy hledáme u, v, pro které platí:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q =$$

$$= u^3+v^3+q+3uv(u+v)+p(u+v) = u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p) = 0$$

Pokud bychom našli u, v tak, aby

$$\boxed{3uv+p=0, \quad u^3 + v^3 + q = 0}$$

tak jsme hotovi.

Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$

Řešíme soustavu (2 rovnic o 2 neznámých u, v s parametry p, q):

$$3uv + p = 0$$

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Z 1. rovnice vyjádříme v:

$$3uv + p = 0 \rightarrow \boxed{\mathrm{v} = -\ \frac{p}{3u}}$$

Za v dosadíme do 2. rovnice:

$$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0$$

Po zavedení substituce $\boxed{u^3 = t}$

$$t - \frac{p^3}{27}\frac{1}{t} + q = 0$$

obrdžíme kvadratickou rovnici s neznámou t a 2 parametry p, q

$$\boxed{\mathrm{t}^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0}$$

Diskriminant kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$

Nejprve vypočteme diskriminant D^* kvadratické rovnice $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ obvyklým způsobem:

$$D^* = q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27} = 4 \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2\right]}_{D}.$$

Diskriminant

$$\boxed{\mathrm{D} = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

se nazývá **diskriminantem kubické rovnice**

$$z^3 + p \cdot z + q = 0.$$

Diskriminant kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$

Znaménko diskriminantu

$$\boxed{\mathrm{D} = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

kubické rovnice ukazuje na tři možné kombinace kořenů:

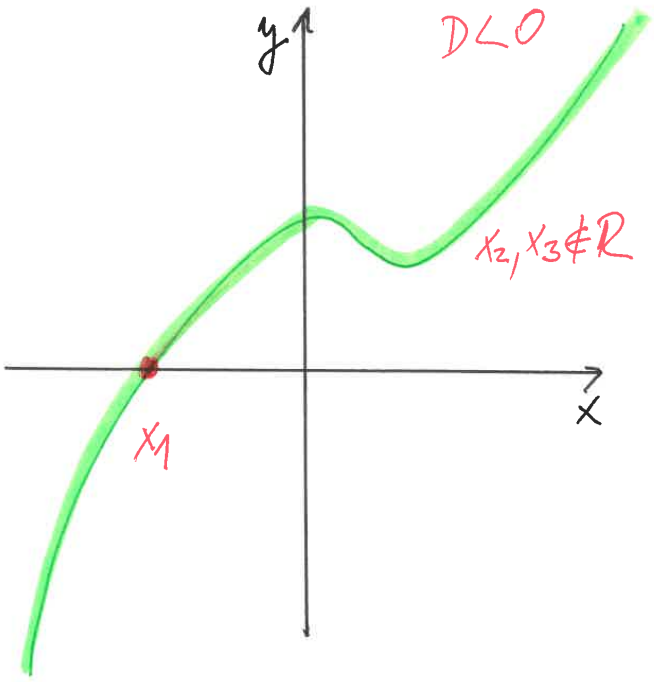
I) $D > 0$: 1 reálný kořen, 2 komplexně sdružené kořeny

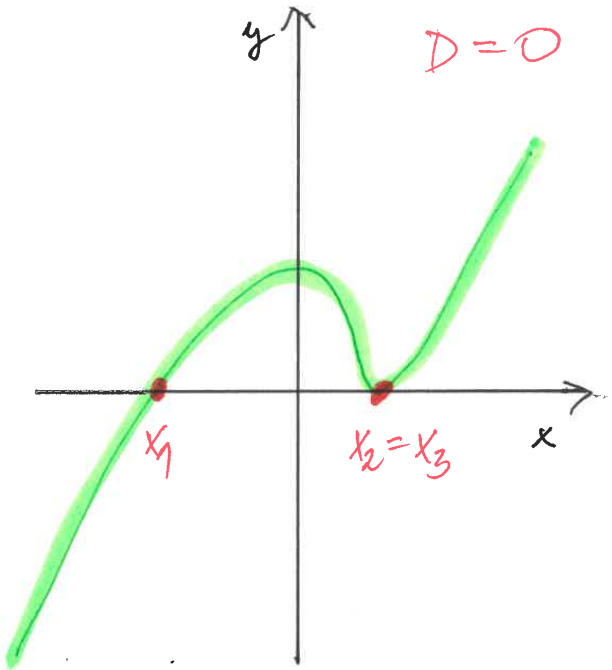
II) $D = 0$: 3 reálné kořeny (jeden dvojnásobný)

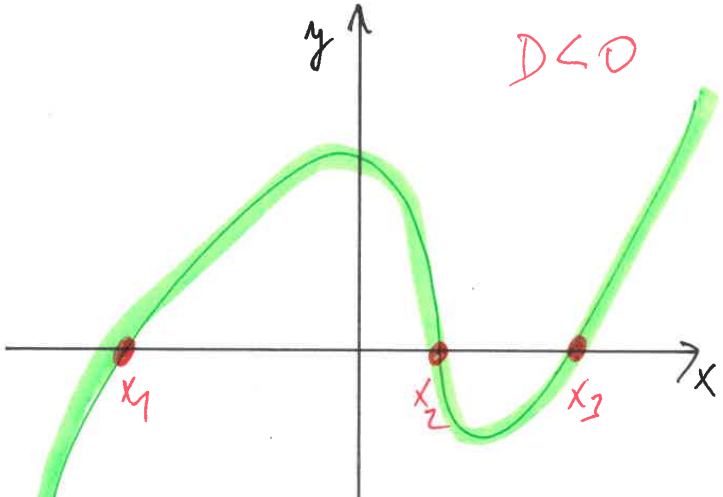
III) $D < 0$: 3 různé reálné kořeny

Ještě může nastat situace, kdy existuje jeden trojnásobný kořen, ale toto tzv. *triviální řešení* zde nebudeme uvažovat.

Grafické řešení kubických rovnic







I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Vraťme se ke kvadratické rovnici s neznámou t a 2 parametry $p,\ q$

$$\boxed{t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0}.$$

Kořeny $t_{1,2}$ této kvadratické rovnice vypočteme dle známého vzorce:

$$t_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{4D}}{2} = \begin{cases} -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3} \\ -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3} \end{cases}$$

Zpětnou substitucí $\boxed{u = \sqrt[3]{t}}$ dopočteme $u_1,\ u_2$:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Všimněme si, že platí: $\boxed{u_1 \cdot u_2 = -\frac{p}{3}}$.

Našli jsme u. Nyní najděme v.

$$3uv + p = 0 \rightarrow \boxed{\text{v=- } \frac{p}{3u}}.$$

Tedy dostáváme

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = u_2$$

$$v_2 = -\frac{p}{3u_2} = u_1$$

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

První řešení z_1 dostáváme ve tvaru $z_1 = u_1 + v_1$, tedy

$$\boxed{z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Tomuto vyjádření, resp. vyjádření

$$\boxed{u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

se říká **Cardanovy vzorce**.

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Jelikož $u_2 + v_2 = u_1 + v_1$, druhé nalezené řešení u_2 nelze pro vyjádření kořene z_2 využít.

Komplexní kořeny $z_2,\ z_3$ lze obdržet řešením příslušné kvadratické rovnice

$$z^3 + p \cdot z + q = (z - z_1) \cdot \underbrace{(az^2 + b \cdot z + c) = 0}_{z_2 = \ldots,\ z_3 = \ldots}$$

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Vraťme se k příkladu 4. Máme řešit rovnici

$$\boxed{x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0}$$

Tuto rovnici jsme převedli na redukovaný tvar

$$\boxed{z^3 + 6z - 2 = 0}$$

První kořen z_1 nalezneme použitím Cardanova vzorce ($p = 6,\ q = -2$):

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}}$$

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Pomocí Cardanova vzorce jsme vypočetli první kořen $z_1 \in R$ redukované rovnice

$$z^3 + 6z - 2 = 0$$

$$\boxed{z_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$$

A tedy první kořen původní rovnice (zpětná substituce $x = z - 1$)

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0$$

$$\boxed{x_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1}$$

Dopočet komplexně sdružených kořenů z_2, z_3 (1. způsob)

$$(z^3+6z-2):(z-(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})) = \underline{\underline{z^2+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})z+(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2)}}$$

$$-(z^3-z^2\cdot(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}))$$

$$z^2\cdot(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})+6z-2$$

$$-(z^2\cdot(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})-(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})^2 z+6z-2)$$

$$z\cdot[(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})^2+6]-2$$

$$z\cdot[\sqrt[3]{16}\underbrace{-2\cdot\sqrt[3]{8}}_{-4}+\sqrt[3]{4}+6]-2$$

$$z\cdot[2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2]-2$$

$$-(z\cdot[2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2]-(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2))$$

$$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\cdot(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2)-2 =$$

$$= \underbrace{2\sqrt[3]{8}}_{4} - 2\sqrt[3]{4} + \boxed{\sqrt[3]{16}} \underbrace{-\sqrt[3]{8}}_{-2} + 2\sqrt[3]{4} \boxed{-2\sqrt[3]{2}} \underbrace{-2}_{-2} = \underline{\underline{0}} \checkmark$$

Dopočet komplexně sdružených kořenů z_2, z_3 (1. způsob)

$$\boxed{z^2 + \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\right)\cdot z + \left(2\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 2\right) = 0}$$

$$z_{2,3} = \frac{\left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) \pm i\cdot\sqrt{\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(2\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 2\right)}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{i}{2}\cdot\sqrt{\left(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 4\right) - 4\cdot\left(2\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 2\right)} =$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{i}{2}\cdot\sqrt{\left|-6\cdot\sqrt[3]{2} - 3\cdot\sqrt[3]{4} - 12\right|} \Rightarrow$$

$$\boxed{z_{2,3} = \frac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{i}{2}\cdot\sqrt{6\cdot\sqrt[3]{2} + 3\cdot\sqrt[3]{4} + 12}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{2,3} = \frac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{6\cdot\sqrt[3]{2} + 3\cdot\sqrt[3]{4} + 12}}$$

Dopočet komplexně sdružených kořenů z_2, z_3 (2. způsob)

Obecný tvar řešení kubické rovnice

$$\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$$

za předpokladu $D > 0$ se dá zapsat ve tvaru

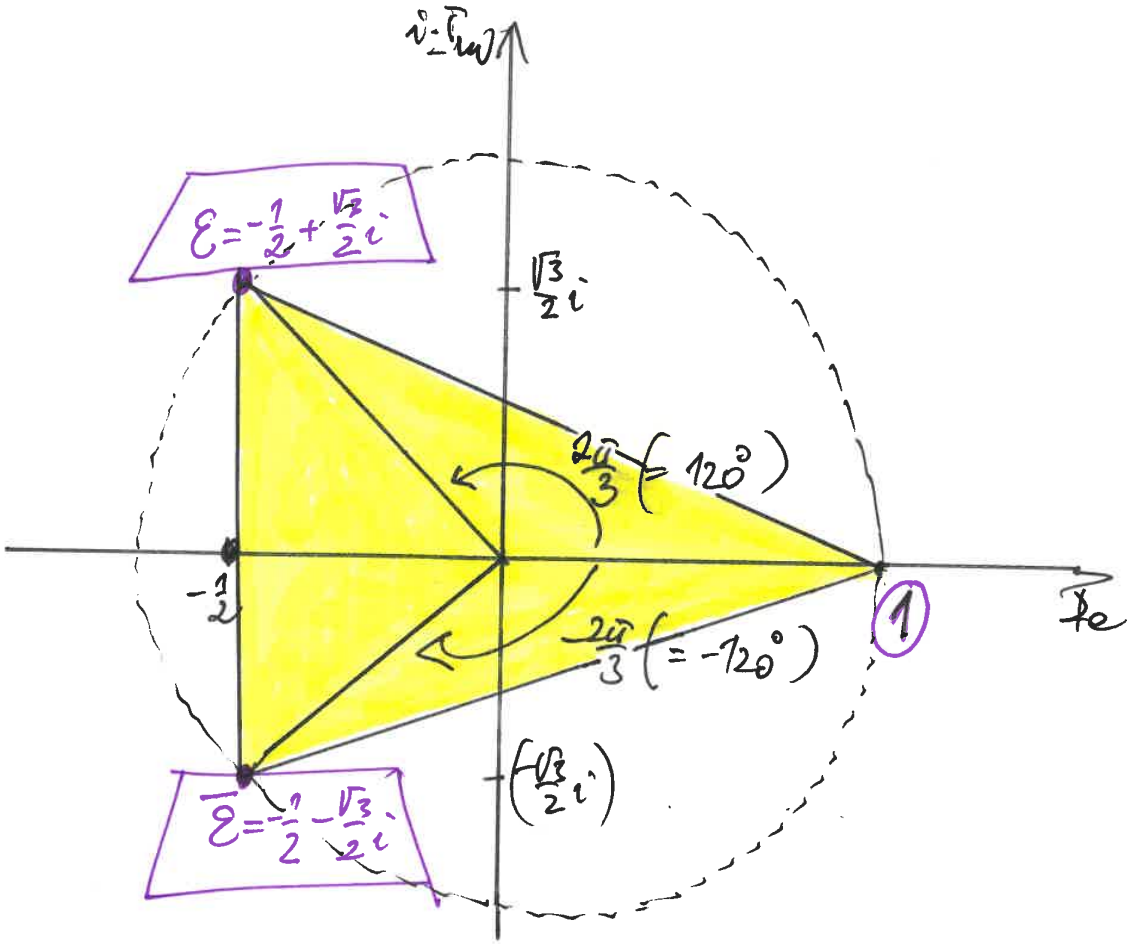
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \cdot u_1 + 1 \cdot v_1 \\ z_2 &= \epsilon \cdot u_1 + \bar{\epsilon} \cdot v_1 \\ z_3 &= \bar{\epsilon} \cdot u_1 + \epsilon \cdot v_1, \end{aligned}$$

kde čísla ϵ a $\bar{\epsilon}$ splňují: $\boxed{\epsilon^3 = 1, (\bar{\epsilon})^3 = 1}$ a tudíž

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bar{\epsilon} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dopočet komplexně sdružených kořenů z_2, z_3 (2. způsob)



Dopočet komplexně sdružených kořenů z_2, z_3 (2. způsob)

$$z_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \qquad u_1 = \sqrt[3]{4}, \quad v_1 = -\sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = u_1 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\varepsilon} + v_1 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\bar{\varepsilon}} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$$

$$z_3 = u_1 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\bar{\varepsilon}} + v_1 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\varepsilon} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\right)$$

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Souhrnně dostáváme tři řešení $z_1,\ z_2,\ z_3$ rovnice v redukovaném tvaru

$$\boxed{z^3 + 6z - 2 = 0}:$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$$

Dořešení příkladu 4

a tudíž tři řešení $x_1,\ x_2,\ x_3$ původní rovnice v obecném tvaru

$$\boxed{x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0}:$$

$$x_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$$

Tedy příklad 4 je vyřešen.

I.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D > 0$

Cardanovy vzorce bývají někdy uvedeny v následující podobě:

$$z_1 = u + v$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$

kde pro u, v platí,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + D}, \;\; v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - D}$$

přičemž

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

je diskriminantem kubické rovnice $z^3 + pz = q = 0$.

II.) Řešení kubické rovnice $\boxed{z^3 + p \cdot z + q = 0}$ pro $D = 0$

Příklad 5. Řešte v R:

$$z^3 - 3z + 2 = 0$$

Diskriminant $(p = (-3), q = 2)$

$$D = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3 = 0$$

Tedy $(u_1 = u_2 = v_1 = v_2)$.

$$t_1 = -\frac{q}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

Další dvě řešení splývají

$$\boxed{z_2 = z_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}}$$

Všimněme si, že řešení je závislé pouze na 1 parametru.

II) $D = 0$: tři reálné kořeny, z toho jeden dvojnásobný

Řešení rovnice

$$z^3 - 3z + 2 = 0 :$$

$$\boxed{z_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{\frac{2}{2}} = -2}$$

$$\boxed{z_2 = z_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1}$$

jsme mohli také nalézt rozkladem (bez použití Cardanových vzorců):

$$z^3 - 3z + 2 = (z + 2)(z - 1)^2 = 0$$

III) $D < 0$: tři různé reálné kořeny

Vraťme se ke třetímu typu úlohy.

Pro parametr p v tomto případě platí: $p < 0$.

Tyto tři různé reálné kořeny <u>nelze</u> pomocí Cardanových vzorců najít (tzv.*casus irreducibilis*).

Soustava

$$u \cdot v = -\frac{p}{3}$$

$$u^3 + v^3 = -q$$

v tomto případě nemá reálné řešení.

Hledejme proto u, v ve tvaru komplexně sdružených čísel

$$u = \alpha + i\beta = r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi)$$

$$v = \alpha - i\beta = r \cdot (\cos\phi - i \sin\phi)$$

III) $D < 0$: tři různé reálné kořeny

Pak

$$u \cdot v = r^2$$

$$u^3 + v^3 = 2r^3 \cos(3\phi)$$

a tudíž

$$r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$2r^3 \cos(3\phi) = -q$$

Tedy

$$\cos(3\phi) = \frac{(-\frac{q}{2})}{\sqrt{(-\frac{p}{3})^3}}$$

Z poslední rovnosti lze ϕ vždy dopočíst.

III) $D < 0$: tři různé reálné kořeny

První řešení z_1 vypočteme pomocí následujícího vztahu:

$$z_1 = u_1 + v_1 = (\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) = 2\alpha = 2r\cos\phi \Rightarrow$$

$$\boxed{z_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}\right)}$$

Pokud ϕ splňuje podmínku z předchozí strany, tak tuto podmínku splňuje i $(\phi + \frac{2\pi}{3})$ a $(\phi - \frac{2\pi}{3})$. Proto

$$\boxed{z_2 = 2r\cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right),\ z_3 = 2r\cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Tedy přes komplexní čísla jsme se dostali ke třem reálným kořenům $z_1,\ z_2,\ z_3$.

III) $D < 0$: tři různé reálné kořeny

ŘEŠTE ROVNICI:

$$x^3 - 21x - 20 = 0$$

JEDNÁ SE O REDUKOVANÝ TVAR ($p = -21,\ q = -20$).

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-21}{3}\right)^3 + \left(\frac{-20}{2}\right)^2 = (-7)^3 + (-10)^2$$

$$D = 100 - 343 = (-243) < 0$$

$$\boxed{\cos(3\phi) = \frac{\left(-\frac{q}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}} = \frac{10}{\sqrt{343}} \Rightarrow$$

$$3\phi = \arccos \frac{10}{\sqrt{343}}$$

$$\phi \doteq 0{,}33\,[\mathrm{rad}] = 19^\circ$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{7}\cos\phi = 5 \\ x_2 &= -2\sqrt{7}\cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) = (-4) \\ x_3 &= -2\sqrt{7}\cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) = (-1) \end{aligned}}$$

Aplikace kubických rovnic

Řešení kubických rovnic má bohaté uplatnění. Uveďme zde pro ilustraci pouze tři z nich

- PCA, neboli *metoda hlavních komponent* (převod vícerozměrného systému do třech dimenzí)
- Hledání *vlastních čísel* matice typu (3,3)
- Stavová rovnice plynu

Van der Waalsova rovnice je stavová rovnice plynu, která narozdíl od stavové rovnice ideálního plynu zohledňuje skutečnost, že při výpočtu nelze zanedbat vlastní objem částic tvořících plyn a také to, že přitažlivé síly mezi částicemi, tzv. kohezní síly, ovlivňují pohyb částic.

Van der Waalsova rovnice

Van der Waalsovu rovnici zapisujeme ve tvaru

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT,$$

kde a, b, jsou konstanty charakteristické pro každý plyn (jejich hodnoty se stanovují experimentálně), p [Pa] ... tlak , n [mol]... látkové množství, V [m^3]... objem plynu, T [K] ... termodynamická teplota plynu a R [m^3 Pa K^{-1}mol^{-1}] ... molární plynová konstanta.

Pro $a = 0$ a současně $b = 0$ přechází van der Waalsova rovnice ve stavovou rovnici ideálního plynu:

$$pV = RT.$$

Van der Waalsova rovnice, příklad

Uveďme si příklad sestavení Van der Waalsovy rovnice pro oxid uhličitý CO_2.

V tabulkách najdeme pro CO_2 konstanty $a = 0,37$ Pa m^{6}mol^{-2}, $b = 4,3 \cdot 10^{-5}$ m^3 mol^{-1}. a hodnotu univerzální konstanty $R = 8,3$ m^3 Pa K^{-1}mol^{-1}.
Uvažujme atmosférický tlak $p = 10^5$ Pa, teplotu $T = 3 \cdot 10^2$ K a $n = 1$ mol.

Van der Waalsova rovnice pak bude mít tvar

$$\left(10^5 + \frac{0,37}{V^2}\right)\left(V - 4,3 \cdot 10^{-5}\right) = 24,9 \cdot 10^2.$$

Po drobné úpravě vidíme, že se jedná o kubickou rovnici

$$10^5 \cdot V^3 - 2,5 \cdot 10^3 V^2 + 0,37V - 1,9 \cdot 10^{-5} = 0.$$

Kvartické rovnice

Nyní si uveďme jen pár slov o rovnicích vyšších stupňů, než jsou kubické. Rovnice 4. stupně se nazývají *kvartické rovnice*.

Obecný tvar kvartické rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ kde } a,\ b,\ c,\ d,\ e \in R,\ a \neq 0.$$

Obecné řešení kvartických rovnic se hledá podobně jako řešení kubických rovnic. Nejprve se kvartická rovnice pomocí vhodné substituce převede na redukovaný tvar:

Redukovaný tvar kvartické rovnice

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ kde } A,\ B,\ C \in R,\ A \neq 0.$$

Redukovaný tvar se vhodným trikem převede na kubickou rovnici, která se následně vyřeší pomocí Cardanových vzorců.

Rovnice pátého a vyššího stupně

Obecný tvar rovnice 5. stupně

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \text{ kde } a_i \in R, \ a_5 \neq 0.$$

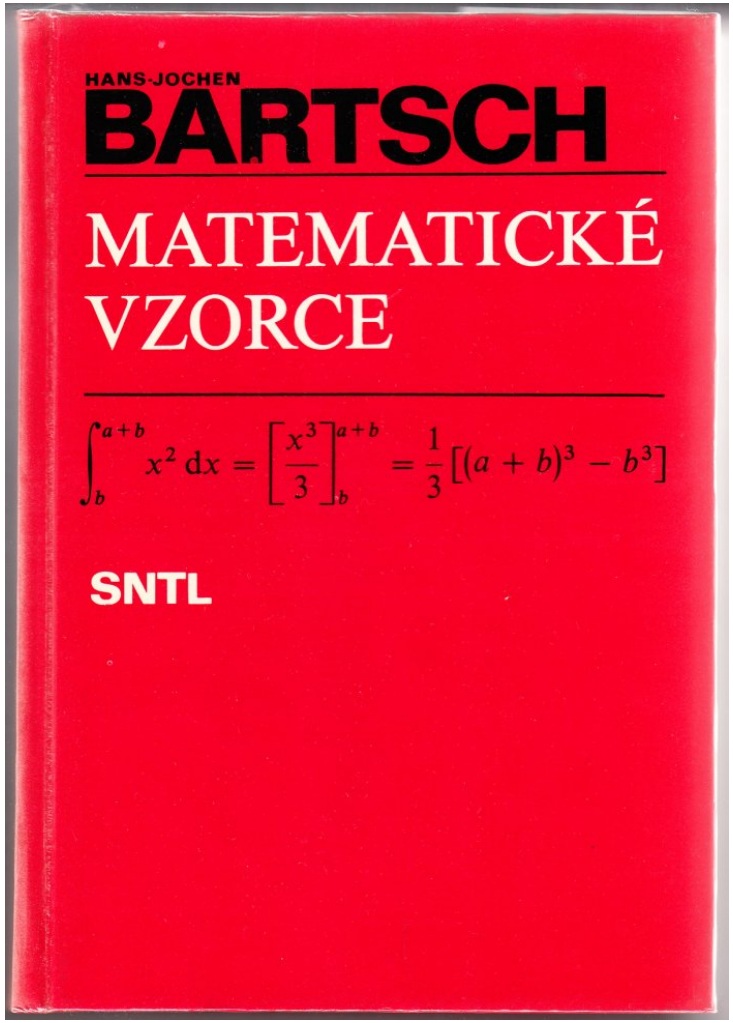
Rovnice pátého a vyššího stupně **obecně** nelze řešit pomocí vzorců (důkaz přesahuje rámec základních kurzů matematiky).

U těchto typů rovnic lze řešení nalézt v některých specifických případech jako jsou

- binomické rovnice,
- reciproké rovnice,
- bikvadratické rovnice apod.

Pokud potřebujete řešit rovnici pátého a vyššího stupně a nespadá do těchto speciálních případů, je třeba řešení nalézt pomocí některé z **numerických metod**.

Literatura


HANS-JOCHEN
BARTSCH
MATEMATICKÉ
VZORCE
$\int_b^{a+b} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_b^{a+b} = \frac{1}{3}[(a+b)^3 - b^3]$
SNTL

Literatura

- Bartsch H. J.: Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1987
- Wikipedie: Kubická rovnice, Cardanovy vzorce, Kvartická rovnice, https://cs.wikipedia.org/
- Kopfová J.: Kde se vzali komplexné čísla, přednáška na semináři OSMA, 21.3.2019
- Vodstrčil P.: Kubické rovnice, přednáška na soustředění MOFO, 2.7.2020

Úloha pro ŠKOMAM Cup

Najděte všechna řešení kubické rovnice:

$$z^3 - 3z - 2 = 0.$$

Děkuji za pozornost.