Jak řešit neřešitelné soustavy?

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Ostrava, 23.1. 2024

(ŠKOMAM 2024)

Matice

Definice

Maticí A typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové schéma (o m řádcích a n sloupcích)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

kde a_{ij} jsou reálná čísla. Jestliže $m = n$, mluvíme o čtvercové matici. Je-li $m = 1$ (resp. $n = 1$), dostáváme tzv. řádkový (resp. sloupcový) vektor.

Symbolem $\mathbb{R}^{m \times n}$ budeme označovat množinu všech matic typu $m \times n$.

Příklad

Matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ je typu 2×3. Tento fakt lze zapsat jako $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Operace s maticemi (sčítání, odčítání a násobení skalárem)

Všechny tyto operace provádíme tzv. „po složkách“. Sčítat a odčítat přitom smíme pouze matice stejného typu.

Příklad (sčítání)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 8 & 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3 & 7\\ 12 & 7 & 11\end{bmatrix}$$

Příklad (odčítání)

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

Příklad (násobení skalárem)

$$4 \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{bmatrix}$$

Operace s maticemi (násobení)

Násobení matic už nedefinujeme po složkách. Operace $A \cdot B$ je definována v případě, že $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ (počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B). Násobení matic obecně není komutativní!

Příklad (princip násobení matic – $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k} \implies A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times k}$)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2\\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 0 & 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 11\\ 19 & 29\end{bmatrix}$$

Příklad

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\ 1\\ 6\end{bmatrix} = [2\cdot 5 + 3\cdot 1 + 4\cdot 6] = [37]$$

Výsledkem je matice typu 1×1. V takovém případě maticové závorky zpravidla vynecháváme a výsledek považujeme za číslo.

O jaké číslo se jedná?

Operace s maticemi (transpozice)

Další užitečnou maticovou operací je tzv. transpozice.

Transponovat matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ znamená vyměnit roli řádků a sloupců.

To znamená, že i–tý sloupec transponované matice odpovídá i–tému řádku matice původní. Výslednou matici označujeme A^T a tato matice je typu $n \times m$, tj. $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Příklady

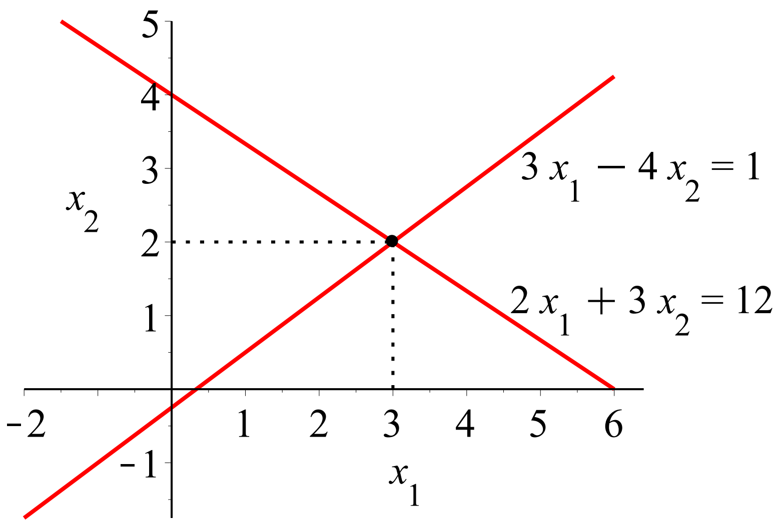
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Definice

Čtvercová matice A, pro kterou platí $A^T = A$, se nazývá symetrická.

Soustavy lineárních rovnic (geometrická interpretace)

Například soustavu
$$2x_1 + 3x_2 = 12,$$
$$3x_1 - 4x_2 = 1$$
dvou lineárních rovnic o dvou neznámých lze interpretovat jako dvojici přímek v rovině. Jejich průsečík (v našem případě bod $[x_1, x_2] = [3, 2]$) pak odpovídá řešení této soustavy.



Soustavy lineárních rovnic (maticový zápis soustavy)

Stejnou soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12, \\ 3x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

můžeme zapsat také pomocí matic a maticových operací ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{popř.} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Označíme-li si matici $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ naší soustavy jako A,

vektor neznámých $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ jako x a vektor pravých stran $\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$ jako b,

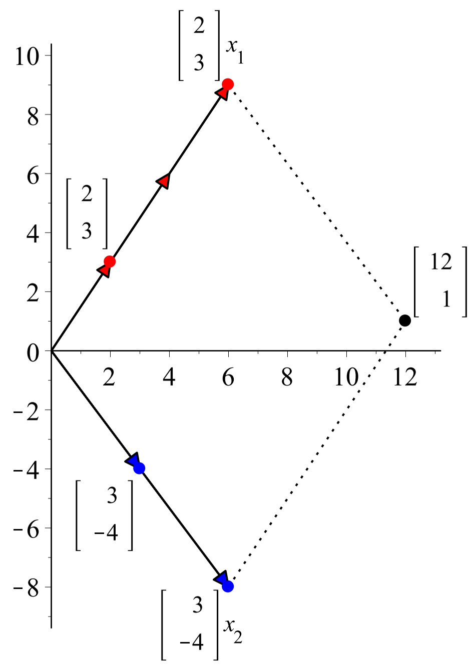
můžeme soustavu rovnic zkráceně zapsat ve tvaru $Ax = b$.

Soustavy lineárních rovnic (geometrická interpretace trochu jinak)

Již víme, že naši soustavu lze přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \color{red}{2} \\ \color{red}{3} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} \color{blue}{3} \\ \color{blue}{-4} \end{bmatrix} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geometrická interpretace:



Neřešitelné soustavy

Uvažujme například soustavu

$$\begin{aligned} 2x &= 9, \\ 3x &= 7 \end{aligned}$$

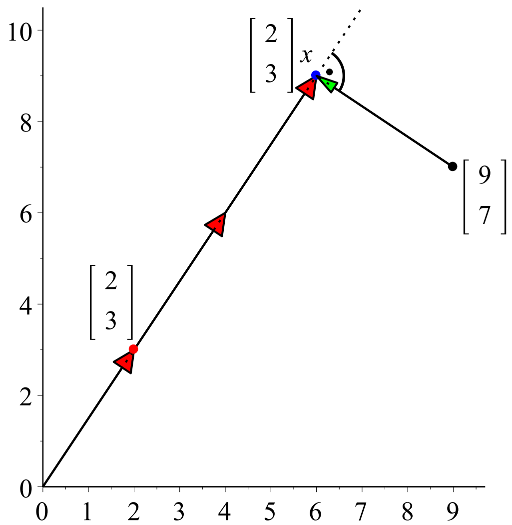
dvou rovnic o jedné neznámé, která evidentně nemá řešení.

Tuto soustavu lze maticově zapsat ve tvaru $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Protože naše soustava nemá řešení, neexistuje žádné x, pro které je poslední rovnost splněna.

Budeme se proto snažit hledat x tak, abychom se s výrazem $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x$ co nejvíce přiblížili k $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Geometrická interpretace „řešení“ neřešitelné soustavy $\begin{bmatrix} \color{red}{2} \\ \color{red}{3} \end{bmatrix} \cdot \color{blue}{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$



Podmínku kolmosti můžeme zapsat jako

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x - \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

„Řešení“ soustavy $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix}$

Podmínku kolmosti můžeme zapsat a ekvivalentně upravit takto:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \cdot x - \begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix},$$

$$13x = 39,$$

$$x = 3.$$

Za „řešení“ naší neřešitelné soustavy lze tedy prohlásit číslo $x = 3$.

Obecná (neřešitelná) soustava $Ax = b$

Máme-li soustavu $Ax = b$, která nemá řešení, stačí místo ní vyřešit náhradní soustavu $A^T Ax = A^T b$, o které lze ukázat, že je vždy řešitelná.

Příklad

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2,\\ 2x_1 + x_2 &= 4,\\ 4x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

tří rovnic o dvou neznámých. Ověřte, že tato soustava nemá řešení.

Matice soustavy je $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}$ a vektor pravých stran je $b = \begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$.

Snadno spočítáme, že $A^T A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\\4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & 7\\7 & 3\end{bmatrix}$ a

$$A^T b = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30\\11\end{bmatrix}.$$

$Ax = b \rightsquigarrow\rightsquigarrow A^T Ax = A^T b$

Místo soustavy $Ax = b$, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

budeme řešit soustavu $A^T Ax = A^T b$, tj.

$$\begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Tuto soustavu lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} 21x_1 + 7x_2 &= 30, \\ 7x_1 + 3x_2 &= 11. \end{aligned}$$

Její řešení je $x_1 = \frac{13}{14}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Toto řešení lze (v jistém smyslu) považovat i za řešení původní (neřešitelné) soustavy.

Aplikace „řešení“ neřešitelných soustav

Příklad

Jsou dány body $[1, 2]$, $[2, 4]$ *a* $[4, 5]$. *Najděte rovnici přímky* $y = px + q$, *která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.*

Řešení.

Ideální by bylo, pokud by se povedlo najít p a q tak, aby všechny tři zadané body ležely na přímce $y = px + q$. Takové p a q by muselo být řešením soustavy

$$\begin{aligned} p + q &= 2, \\ 2p + q &= 4, \\ 4p + q &= 5, \end{aligned}$$

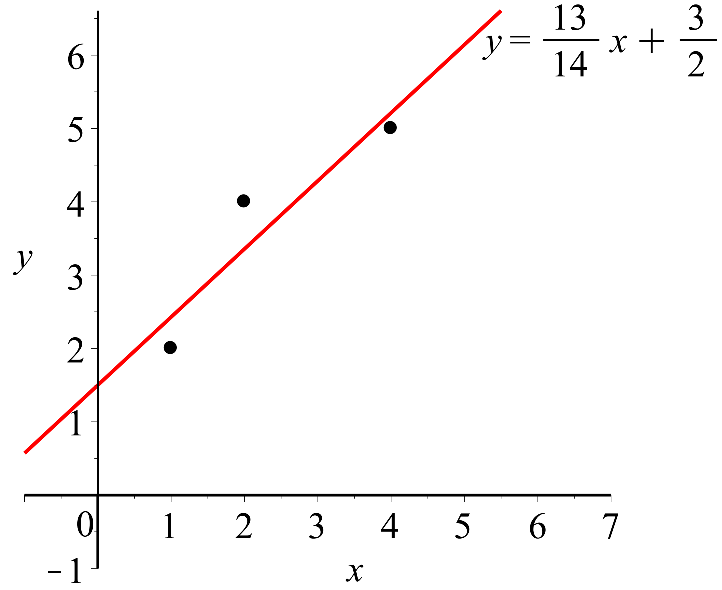
která (jak víme) nemá řešení (viz předchozí příklad).

Z předchozího příkladu víme, že za „řešení“ lze považovat $p = \frac{13}{14}$ a $q = \frac{3}{2}$, tzn. hledaná přímka má rovnici $y = \frac{13}{14}x + \frac{3}{2}$. $\square$

Aplikace „řešení“ neřešitelných soustav

Příklad

Jsou dány body $[1, 2]$, $[2, 4]$ *a* $[4, 5]$. *Najděte rovnici přímky* $y = px + q$, *která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.*



ŠKOMAM CUP

Řešte neřešitelnou soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení

Pro matici soustavy a vektor pravých stran platí $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dále platí $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Nyní potřebujeme vyřešit soustavu $A^T A x = A^T b$, tj. $\boxed{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 6, \\ 2x_1 + 6x_2 &= 5. \end{aligned}}$

Odečteme-li od trojnásobku první rovnice rovnici druhou, dostaneme $7x_1 = 13$, odkud vypočteme $x_1 = \frac{13}{7}$. Dosazením hodnoty x_1 do jedné ze dvou rovnic pak obdržíme $x_2 = \frac{3}{14}$.

Děkuji za pozornost.