



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# PARAMETRICKÉ MODELOVANIE KRIVIEK

URČENO PRO VZDĚLÁVÁNÍ V AKREDITOVANÝCH  
STUDIJNÍCH PROGRAMECH

**ALEXEJ KOLCUN**

ČÍSLO OPERAČNÍHO PROGRAMU: CZ.1.07  
NÁZEV OPERAČNÍHO PROGRAMU:  
VZDĚLÁVÁNÍ PRO KONKURENCESCHOPNOST  
OPATŘENÍ: 7.2  
ČÍSLO OBLASTI PODPORY: 7.2.2

**INOVACE VÝUKY INFORMATICKÝCH PŘEDMĚTŮ VE  
STUDIJNÍCH PROGRAMECH OSTRAVSKÉ UNIVERZITY**

REGISTRAČNÍ ČÍSLO PROJEKTU: CZ.1.07/2.2.00/28.0245

**OSTRAVA 2013**

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Recenzent: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.

Název: PARAMETRICKÉ MODELOVANIE KRIVIEK  
Autor: Mgr. Alexej Kolcun, CSc.  
Vydání: první, 2013  
Počet stran: 81

Jazyková korektura nebyla provedena, za jazykovou stránku odpovídá autor.

© Alexej Kolcun  
© Ostravská univerzita v Ostravě

## Obsah

Obsah.....	3
1 Úvod.....	5
2 Počiatočný komentár k pojmu krivka.....	7
2.1 Používaný aparát .....	8
2.2 Väzba medzi radiacimi bodmi a krivkou .....	10
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	12
3 Interpoláčny polynóm a splajn .....	13
3.1 Existencia interpolačného polynómu .....	13
3.2 Dve užitočné formy interpolačného polynómu .....	14
3.3 Geometrická reprezentácia interpolačného polynómu .....	16
3.4 Príčina kmitania interpolačného polynómu.....	17
3.5 Splajn.....	18
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	22
4 Polynomicke parametrizácie kriviek .....	23
4.1 Implementačné problémy priamej polynomickej reprezentácie.....	23
4.2 Výpočtová efektivita .....	24
4.3 Váhové, či bázové funkcie? .....	26
4.4 Hladkosť v parametrickom tvare.....	26
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	28
5 Fergusonov splajn .....	30
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	35
6 Bézierove krivky .....	36
6.1 Bernsteinove polynómy.....	37
6.2 Základné vlastnosti Bézierovej krivky .....	39
6.3 Bézierova a Fergusonova krivka .....	40
6.4 Schéma deCasteljau.....	41
6.5 Schéma zvyšujúca stupeň krivky .....	44
6.6 Schéma zachovávajúca Bézierovské vlastnosti.....	46
6.7 Poznámky o hladkosti Bézierovej krivky.....	47
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	47
7 Coonsov splajn .....	49
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	52
8 B-splajnové krivky .....	53
8.1 Váhové funkcie v lokálnom a globálnom čase.....	54
8.2 Definícia b-splajnu .....	55
8.3 Kvadratický Bézierov splajn ako uniformný b-splajn.....	59
8.4 Coonsova krivka ako uniformný kubický b-splajn .....	60
8.5 Neuniformné váhové funkcie .....	61
8.6 Bézierova krivka ako b-splajn.....	66
8.7 Lemma o normovanosti váhových funkcií.....	67
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	68
9 Racionálne krivky .....	69
9.1 Kružnica ako kvadratická racionálna krivka .....	70
9.2 Štandardizovaný tvar racionálnej krivky.....	71
Kontrolné otázky a samostatné úlohy .....	74
9 Záverečné dve poznámky k NURBSom .....	75

10.1 Všeobecnější pohľad na schému (2.3) .....	75
10.2 Ofsetová krivka .....	79
Literatúra .....	81

## 1 Úvod

Generovanie kriviek a plôch tvorí podstatu odvetvia, zvaného CAGD (Computer Aided Geometry Design (niekedy skrátene CAD)). Jeho rozvoj bol stimulovaný potrebami spočiatku hlavne strojárenského priemyslu (Computer Aided Machinery – CAM). Práve vývoj CAD/CAM systémov bol jedným z faktorov rýchleho vývoja solídneho matematického základu počítačovej grafiky. Hlavné myšlienky sú z 50.-70. rokov 20. storočia. Možno povedať, že podstatným spôsobom zmenili prácu konštruktérov a návrhárov.

V dnešnej dobe CAD/CAM systémy prenikli prakticky do všetkých klasických priemyselných odvetví. Sú ale neodmysliteľnou súčasťou i odvetví spojených s rozvojom počítačov a ich prenikania do bežného života. S krivkami sa stretáme napr. v geografických informačných systémoch a aplikáciách s nimi súvisiacich. Krivky sú základom pre generovanie rôznych písmenových fontov textových editorov a DTP systémov (Desk Top Publishing). A mohli by sme pokračovať ...

Nasledujúci text je zameraný na generovanie kriviek. Sú vysvetlené základné pojmy, konštrukcie a vzťahy. U čitateľa sa predpokladajú len základné znalosti z lineárnej algebry (pojem vektor, matica, násobenie matic, podmienka riešiteľnosti sústavy lineárnych rovníc), analytickej geometrie (analytické vyjadrenie priamky, smerový a normálový vektor) a matematickej analýzy (funkcia, derivácia funkcie a jej význam). Podstatne dôležitejším požiadavkom je schopnosť aktívne manipulovať s vyššie uvedenými znalosťami.

Matematické dôkazy v texte sú uvádzané hlavne preto, aby ste získali aspoň čiastočnú predstavu o tom, ako sa v matematike narába s príslušnými nástrojmi. A taktiež aby ste videli, že rôzne prístupy k problému vedú k rôzne náročným postupom odvodzovania výsledných vzťahov. Pre Vás – informatikov je podstatnejšie, aby ste boli ***schopní implementovať matematické vzťahy, s ohľadom na implementačnú efektivitu realizovaných výpočtov***. Na toto budete v texte upozornení.

Je vhodné nezostať len u tohto materiálu, ale pozrieť sa i na ďalšie informačné zdroje uvedené v zozname literatúry.

Pre odskúšanie si danej problematiky môžete používať prostriedky podľa Vášho uváženia. Ja navrhujem programovací nástroj [Octave](#). Je to voľne šíriteľný variant veľmi úspešného a často používaného nástroja [MatLab](#). Používaný programovací jazyk intenzívne využíva maticové operácie. Na stránkach [Octave](#) je prehľadný manuál, v predkladanom texte nájdete ukážkové zdrojové texty, takže predpokladám, že by nemal byť problém pri pochopení syntaxe použitého programovacieho jazyka ako i samotných aplikácií.

## 2 Počiatočný komentár k pojmu krivka

### V tejto kapitole sa dozviete:

- prečo pre pojem krivky nestačí podmienka spojitosti,
- niečo o základnom koncepte matematického aparátu generovania kriviek,
- prečo nie je vhodné “požičať si“ nápad, ako generovať krivky, z regresnej analýzy.

### Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- naprogramovať si svoju prvú krivku spôsobom, ako sa používa v grafických systémoch.

### Kľúčové slová tejto kapitoly:

krivka, spojitosť, hladkosť, váhová funkcia.

**Náročnosť kapitoly: táto kapitola patrí medzi technicky jednoduchšie.**

### **Sprievodca štúdiom**

*V tejto kapitole je ukázané, že pre zavedenie pojmu krivka je okrem spojitosti nutné uvažovať i hladkosť – čo je fundamentálna vec, ktorá sa bude objavovať v celom tomto texte. Ďalej je vysvetlený základný formalizmus – krivka ako vážený priemer svojich riadiacich bodov. Nakoniec je konfrontovaný tento prístup s regresným prístupom.*



Krivku intuitívne chápeme ako stopu, ktorá vznikne v dôsledku spojitého pohybu bezrozmerného bodu<sup>1</sup>. Je to objekt, u ktorého má zmysel uvažovať atribút *dĺžka* a nemá zmysel uvažovať atribút *plocha*.

Okrem dĺžky nás zaujímajú také vlastnosti, ako *hladkosť*, čo znamená, že krivka v žiadnom bode nemení svoj smer „skokom“ ale „postupne“. Ďalšou charakteristikou je napr. *krivosť*, tj. zjednodušene povedané, možnosť lokálne nahradiť krivku kružnicou (krivosť súvisí s polomerom nahradzujúcej kružnice). Tento prístup ku generovaniu

<sup>1</sup> Pri snahe o presnejší formálny popis však narazíme na problémy. Ukazuje sa, že podmienka spojitosti nepostačuje – je nutné predpokladať *hladkosť vo väčšine bodov*. Už pred viac ako 100 rokmi matematici skonštruovali podivne sa chovajúce krivky. Napr. [Kochova krivka](#) (1904) je príkladom krivky, ktorá nie je hladká v žiadnom zo svojich bodov. Navyše, má nekonečnú dĺžku, pričom ohraničuje konečne veľkú plochu. Takéto útvary získali veľkú popularitu pred zhruba 15-timi rokmi – útvary s fraktálnou dimenziou  $D$ ,  $1 < D < 2$ , tj. niečo medzi krivkami ( $D=1$ ) a plochami ( $D=2$ ). Existujú dokonca krivky (Peano), ktorých fraktálna dimenzia je 2, tj. úplne pokrývajú vymedzenú plochu.

Z hľadiska matematického ide o útvary, ktoré generujeme postupne – iteratívne. Limitný stav, ku ktorému daná iteračná schéma konverguje, má ale vlastnosti principiálne iné, ako členy danej postupnosti. Z hľadiska informatického je v tomto kontexte užitočné si uvedomiť, že nie každý výpočtový proces, ktorý skonverguje v konečnom čase, dáva rozumný výsledok. Viac v kap. 6.6.

krivky, tj. nahraď ju (aspoň približne) lokálne napr. časťami kružníc, je veľmi dôležitý z pohľadu formálneho zápisu, resp. popisu zložitej krivky.

## 2.1 Používaný aparát

Kým v „predpočítačovej“ ére boli hlavnými *konštrukčnými* nástrojmi pre tvorbu kriviek kružidlo a pravítko, výpočtová technika toto veľmi razantne zmenila. Dnes sú SW nástroje pre generovanie kriviek a plôch založené na takej reprezentácii, v ktorej bod krivky  $P$  reprezentujeme ako lineárnu kombináciu vopred zadaných riadiacich bodov  $P_0, P_1, \dots, P_n$ ,

$$P = w_0 P_0 + w_1 P_1 + \dots + w_n P_n. \quad (2.1)$$

Pritom vzťahom (2.1) rozumieme tri vzťahy:

$$x = w_0 x_0 + w_1 x_1 + \dots + w_n x_n$$

$$y = w_0 y_0 + w_1 y_1 + \dots + w_n y_n$$

$$z = w_0 z_0 + w_1 z_1 + \dots + w_n z_n$$

kde  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  sú riadiace body, ktoré sú plne v kompetencii používateľa.

Pomocou nich užívateľ vytvára *konkrétny tvar* výslednej krivky.

Generovanie koeficientov  $w_i \in R$  nie je spojené s konkrétnymi hodnotami riadiacich

bodov. Tieto koeficienty definujú *všeobecné vlastnosti*, ktoré krivka musí spĺňať.

Mechanizmus manipulácie s (2.1) je zvolený tak, že k riadiacim bodom má používateľ priamy prístup tým, že ich sám určuje. Pritom vidíme, že každá súradnica sa spracováva rovnakým spôsobom. Ku koeficientom  $w_0, w_1, \dots, w_n$  je prístup len nepriamy, tým, že používateľ volí *typ krivky*, ktorú používa.

Vyššie uvedená konštrukcia je ilustrovaná príkladmi 2.1, 2.2.

Je dôležité si uvedomiť, že vzťah (2.1) je lineárny, tj. väzba medzi riadiacimi bodmi a výsledným bodom krivky je najjednoduchšia možná. Napriek tomu má táto konštrukcia dostatočnú vypovedaciu schopnosť. Natolko silnú, že všetky dnešné grafické systémy sú založené práve na takomto lineárnom vzťahu (2.1).

Linearita vzťahu, tj. fakt, že platí

$$L(P) = L(w_0 P_0 + w_1 P_1 + \dots + w_n P_n) = w_0 L(P_0) + w_1 L(P_1) + \dots + w_n L(P_n), \quad (2.2)$$

je navyše dôležitá tým, že takto generované krivky sú invariantné voči lineárnym transformáciám (tj. takým, ktoré sa vyjadrujú maticovým násobením). Znamená to, že





transformovanú krivku dostaneme tak, že pôvodné váhy aplikujeme na transformované riadiace body. Napríklad keď krivku, ktorá je generovaná vzťahom (2.1) chceme rotovať, stačí rotovať riadiace body a na ne aplikovať pôvodný vzťah (2.1).

Keď sa vrátíme k chápaniu krivky ako k stope pohybu bodu, do vzťahu (2.1) musíme dostať časovú závislosť. Ľavá strana je jasná – má tvar  $P(t)$ . Otázkou je, čo na pravej strane bude časovo závislé: riadiace body? Alebo váhy? Alebo oboje? Z hľadiska jednoduchosti komunikácie používateľa so systémom je rozumné riadiace body ponechať čo najjednoduchšie, tj. konštantné. Časovú závislosť preto vložíme do váhových koeficientov:

$$P(t) = w_0(t)P_0 + w_1(t)P_1 + \dots + w_n(t)P_n. \quad (2.3)$$

Znamená to, že zmena polohy bodu je určená zmenou váhových koeficientov.

### Príklad 2.1:

Uvažujme (2.3) s dvomi riadiacimi bodmi  $P_0$ ,  $P_1$  a dvoma váhovými funkciami

$$w_0 = (1-t), \quad w_1 = t. \quad (2.4)$$

Dostávame tak vzťah

$$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1,$$

resp. prepísané do iného tvaru,

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0).$$

Posledný vzťah nie je nič iné, ako parametrický tvar priamky. Pri obmedzení sa na  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  dostávame úsečku. To, že výsledkom je úsečka, je dané váhami (2.4).

Konkrétny tvar úsečky je daný krajnými bodmi  $P_0$ ,  $P_1$ . ■

### Príklad 2.2:

Uvažujme (2.3) s tromi riadiacimi bodmi

$$P_0=(1,0), \quad P_1=(1,1), \quad P_2=(0,1) \quad (2.5)$$

a tromi váhovými funkciami

$$w_0 = \frac{(1-t)^2}{1+t^2}, \quad w_1 = \frac{2(1-t)t}{1+t^2}, \quad w_2 = \frac{2t^2}{1+t^2}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.6)$$

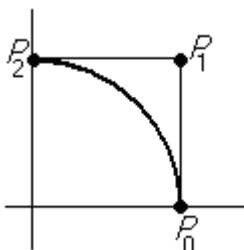
Dostávame tak vzťah

$$P(t) = \frac{(1-t)^2}{1+t^2} P_0 + \frac{2(1-t)t}{1+t^2} P_1 + \frac{2t^2}{1+t^2} P_2,$$

resp. rozpísané do súradníc (s využitím konkrétne určených riadiacich bodov),

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.7)$$

Výsledkom je 1/4-kružnica – Obr.1. Presný dôkaz toho, že ide skutočne o časť kružnice, bude uvedený neskôr.



Obr. 2.1. Štvrt' kružnica ako krivka typu (2.3) s vyznačenými riadiacimi bodmi.

■

## 2.2 Väzba medzi riadiacimi bodmi a krivkou

### Interpolácia vs. aproximácia

V prípade, že krivka riadiacimi bodmi prechádza, hovoríme o *interpolácii*. Typickým príkladom je napr. lineárne lomená čiara – vid' príklad 2.1.

V príklade 2.2 vidíme, že krivka prechádza bodmi  $P_0, P_2$ , ale neprechádza bodom  $P_1$ .

V obecnom prípade krivka nemusí prechádzať žiadnym svojim riadiacim bodom.

V tomto prípade hovoríme o *aproximácii* krivky.

### Lokálna vs. globálna väzba

Uvažujme napr. lineárne lomenú čiaru definovanú bodmi  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_n$ .

V prípade, že budeme hýbať riadiacim bodom  $P_2$ , výsledná lineárne lomená čiara sa bude meniť len medzi riadiacimi bodmi  $P_1, P_3$ . V ostatných svojich častiach zostane krivka nezmenená. Vidíme, že *zmena polohy riadiaceho bodu má len lokálny, ale silný vplyv* na výslednú krivku – obr.2.2.

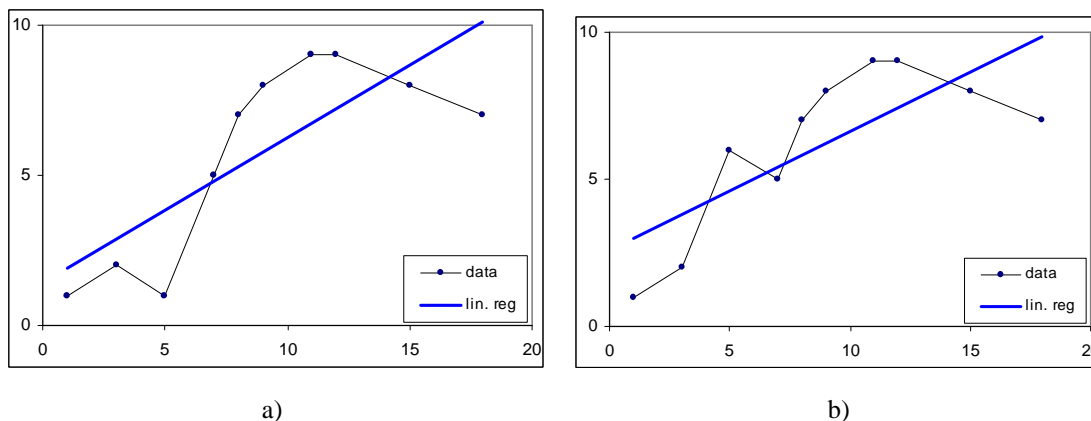
S konštrukciou kriviek sa môžeme stretnúť v mnohých disciplínach aplikovanej matematiky. Napr. v regresnej analýze sa často používa metóda najmenších štvorcov, kde aproximujeme množinu bodov „najlepšou“ priamkou, pritom mierou blízkosti sa uvažuje kvadrát y-ovej odchýlky bodov od prekladanej priamky.

Obr.2.2 a) a b) zobrazuje lineárne lomené čiary a regresné krivky pre súbory bodov

$\{ (x,y_1) \}$  a  $\{ (x,y_2) \}$  z tab.2.1.

<b>X</b>	1,00	3,00	5,00	7,00	8,00	9,00	11,00	12,00	15,00	18,00
<b>y1</b>	1,00	2,00	1,00	5,00	7,00	8,00	9,00	9,00	8,00	7,00
<b>y2</b>	1,00	2,00	6,00	5,00	7,00	8,00	9,00	9,00	8,00	7,00

Tab.2.1.



Obr.2.2. Citlivosť zmeny výslednej krivky na zmenu riadiacich bodov.

Oba súbory sa líšia polohou jediného bodu (tretí zľava). Lineárne lomená čiara sa zmenila len lokálne (medzi 2. a 4. bodom) ale výrazne, kým regresná priamka sa zmenila globálne z

$$y = 0.481x + 1.418$$

na

$$y = 0.403x + 2.61.$$

Pritom vidíme, že smernica priamky sa zmenila len nepodstatne.

Generovanie kriviek ako nástroj interaktívneho modelovania rôznych tvarov vyžaduje lokálnu, ale silnú citlivosť výslednej krivky na riadiacich bodoch. Preto aparát, ktorý sa k tomu bude používať, bude viac podobný konštrukcii lineárne lomenej čiary ako aparátu regresnej analýzy. V najvšeobecnejšej forme sa tento aparát formuluje ako NURBS – **N**e**U**niformné **R**acionálne **B**-**S**plajny. Nasledujúce kapitoly ozrejmujú každé z týchto piatich písmen.



**Kontrólne otázky a samostatné úlohy**

1. Vyhľadajte na internete informácie o Kochovej krivke. Ukážte, že má nekonečnú dĺžku.
2. V príklade 2.2 zostrojte krivku pre obecnjšie zadaný interval parametra  $t$ .

### 3 Interpolačný polynóm a splajn

V tejto kapitole sa dozviete:

- čo je to interpolačný polynóm,
- dva spôsoby toho, ako sa interpolačný polynóm vytvára,
- aké problémy vznikajú pri generovaní kriviek s použitím interpolačného polynómu, s vysvetlením, prečo sa tak deje,
- čo je to splajn, tj. spôsob, ako nedostatok interpolačného polynómu vyriešiť.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- naprogramovať interpolačný polynóm dvojakým spôsobom,
- nájsť splajn s vopred stanovenými požiadavkami na hladkosť.

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

Interpolačný polynóm, splajn.

**Náročnosť kapitoly: táto kapitola patrí medzi stredne náročné.**

#### ***Sprievodca štúdiom***

*Kľúčová vec, na ktorú je treba sa v tejto kapitole sústrediť, je pochopiť dôvod toho, prečo sa interpolačný polynóm nechová podľa našich očakávaní. Veľmi dôležité sú riešené príklady 3.3—3.5. Pochopenie toho, čo sa v nich deje je podstatné pre ďalšie kapitoly.*



Otázkou, na ktorú chceme nájsť odpoveď v tejto kapitole je, či by nebolo postačujúce používať pre generovanie kriviek v dvojrozmernom priestore bežne známy aparát polynomickej funkcie v tvare

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (3.1)$$

tj. krivku vyjadrovať hľadáním priameho vzťahu medzi súradnicami.

V tejto kapitole ukážeme:

1. podmienky existencie interpolačného polynómu,
2. dva spôsoby, ako možno efektívne nájsť interpolačný polynóm,
3. nedostatky ktoré interpolačné polynómy majú,
4. spôsob, ako vyššie uvedený nedostatok eliminovať.

#### 3.1 Existencia interpolačného polynómu

Uvažujme riadiace body  $P_0, P_1, \dots, P_m$ , kde  $P_i = (x_i, y_i)$ . Chceme nájsť interpolačný polynóm (3.1) ktorý týmito bodmi prechádza. Hľadáme koeficienty  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Dosadením súradníc do (3.1) dostávame sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= y_0 \\
 a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= y_1 \\
 &\dots \\
 a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 + \dots + a_nx_m^n &= y_m
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ktorá má v maticovom zápise tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Maticu sústavy (3.3) nazývame *Vandermondova matica*. Z lineárnej algebr vieme, že sústava (3.2) resp. (3.3) má práve jedno riešenie v prípade, že matica sústavy je štvorcová, tj.  $n=m$  a zároveň jej determinant je nenulový. V každej rozumnej učebnici lineárnej algebr nájdete demonštráciu toho, že determinant Vandermondovej matice má hodnotu

$$V = \prod_{\substack{i=1, \dots, n, \\ j < i}} (x_i - x_j).$$

Z toho plyne, že keď riadiace body sú také, že žiadne dva nemajú rovnakú  $x$ -súradnicu, sústava (3.3) je jednoznačne riešiteľná. Ináč povedané, pre ľubovoľnú postupnosť  $n+1$  riadiacich bodov takých, že žiadne dva nemajú rovnakú  $x$ -ovú súradnicu, existuje práve jeden interpolačný polynóm stupňa  $n$ .



### 3.2 Dve užitočné formy interpolačného polynómu

Z hľadiska konštrukcie interpolačného polynómu je dôležité, že ho môžeme zostrojiť i bez riešenia vyššie opísanej sústavy rovníc. Ukážeme dva rôzne spôsoby ako to dosiahnuť.

#### Lagrangeova forma interpolačného polynómu

Uvažujme systém polynómov

$$\Lambda_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j \neq i. \tag{3.4}$$

Očividne platí, že (3.4) je polynóm  $n$ -tého stupňa, pričom

$$\Lambda_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Preto

$$F(x) = \sum_{i=0}^n y_i \Lambda_i(x) \quad (3.5)$$

je taktiež polynóm  $n$ -tého stupňa. Navyiac ľahko sa možno presvedčiť, že  $F(x_i) = y_i$ , z čoho plynie, že (3.5) je hľadaný interpolačný polynóm.

**Príklad 3.1:** Uvažujme štyri riadiace body

$$P_0 = (-2, -8), P_1 = (0, 0), P_2 = (3, 12), P_3 = (4, 40).$$

Nájdeme Lagrangeovu formu interpolačného polynómu.

*Riešenie:* Funkcie (3.4) majú v tomto prípade tvar

$$\Lambda_0(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(-2-0)(-2-3)(-2-4)} = -\frac{x(x-3)(x-4)}{60},$$

$$\Lambda_1(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-4)}{(0+2)(0-3)(0-4)} = \frac{(x+2)(x-3)(x-4)}{24},$$

$$\Lambda_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(3+2)(3-0)(3-4)} = -\frac{(x+2)x(x-4)}{15},$$

$$\Lambda_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-3)}{(4+2)(4-0)(4-3)} = \frac{(x+2)x(x-3)}{24},$$

Hľadaný tvar interpolačného polynómu je

$$\begin{aligned} F(x) &= -8\Lambda_0(x) + 0\Lambda_1(x) + 12\Lambda_2(x) + 40\Lambda_3(x) \\ &= 2\frac{x(x-3)(x-4)}{15} - 4\frac{(x+2)x(x-4)}{5} + 5\frac{(x+2)x(x-3)}{3}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

■

### Newtonova forma interpolačného polynómu

Polynóm hľadáme v tvare

$$\begin{aligned} F(x) &= A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad + A_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + A_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

pričom  $F(x_i) = y_i$ .

Koeficienty  $A_i$  nájdeme postupným dosadzovaním súradníc riadiacich bodov do (3.7):

$$y_0 = A_0,$$

$$y_1 = A_0 + A_1(x_1 - x_0),$$

$$y_2 = A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

...

$$y_n = A_0 + A_1(x_n - x_0) + A_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + A_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})$$

Všimnite si, že v  $i$ -tom riadku sú hodnoty  $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}$  už známe.

**Príklad 3.2:** Pre riadiace body z príkladu 3.1 hľadáme interpolačný polynóm v Newtonovej forme.

*Riešenie:* (3.7) má pre naše riadiace body tvar

$$F(x) = A_0 + A_1(x+2) + A_2(x+2)(x-0) + A_3(x+2)(x-0)(x-3).$$

Postupným dosadzovaním súradníc riadiacich bodov dostávame

$$\begin{aligned} -8 &= A_0 && \Rightarrow A_0 = -8 \\ 0 &= A_0 + A_1(0+2) = -8 + 2A_1 && \Rightarrow A_1 = 4 \\ 12 &= A_0 + A_1(3+2) + A_2(3+2)(3-0) = -8 + 4 \cdot 5 + 15A_2 = 12 + 15A_2 && \Rightarrow A_2 = 0 \\ 40 &= A_0 + A_1(4+2) + A_2(4+2)(4-0) + A_3(4+2)(4-0)(4-3) \\ &= -8 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 \cdot 1A_3 = 16 + 24A_3 && \Rightarrow A_3 = 1 \end{aligned}$$

Hľadaný tvar interpolačného polynómu je preto

$$\begin{aligned} F(x) &= -8 + 4(x+2) + (x+2)(x-0)(x-3) = \\ &= x^3 - x^2 - 2x \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (3.8)$$



Necháva sa čitateľovi overiť, že (3.6) a (3.8) sú totožné.

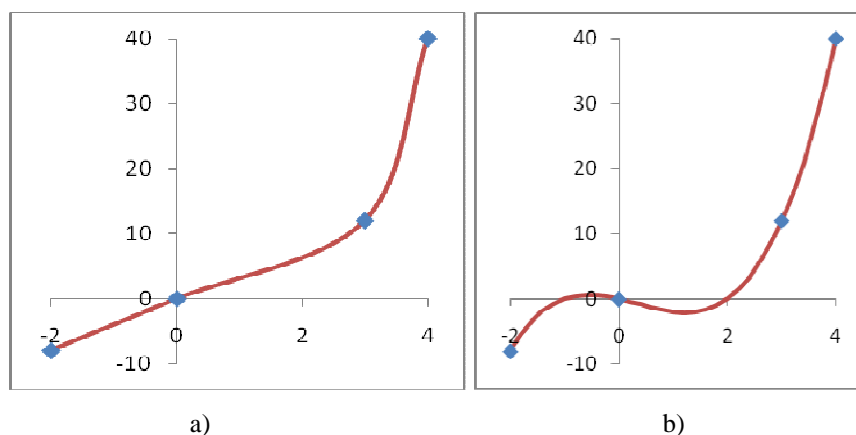
### 3.3 Geometrická reprezentácia interpolačného polynómu

Obr. 3.1 a) znázorňuje intuitívnu predstavu krivky, prechádzajúcej riadiacimi bodmi z príkladov 3.1, 3.2. Keďže body monotónne rastú, intuitívne cez takto volené body vieme interpolačnú krivku, ktorá je monotónne rastúca.

Prepis polynómu (3.8) do tvaru

$$F(x) = x(x+1)(x-2)$$

však hovorí, že uvedený interpolačný polynóm má tri nulové body,  $(-1,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  a preto nemôže byť monotónny, čo ilustruje obr. 3.1 b).



Obr. 3.1 Interpolačná krivka. a) intuitívna predstava o interpolačnej krivke, prechádzajúcej danými bodmi, b) kubický interpolačný polynóm.



Je otázkou, či tento nedostatok je len veľmi špeciálnym prípadom, alebo či sa také niečo stáva často.

### 3.4 Príčina kmitania interpolačného polynómu

Pozrime sa, ako vyzerajú prvé derivácie, tj. smernice dotyčníc v našich bodoch z príkladu 3.1. Derivácia funkcie (3.8) má tvar

$$y'(x) = 3x^2 - 2x - 2. \quad (3.9)$$

Znamená to, že v každom bode interpolačného polynómu je smernica dotyčnice jednoznačne určená. Napr. Tab. 3.1 ukazuje hodnotu smernice v definičných bodoch.

$x$	-2	0	3	4
$y'(x)$	14	-2	19	38

Tab. 3.1. Hodnoty prvej derivácie v bodoch z príkladu 3.1. je v nasledujúcej tabuľke.

Vzhľadom na zápornosť derivácie (3.9) na intervale

$$(1 - \sqrt{7})/3 \leq x \leq (1 + \sqrt{7})/3$$

je na ňom funkcia klesajúca. Pritom intuitívne predpokladáme (z monotónnosti riadiacich bodov) i monotónny priebeh funkcie. Vidíme tak, že z polohy bodov nie sme schopní intuitívne určiť správny priebeh prvých derivácií interpolačného polynómu.



Pokúsime sa objasniť príčinu toho zvlnenia. Z mechanického hľadiska môžeme funkciu interpretovať ako priebeh dráhy (v čase  $x$ ). Prvá derivácia je priebeh rýchlosti, druhá derivácia znamená priebeh zrýchlenia atď.



Polynomická funkcia stupňa  $n$  má  $n$  netriviálnych derivácií, ( $n+1$  derivácia je 0). Každá z nich je polynómom (stupeň sa pri derivovaní postupne znižuje), tj. každá z nich je spojitá funkcia. Dôležité je, že každá z derivácií je jednoznačne určená pôvodnou funkciou. Preto keď aplikujeme na množinu bodov polynomicкую interpoláciu, zároveň kladieme podmienku spojitosti na všetky derivácie, tj. na pohybové charakteristiky ako sú dráha, rýchlosť, zrýchlenie atď. Preto pohyb definovaný polynomickým predpisom sa chová podobne, ako pohyb veľkého, plne naloženého vozíka, ktorý je ťažko manévrovatelný, keď pri prechode slalomovými brámkami nemôžeme zrazu zmeniť

smer jeho pohybu, ani jeho rýchlosť. Práve spojitosť zmeny pohybových charakteristík nás núti robiť veľké oblúky.

Snaha zrušiť nechcený oblúk tým, že predpíšeme ďalší riadiaci bod, tj. v našom prípade dodáme napr. bod (1, 5) znamená, že v konečnom dôsledku zvolíme interpolačný polynóm 4. stupňa. Z mechanického hľadiska tým vlastne vyžadujeme silnejšie podmienky na spojitosť príslušných pohybových charakteristík. Čiže do slalomovej dráhy pridáme ďalšiu bránku, no a zároveň ešte naložíme do vozíka ďalší náklad. V dôsledku toho sa trajektória spravidla ešte viac rozkmitá.

### 3.5 Splajn

Východisko z vyššie ukázaného problému budeme hľadať tak, že krivku budeme konštruovať spájaním polynomických kriviek nižšieho stupňa. Pritom v samotnom napojení budeme vyžadovať, aby prechod od jednej krivky k ďalšej bol hladký. Takúto konštrukciu nazývame *splajn*.



Príslušné polynomické krivky nebudeme definovať len bodmi, cez ktoré chceme aby krivka prechádzala, ale budeme kombinovať požiadavky na body a smery v nich.

K ďalšiemu výkladu je nutné pripomenúť si pojmy *spojitosť* a *hladkosť* – vid' učebnice základov diferenciálneho počtu. Intuitívne vzato, *spojitosť* priebehu funkcie znamená, že v žiadnom zo svojich bodov sa funkčná hodnota nezmení skokom. To znamená, že spojitú čiaru vieme nakresliť „jedným ťahom“.

*Hladkosťou* rozumieme spojitosť prvých derivácií. Znamená to, že prvá derivácia, tj. sklon krivky (tj. smernica dotyčnice), sa nemení skokom, čiže na hladkej krivke nemáme „ostré rohy“. Napr. funkcia

$$y(x) = |x|. \quad (3.10)$$

je spojitá, ale v bode (0,0) nie je hladká keďže derivácia funkcie (3.10)

$$y'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ \text{ne def.} & x = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

je nespojitá v bode  $x=0$ ; smer funkcie (3.10) sa v bode (0,0) mení skokom z  $-1$  na  $+1$ .

Pojem hladkosť môžeme zovšeobecniť na hladkosť  $k$ -teho stupňa. Tým rozumieme spojitosť  $k$ -tych derivácií, pričom  $k+1$ -vé derivácie sú už nespojité. Z tohto pohľadu má funkcia (3.10) hladkosť 0-tého stupňa.

Presvedčte sa, že napr. funkcia

$$y(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

má hladkosť 1. stupňa. (V porovnaní s tým má funkcia  $y=x^2$  hladkosť 2. stupňa.)

Je nutné si uvedomiť, že vizuálne sme schopní rozpoznať u kriviek prostú spojitosť od hladkosti, vid' napr. funkcia (3.10), no nie sme schopní vizuálne rozpoznať hladkosti vyšších stupňov. (Tj. funkciu (3.12) vnímame ako hladkú, no nie sme schopní vizuálne rozpoznať to, že druhé derivácie sú už nespojité.) O rozpoznaní rôznych stupňov hladkosti sa zmienime neskôr.

Funkcia, ktorá vznikne spojením rôznych funkcií tak, aby v spojovacom bode bola zachovaná hladkosť  $k$ -teho stupňa, nazývame splajnom s hladkosťou  $k$ -tého stupňa.

Pod pojmom splajn  $n$ -tého stupňa bez špecifikácie jeho stupňa hladkosti budeme rozumieť po častiach polynomickeú funkciu stupňa  $n$ , ktorá v bodoch napojenia má hladkosť  $n-1$ . Pripomeňme si, že polynóm  $n$ -tého stupňa má hladkosť  $n$ -tého stupňa (vid' predchádzajúca kapitola).

Nebudeme detailne odvodzovať konštrukciu splajnu – to spravíme v ďalších kapitolách. Tu sa obmedzíme len na konkrétne príklady rôznych splajnov pre štvoricu riadiacich bodov  $P_0=(-2,-8)$ ,  $P_1=(0,0)$ ,  $P_2=(3,12)$ ,  $P_3=(4,40)$  z príkladu 3.1.

**Príklad 3.3** Vytvoríme splajn pozostávajúci z úsečky  $P_0P_2$ , a kvadratickej paraboly, ktorá obsahuje body  $P_2, P_3$ , tak, aby výsledná krivka bola hladká.

*Riešenie:* Vidíme, že body  $P_0, P_1, P_2$ , ležia na priamke

$$y_1(x) = 4x.$$

Hľadáme parabolu

$$y_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (3.13)$$

Z požiadavku, aby (3.13) prechádzala bodmi  $P_2, P_3$ , dostávame rovnice

$$\begin{cases} 12 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \\ 40 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

Hladké napojenie znamená, že smernica úsečky  $P_0P_2$  musí byť v bode napojenia, tj. v bode  $P_2$  zhodná so smernicou paraboly.

Keďže smernica krivky je daná jej deriváciou, znamená to, že v bode napojenia ( $x=3$ ) sú zhodné derivácie oboch kriviek  $y_1'(x) = 4$ ,  $y_2'(x) = a_1 + 2a_2x$ , tj.

$$y_1'(3) = y_2'(3),$$

z čoho dostávame požiadavku

$$4 = a_1 + 6a_2. \quad (3.15)$$

Riešením sústavy (3.14)-(3.15) dostávame výslednú parabolou

$$y(x) = 216 - 140x + 24x^2. \quad \blacksquare$$

**Príklad 3.4** Vytvoríme splajn pozostávajúci z dvoch, hladko spojených parabol: jedna je určená bodmi  $P_1, P_2, P_3$ , druhá prechádza bodmi  $P_0, P_1$ .

*Riešenie:* Dosadením súradníc bodov  $P_1, P_2, P_3$  do (3.13) dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + 0a_1 + 0a_2 \\ 12 &= a_0 + 3a_1 + 9a_2 \\ 40 &= a_0 + 4a_1 + 16a_2 \end{aligned}$$

Jej riešením je trojica  $a_0=0, a_1=-14, a_2=6$ .

Pre druhú parabolou máme dve rovnice (dosadením hodnôt súradníc bodov  $P_0, P_1$ )

$$\begin{aligned} -8 &= b_0 - 2b_1 + 4b_2 \\ 0 &= b_0 + 0b_1 + 0b_2 \end{aligned}$$

Tretia rovnica vyplýva z požiadavku hladkého napojenia. Keďže smernica prvej paraboly  $y'(x) = a_1 - 2a_2x$  v bode  $x=0$  je jednoznačne určená –  $y'(0) = -14$ , tú istú hodnotu požadujeme i pre smernicu druhej paraboly:

$$-14 = b_1 + 0b_2.$$

Riešením je trojica  $b_0=0, b_1=-14, b_2=-9$ . ■

Načrtnite si dané riešenie – zistíte, že výsledok je dokonca ešte horší, ako dáva interpolačný polynóm. Dôvodom toho je fakt, že sme dopustili podobný scénar ako v prípade interpolačného polynómu: v bode napojenia sme len pasívne použili deriváciu, jednoznačne determinovanú prvou parabolou.



**Príklad 3.5** Susedné dvojice riadiacich bodov prepojíme hladko postupne tromi kvadratickými parabolami  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ,  $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$ ,  $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ .

*Riešenie:* Keďže susedné riadiace body sú vždy na jednej parabole, dostávame nasledujúce rovnice.

$$\begin{aligned}
a_0 - 2a_1 + 4a_2 &= -8 \\
a_0 + 0a_1 + 0a_2 &= 0 \\
b_0 + 0b_1 + 0b_2 &= 0 \\
b_0 + 3b_1 + 9b_2 &= 12 \\
c_0 + 3c_1 + 9c_2 &= 12 \\
c_0 + 4c_1 + 16c_2 &= 40
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Z podmienky hladkosti napojenia susedných parabol máme ďalšie dva vzťahy, vyjadrujúce rovnosť prvých derivácií

$$\begin{aligned}
a_1 + 2a_2 \cdot 0 &= b_1 + 2b_2 \cdot 0 \\
b_1 + 2b_2 \cdot 3 &= c_1 + 2c_2 \cdot 3
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Vzhľadom na to, že máme osem rovníc a deväť neznámych, jednu z nich zvolíme ako parameter sústavy  $p$  ( $a_1=p$ ) a ostatné vyjadríme s jej pomocou. Z druhej a tretej rovnice v (3.16) dostávame  $a_0=b_0=0$ . Po týchto dosadeniach a elementárnych úpravách dostávame sústavu

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 = 0 \\
a_1 &= b_1 = p \\
p - 2a_2 &= 4 \\
p + 3b_2 &= 4 \\
c_0 + 3c_1 + 9c_2 &= 12 \\
c_0 + 4c_1 + 16c_2 &= 40 \\
p + 6b_2 &= c_1 + 6c_2
\end{aligned}$$

Riešením dostaneme výsledok

$$\begin{aligned}
(a_0, a_1, a_2) &= \left(0, p, \frac{p-4}{2}\right), \\
(b_0, b_1, b_2) &= \left(0, p, \frac{4-p}{3}\right), \\
(c_0, c_1, c_2) &= (168+12p, -112-7p, 20+p).
\end{aligned}$$

■

Príklady 3.3–3.5 ukazujú, že i pre rovnaké požiadavky na výslednú hladkosť splajny sa môžu chovať veľmi rôzne. Jednak nemusia byť jednoznačne určené (príklad 3.5), jednak môžu mať i horšie vlastnosti ako interpolačný polynóm (príklad 3.4). Celý ďalší text je venovaný práve konštrukcii splajnov s vopred bližšie špecifikovanými vlastnosťami.



### Kontrólne otázky a samostatné úlohy

1. Realizáciu Newtonovej formy kubického interpolačného polynómu nájdete v [spline1.m](#). Sami zrealizujte interpolačný polynóm v Lagrangeovej forme. Porovnajte obe formy a zamyslite sa nad tým, ktorá forma je výpočtovo efektívnejšia.
2. Realizujte interpolačný polynóm 3. stupňa. Pokúste sa kmitanie polynómu z príkladu 3.1 potlačiť dodaním ďalšieho riadiaceho bodu.
3. Zobrazte nájsené splajny z príkladov 3.3–3.5 a porovnajte s interpolačným polynómom (3.8).

## 4 Polynomická parametrizácia kriviek

V tejto kapitole sa dozviete:

- prečo je vhodný parametrický prístup k modelovaniu kriviek,
- ako sa asociativita násobenia matíc dá využiť pre jeho efektívnu implementáciu,
- čo je to parametrická a geometrická hladkosť – aký je medzi nimi vzájomný vzťah.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- efektívnym spôsobom naprogramovať všeobecnú parametrickú krivku.

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

Geometrická a parametrická hladkosť, násobenie matíc, asociativita operácie.

**Náročnosť kapitoly: táto kapitola patrí medzi ľahšie.**

### *Sprievodca štúdiom*

*V tejto kapitole sú dve podstatné veci:*

- 1. efektívnosť implementácie parametrických kriviek – toto je veľmi dôležité pre profesionálnu implementáciu kriviek,*
- 2. vzťah parametrickej a geometrickej hladkosti – toto je veľmi dôležité pre správne aplikačné využitie.*



V tejto kapitole skonfrontujeme prístupy z dvoch predošlých kapitol. Uvidíme, že parametrický prístup je vhodnejší. Ukážeme ako efektívne implementovať parametrické vyjadrenie krivky. Zavedieme pojmy *parametrická hladkosť* a *geometrická hladkosť* a vysvetlíme vzťah medzi nimi.

### 4.1 Implementačné problémy priamej polynomickej reprezentácie

V predošlej kapitole sme ukázali nevhodnosť použitia interpolačného polynómu a naznačili možné východisko. No nezodpovedali sme na otázku, či existuje vhodná polynomická splajnová konštrukcia v súradniciach  $x, y$  na vyjadrenie kriviek pre interaktívne modelovanie. Odpoveď je: **Tento prístup nie je to vhodný!**

Dôvody sú minimálne dva nasledujúce.

1. Skúsme napr. rotovať parabolou štvrtého stupňa  $y = x^4$ . Keďže rotácia je daná rovnicami

$$x' = cx - sy, \quad y' = sx + cy$$

kde  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ , výsledné vyjadrenie paraboly je



$$c^4 x^4 - 4c^3 s x^3 y + 6c^2 s^2 x^2 y^2 - 4cs^3 x y^3 + s^4 y^4 = sx + cy,$$

ktoré nie sme schopní previesť do *explicitného tvaru* (tj. vyjadriť  $y$  ako funkciu premennej  $x$ ).

2. Prechod z 2D do 3D nie je priamočiary: funkcia v tvare  $z = f(x, y)$  nie je krivka, ale plocha. Krivku by sme museli reprezentovať sústavou dvoch rovníc

$$\begin{cases} z = f_1(x, y) \\ z = f_2(x, y) \end{cases},$$

čo je dosť nepohodlné<sup>2</sup>.

Napriek tomu predošlá kapitola nebola zbytočná. Obohatení o vedomosti o vlastnostiach polynomickej, resp. splajnovej reprezentácie vrátime sa k úvahám z kap. 2.1.

Krivku budeme reprezentovať tak ako bolo uvedené v kap.2, v tvare (2.3), kde váhy  $w_i(t)$  sú polynomicke funkcie. Tj. každú zo súradníc vyjadríme ako polynóm závisiaci od „časového“ parametra  $t$ ,<sup>3</sup>

$$\begin{cases} x(t) = w_0(t)x_0 + w_1(t)x_1 + \dots + w_n(t)x_n \\ y(t) = w_0(t)y_0 + w_1(t)y_1 + \dots + w_n(t)y_n \end{cases},$$

a v 3-rozmernom prípade ešte

$$z(t) = w_0(t)z_0 + w_1(t)z_1 + \dots + w_n(t)z_n.$$

Taká reprezentácia jednak robí všetky priestorové súradnice rovnocenné, jednak nepredstavuje žiaden problém pri prechode od 2D k 3D. Navyiac, ako sme sa zmienili v kap. 2.1, takto generované krivky sú invariantné voči lineárnym transformáciám.

## 4.2 Výpočtová efektivita

Uvažujme napr.  $n = 2$  a váhové funkcie

$$w_0(t) = (1-t)^2, \quad w_1(t) = 2(1-t)t, \quad w_2(t) = t^2. \quad (4.1)$$

$x$ -ová súradnica vzťahu (2.1) má v tomto prípade tvar

$$x(t) = (1-t)^2 x_0 + 2(1-t)t x_1 + t^2 x_2. \quad (4.2^1)$$

Priama implementácia v syntaxi jazyka C vyzerá nasledujúco:

```
for (t=0; t<=1; t+=d; )
{ w0 = (1-t)**2;
```

<sup>2</sup> V počítačovej grafike sa používa štruktúra *okridlená hrana*, keď hranu objektu reprezentujeme ako prienik dvoch susedných povrchov. V kontexte CAGD aplikácií však toto nie je vhodné.

<sup>3</sup> Až do konca textu predpokladáme (keď to nebude výslovne uvedené ináč) že časový parametre  $t$  je v intervale  $0 \leq t \leq 1$ .



```

w1 = 2*(1-t)*t;
w2 = t**2;
x = w0*x0 + w1*x1 + w2*x2;
}

```

Keď roznásobíme váhové funkcie a združíme dohromady členy s rovnakou mocninou pri  $t$ , z (4.1) dostávame:

$$x(t) = (1-t)^2 x_0 + 2(1-t)t x_1 + t^2 x_2 = x_0 + 2(x_1 - x_0)t + (x_0 - 2x_1 + x_2)t^2. \quad (4.2^2)$$

Teraz dostávame efektívnejší zdrojový text:

```

xx=2*(x1-x0); xxx=(x0-2*x1+x2);
for(t=0; t<=1; t+=d;)
{ tt=t*t;
  x = x0 + xx*t + xxx*tt;
}

```

Tvary (4.2<sup>1</sup>) resp. (4.2<sup>2</sup>) prepíšeme do maticového tvaru.

$$x(t) = \begin{pmatrix} w_0(t) & w_1(t) & w_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv T M X \quad (4.3^x)$$

Pre súradnicu  $y(t)$  resp.  $z(t)$  je tvar analogický – v skrátenej „vektorovej“ forme tak máme

$$P(t) = \begin{pmatrix} w_0(t) & w_1(t) & w_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \equiv T M \Pi \quad (4.3)$$

Maticový tvar zápisu (4.3) prirodzeným spôsobom vzájomne oddeľuje

- vektor polynomickej parametrizácie  $T$ ,
- maticu  $M$ , ktorá charakterizuje použité váhové funkcie,
- množinu riadiacich bodov  $\Pi$ , ktoré konkretizujú výsledný tvar krivky.

Kým prvému zdrojovému textu odpovedá v (4.3<sup>x</sup>) poradie násobenia  $(TM)X$ , druhému odpovedá poradie  $T(MX)$ . Je treba si uvedomiť, že v cykle algoritmu sa mení len  $T$ . Aktuálnu hodnotu  $x(t)$  získame preto pre tvar  $(TM)X$ , až po dvoch maticových násobeniach:  $A(t) = TM$ ;  $x(t) = A(t)X$ .



V prípade (4.3) v tvare  $T(MX)$ , násobenie  $B = MX$  spravíme len jeden krát pred cyklom a v cykle realizujeme vždy už len jedno násobenie  $x(t)=TB$  – koniec koncov, druhý zdrojový text toto potvrdzuje.

To, čo sme demonštrovali na konkrétnom príklade ide samozrejme realizovať pre ľubovoľnú sadu polynomických váhových funkcií.

### 4.3 Váhové, či bázové funkcie?

V tvare (2.3) sa o funkciách  $w_i(t)$  často hovorí nie ako o *váhových*, ale ako o *bázových* funkciách. Oboje je správne. Pohľad na ne ako na váhové funkcie sme používali v predošlých kapitolách. Druhá interpretácia – *bázové* funkcie je vysvetliteľná z tvaru (4.3). Mocniny  $1 = t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$  môžeme považovať za nezávislé funkcie, pretože nemožno vyjadriť mocninu  $k$ -tého stupňa ako konečnú lineárnu kombináciu mocnín iných stupňov. Tieto mocninové funkcie teda hrajú takú istú úlohu, ako bázové vektory v Euklidovom priestore. V geometrii môžeme prejsť od jednej bázy k inej tak, že prenášobíme bázové vektory regulárnou maticou (tj. maticou s nenulovým determinantom). Keď sa pozrieme na maticu  $M$  v (4.3) vidíme, že je regulárna. (Spočítajte sami jej determinant, a zamyslite sa nad tým, z čoho to „očividne“ vyplýva.) Z tohto uhlu pohľadu môžeme vzťah

$$(w_0(t) \ w_1(t) \ w_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \equiv T M$$

v (4.3) interpretovať ako prechod k inej sade bázových funkcií.

Tento prístup však v kontexte nášho výkladu nepotrebujeme. Vystačíme si s (možno) jednoduchšou pôvodnou interpretáciou  $w_i(t)$  ako váhových funkcií a preto u nej i naďalej zostaneme.

### 4.4 Hladkosť v parametrickom tvare

Prechod k parametrickému tvaru znamená vo svojej podstate zvýšenie dimenzie úlohy o jeden rozmer. Namiesto geometrických súradníc  $x, y$  uvažujeme ešte ďalšiu súradnicu  $t$ , ktorej sme v kap. 2 dali „časovú“ reprezentáciu. V tejto kapitole sa obmedzíme pre jednoduchosť len na 2-rozmerný prípad geometrických súradníc. Preto náš pracovný priestor je v tomto prípade 3-rozmerný s osami  $t, x, y$ . Z vyššie uvedeného vyplýva, že každá z geometrických súradníc je polynomická funkcia,  $P(t) = (x(t), y(t))$ , kde jej



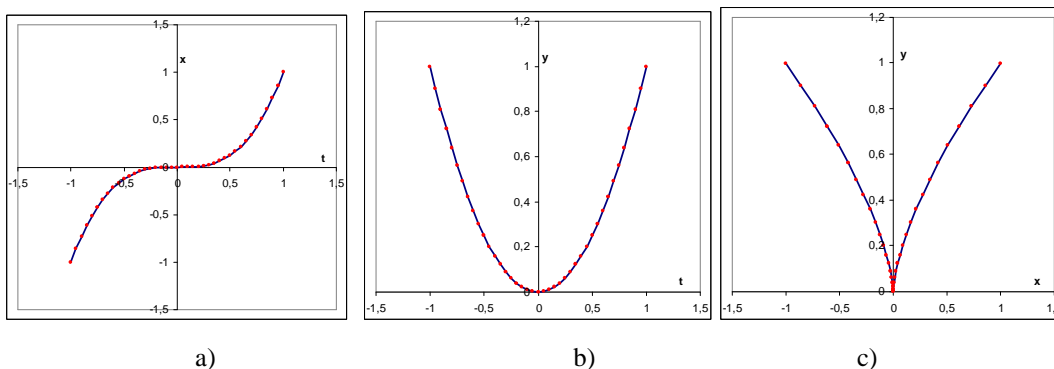
stupeň je daný váhovými funkciami. Krivky  $x(t)$  a  $y(t)$  sú projekcie do rovín  $tx$ , resp.  $ty$ . Na ne sa plne vzťahujú mechanizmy fungovania popísané v predošlých kapitolách. O hladkosti týchto polynomických funkcií hovoríme ako o *parametrickej hladkosti* výslednej krivky. Derivácia, definovaná ak derivácia jednotlivých zložiek  $P'(t) = (x'(t), y'(t))$  určuje smerový vektor v bode krivky  $P(t)$ . Pripomeňme si, že v projekčných rovinách  $tx$  resp.  $ty$  derivácie  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  určujú smernice dotyčníc funkcií  $x(t)$  a  $y(t)$ , čiže projekcie smerového vektoru krivky v priestore  $txy$ .

Keď chceme vedieť výsledný geometrický tvar krivky, hľadáme vlastne projekciu trojrozmernej krivky  $P(t) = (x(t), y(t))$  (v súradniciach  $txy$ ) do roviny  $xy$ . Hladkosť tejto projekcie nazývame *geometrická hladkosť*.

Parametrická hladkosť však nie je s geometrickou hladkosťou spojená tak priamočiaro a jednoducho, ako by sa mohlo intuitívne zdať. Napr. krivka

$$P(t) = (x(t), y(t)) = (t^3, t^2), \quad -1 \leq t \leq 1$$

je parametricky hladká všade – obr. 4.1 a-b), no v bode  $(0,0)$  nie je geometricky hladká – obr. 4.1c).



Obr. 4.1 Parametrická hladkosť súradnicových funkcií a)  $x(t) = t^3$  a b)  $y(t) = t^2$ .  
c) Krivka  $P(t) = (x(t), y(t)) = (t^3, t^2)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  v súradniciach  $xy$ .

Tento rozpor je vysvetliteľný tak, že trajektória je síce geometricky nehladá, ale pohyb bodu po krivke hladký je: pri priblížení sa k  $(0,0)$  rýchlosť pohybu postupne klesá až na nulu, t.j. v samotnom bode  $(0,0)$  sa pohybujúci bod na chvíľku zastaví aby sa vzápätí zas začal pomaly hýbať.

Formálne vysvetlenie dáva analýza derivácie. V prípade parametrického vyjadrenia určujeme deriváciu geometrickej súradnice  $y$  v závislosti na súradnici  $x$  na základe derivovania zloženej funkcie, s využitím vzťahu pre deriváciu inverznej funkcie:



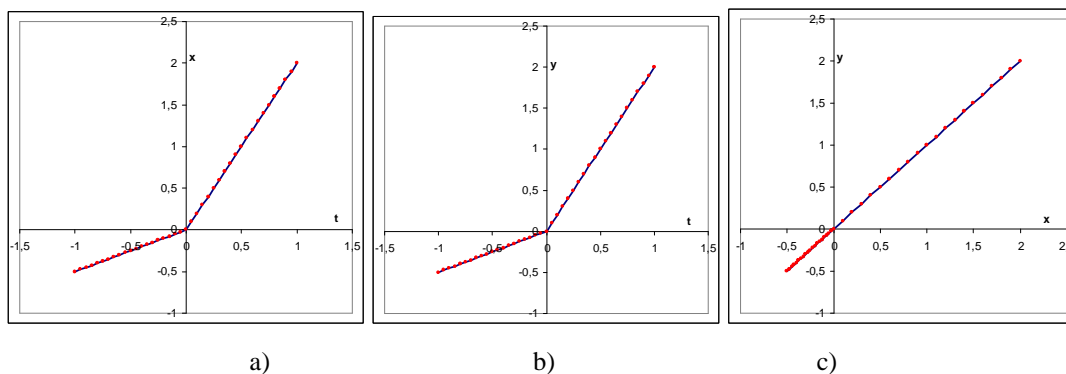
$$y'_x(x) = \frac{dy}{dx} = y'_t(t(x))t'_x(x) = y'_t(t(x)) \frac{1}{x'_t(t)} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}. \quad (4.4)$$

Vo vyjadrení (4.4) sú dva sporné momenty. Čo keď existuje taká hodnota parametru  $t$ ,  $t=t^*$  že:

1.  $x'(t^*)=0$ ,  $y'(t^*)=0$ ? V takom prípade vôbec nemáme problém s parametrickou hladkosťou, no pre geometrickú hladkosť (tj. pre deriváciu  $y'(x)$ ) dostávame výraz typu  $\frac{0}{0}$ , čo môže spôsobiť (a aj skutočne spôsobuje – vid' príklad z obr.4.1–4.2) problém. Krivku u ktorej máme zaručené, že toto nenastáva (tj. že neexistuje také  $t^*$  že  $x'(t^*)=0$ ,  $y'(t^*)=0$ ), nazývame *regulárna krivka*.
2.  $x'(t^*)$ ,  $y'(t^*)$  neexistujú, no „nehladkosť sa vzájomne vyruší“ takým spôsobom, že  $y'_x(x)$  existuje? Jednoduchý príklad takejto krivky je napr. (obr. 4.3–4.4)



$$P(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (0.5t, 0.5t) & -1 \leq t \leq 0 \\ (2t, 2t) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}. \quad (4.5)$$



Obr. 4.2 a) – b) Parametricky nehladké funkcie  $x(t)$ ,  $y(t)$ , (4.5).  
c) Výsledná, geometricky hladká krivka  $y(x)$ .

Vidíme (obr. 4.2), že pre záporné hodnoty súradníc je pohyb pomalší (body sú viac nahustené). V bode (0,0) sa rýchlosť mení skokom, pričom geometricky trajektória zostáva hladká.

V nasledujúcich kapitolách keď budeme hovoriť o hladkosti, budeme mať na mysli spravidla parametrickú hladkosť.

## Kontrólne otázky a samostatné úlohy

1. Upravte rovnicu priamky do maticového tvaru (4.3).

2. Generujte krivky  $P(t) = (x(t), y(t)) = (t^m, t^n)$ . Pre akú dvojicu  $m, n$  dostaneme v bode  $(0,0)$  geometricky hladkú krivku?
3. Ako vyzerá parametrická krivka, keď pre niektorú hodnotu parametra  $t$  je práve jedna z derivácií  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  rovná nule?

## 5 Fergusonov splajn

V tejto kapitole sa dozviete:

- ako zúročiť znalosti z predošlých kapitol k tomu, aby sme hľadaný splajn našli bez nutnosti konštruovať a riešiť sústavu lineárnych rovníc,
- aké sú základné vlastnosti Fergusonovej krivky.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- naprogramovať Fergusonov splajn.

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

Fergusonova kubika, Fergusonov splajn.

**Náročnosť kapitoly:** táto kapitola patrí medzi ľahšie.

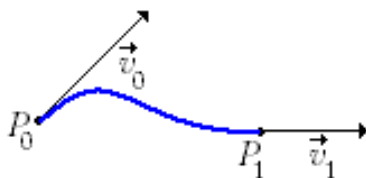
### Sprievodca štúdiom

V tejto kapitole ukážeme alternatívny prístup k postupu vytvárania splajnov, ktorý bol demonštrovaný v kap. 3.5. Uvidíme, že nebudeme musieť zostavovať a riešiť príslušnú sústavu rovníc – hľadané váhové funkcie dostaneme priamo, nezávisle na riadiacich bodoch.



Ako sme už zmienili skôr (kap. 3.5), hlavný problém interpolačného polynómu je v tom, že pri zadaní bodov cez ktoré má krivka prechádzať, derivácie (čiže smery) sú určené jednoznačne, ale tieto smery intuitívne nie sme schopní odhadnúť. Preto rozumnejší spôsob zadania napr. kubickej interpolácie je nezadávať 4 body cez ktoré má krivka prechádzať, ale zadať pozíciu oboch krajných bodov a hodnoty derivácií v týchto bodoch (tj. predpísaných smerov v týchto bodoch). Budeme hľadať krivku v parametrickom tvare

$$P(t) = w_0(t)P_0 + w_1(t)P_1 + w_2(t)\vec{v}_0 + w_3(t)\vec{v}_1. \quad (5.1)$$



Obr. 5.1 Vstupné parametre pre Fergusonovu krivku.

Vychádzame z toho, že

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0, & x(1) &= x_1, & x'(0) &= x_2, & x'(1) &= x_3, \\
y(0) &= y_0, & y(1) &= y_1, & y'(0) &= y_2, & y'(1) &= y_3, \\
z(0) &= z_0, & z(1) &= z_1, & z'(0) &= z_2, & z'(1) &= z_3.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Analyzujeme  $x$ -ovú zložku hľadaných vzťahov. Štyri podmienky z (5.2) v prípade polynomickeho vyjadrenia dovoľujú zostaviť sústavu štyroch lineárnych rovníc pre štyri neznáme. Budeme preto hľadať riešenie s využitím kubických polynómov:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 \\
x'(t) &= \xi_1 + 2\xi_2 t + 3\xi_3 t^2
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Dosadením príslušných podmienok z (5.2) (prvý riadok) do (5.3) dostávame vzťahy

$$x_0 = \xi_0, \quad x_1 = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad x_2 = \xi_1, \quad x_3 = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3.$$

Ich zápis v maticovom tvare dáva sústavu

$$\mathbf{M}\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

K matici  $\mathbf{M}$  v (5.4) existuje inverzná, preto môžeme nájsť koeficienty  $\xi_i$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

$x$ -súradnicu v (5.3) tak vyjadríme zo zadaných hodnôt  $x_0, x_1, x_2, x_3$  nasledujúco

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

To isté môžeme zopakovať i pre  $y$  a  $z$ -súradnice. Dostávame tak výsledný tvar krivky

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \mathbf{H} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Prenásobením vektora polynomickej parametrizácie s maticou  $\mathbf{H}$  (vid' (4.3)) dostávame hodnoty váhových funkcií v (5.1)

$$\begin{aligned}
 w_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\
 w_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\
 w_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\
 w_3(t) &= -t^2 + t^3
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

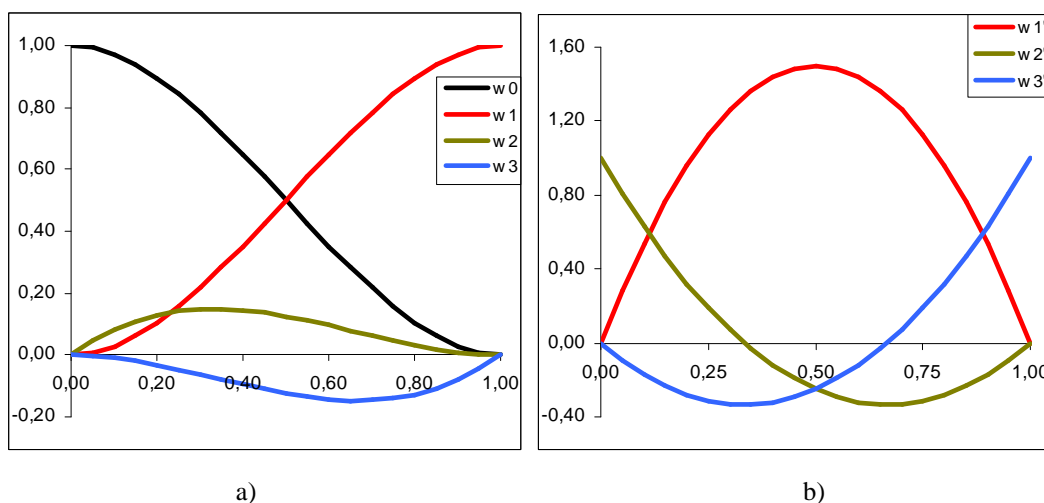
Váhové funkcie (5.7) nazývame Hermitovské polynómy a krivka nesie názov Fergusonova krivka.

Siahneme si na Fergusonovu krivku z niekoľkých strán. Pre detailnejšiu analýzu sú užitočné derivácie váhových funkcií i výsledná derivácia.

$$\begin{aligned}
 w_0'(t) &= -6t + 6t^2 \\
 w_1'(t) &= 6t - 6t^2 \\
 w_2'(t) &= 1 - 4t + 3t^2 \\
 w_3'(t) &= -2t + 3t^2
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

$$P'(t) = w_0'(t)P_0 + w_1'(t)P_1 + w_2'(t)\vec{v}_0 + w_3'(t)\vec{v}_1.
 \tag{5.9}$$

Obr. 5.2 ukazuje priebeh váhových funkcií a ich derivácií. Keďže  $w_0'(t) = -w_1'(t)$ , funkciu  $w_0'(t)$  nie je nutné zobrazovať.



Obr. 5.2 Váhové funkcie Fergusonovej krivky a) a ich derivácie b).

**Príklad 5.1** Generujme Fergusonovu krivku pre obidva nulové smerové vektory.

*Riešenie:* Priamym dosadením do (5.1) a vzhľadom na to, že  $w_0(t) + w_1(t) = 1$  a  $w_0(t)$  je monotónna, dostávame že hľadaná krivka je úsečka  $P_0P_1$ .

Z pohľadu kinematiky dosadením do (5.9) dostávame rýchlosť pohybu bodu

$$P'(t) = w_1'(t)(P_1 - P_0) = 6t(1-t)(P_1 - P_0).$$



Znamená to, že rýchlosť postupne rastie z nuly až po hodnotu  $v_{\max} = 3/2(P_1 - P_0)$ , ktorá sa dosahuje pre  $t=0,5$  a potom znovu klesá (symetricky) až k nule. Vidíme, že smer rýchlosti je konštantný, daný vektorom  $P_1 - P_0$ . Z toho je taktiež evidentné, že hľadanou krivkou je úsečka. ■

**Príklad 5.2** Generujme Fergusonovu krivku pre  $\vec{v}_0 = \mathbf{0}$  a  $\vec{v}_1$ , ktorý je kolmý k smerovému vektoru  $P_1 - P_0$ . Aký je maximálny odklon krivky od úsečky  $P_0P_1$ ?

*Riešenie:* Priamym dosadením vektorov do (5.9) dostávame rýchlosť pohybu bodu

$$P'(t) = w_1'(t)(P_1 - P_0) + w_3'(t)\vec{v}_1 = 6t(1-t)(P_1 - P_0) + (3t^2 - 2t)\vec{v}_1.$$

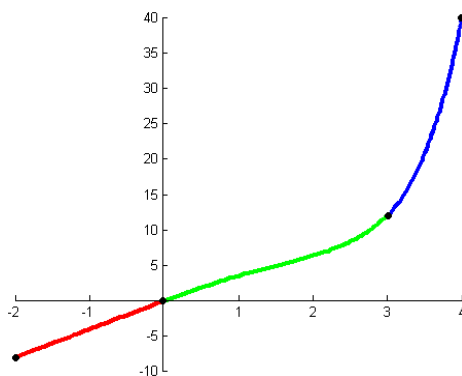
Z obr. 5.2 b) vidíme, že  $w_3'(t)$  spočiatku monotónne odkloňuje krivku do opačného smeru ako je smer  $\vec{v}_1$  – to trvá až do hodnoty  $t = 2/3$ , keďže  $w_3'(2/3) = 0$ . Od tejto hodnoty parametru  $t$  sa krivka stáča do smeru  $\vec{v}_1$ . Pre jednoduchosť umiestnime koncové body na os  $x$ .  $y$ -súradnica bodu  $P(2/3)$ ,  $y(2/3) = -4/27|\vec{v}_1|$  dáva požadovaný maximálny odklon. ■

**Príklad 5.3** Uvažujme riadiace body z príkladu 3.1,  $P_0 = (-2, -8)$ ,  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (3, 12)$ ,  $P_3 = (4, 40)$ . Vo vnútorných bodoch  $P_1$  a  $P_2$  zvolme smerové vektory  $\vec{v}_1 = \lambda(P_2 - P_0)$  a  $\vec{v}_2 = \lambda(P_3 - P_1)$ . V krajných bodoch  $P_0$  a  $P_3$  zvolme smerové vektory  $\vec{v}_0 = \vec{v}_3 = (0, 0)$ . Ako bude vyzerat' spojenie Fergusonových kriviek na susedných dvojiciach bodov?

*Riešenie:* Pozrime sa na krivky

$$\begin{aligned} P(t) &= w_0(t)P_0 + w_1(t)P_1 + w_2(t)\vec{v}_0 + w_3(t)\vec{v}_1 \\ R(t) &= w_0(t)P_1 + w_1(t)P_2 + w_2(t)\vec{v}_1 + w_3(t)\vec{v}_2 \\ S(t) &= w_0(t)P_2 + w_1(t)P_3 + w_2(t)\vec{v}_2 + w_3(t)\vec{v}_3. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Je jednoduché sa presvedčiť, že  $P(1) = R(0) = P_1$ ,  $P'(1) = R'(0) = \vec{v}_1$ . Tieto vlastnosti sme vlastne požadovali pri odvodzovaní vzťahov pre Fergusonovu krivku. Znamená to, že také spojenie bude hladké. Podobne dostaneme hladké spojenie kriviek  $R(t)$  a  $S(t)$  v bode  $P_2$ . Výsledná trojica kriviek (5.10) pre  $\lambda=0,5$  je zobrazená na Obr. 5.3.



Obr. 5.3 Fergusonov splajn.

Pozrime sa, či Fergusonov splajn nedosahuje vyššiu hladkosť. Opätovným zderivovaním váhových funkcií máme

$$\begin{aligned} w_0''(t) &= -6 + 12t \\ w_1''(t) &= 6 - 12t \\ w_2''(t) &= -4 + 6t, \\ w_3''(t) &= -2 + 6t \end{aligned} \quad (5.11)$$

z čoho dostávame

$$P''(t) = 2[3(P_1 - P_0) - (2\vec{v}_0 + \vec{v}_1)] + 6t[2(P_0 - P_1) + \vec{v}_0 + \vec{v}_1].$$

V krajných bodoch Fergusonovej krivky tak dostávame

$$\begin{aligned} P''(0) &= 6(P_1 - P_0) - 2(2\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \\ P''(1) &= 6(P_0 - P_1) + 2(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_1). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Majme tri riadiace body  $P_0, P_1, P_2$  a v nich odpovedajúce smery  $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Uvažujme teraz prvé dve krivky z (5.10). Priamym dosadením do (5.12) dostávame

$$\begin{aligned} P''(1) &= 6(P_0 - P_1) + 2(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_1) \\ R''(0) &= 6(P_2 - P_1) - 2(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2). \end{aligned}$$

Z požiadavku rovnosti druhých derivácií  $P''(1) = R''(0)$  dostávame podmienku hladkosti druhého stupňa:

$$3(P_2 - P_0) = \vec{v}_0 + 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (5.13)$$

Znamená to, že vyššia hladkosť Fergusonovho splajnu sa nedosahuje automaticky. Preformulované trochu ináč – vo všeobecnom prípade *Fergusonov splajn dosahuje len hladkosť prvého stupňa*. Toto zistenie nie je až tak prekvapujúce keď si uvedomíme, že pri odvodzovaní vzťahu sme ani viac nepredpokladali.



**Kontrólne otázky a samostatné úlohy**

1. Na riadiacich bodoch  $P_0, \dots, P_n$ ,  $n > 1$ , realizujte geometricky hladkú uzavretú krivku ako Fergusonov splajn.
2. V príklade 5.3 voľte pre parameter  $\lambda$  rôzne hodnoty. Ako vyzerá výsledný Fergusonov splajn?
3. Vytvorte Fergusonov splajn pozostávajúci z dvoch kriviek tak, aby dosiahli hladkosť druhého stupňa.

## 6 Bézierove krivky

V tejto kapitole sa dozviete:

- základné vlastnosti Bézierovej krivky,
- vzťah medzi Bézierovou a Fergusonovou kubikou,
- dva aproximačné prístupy ku generovaniu Bézierovej krivky,
- niečo o úskaliach, ktoré v sebe aproximačné metódy schovávajú.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- naprogramovať Bézierovu krivku tromi rôznymi spôsobami.

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

Bézierova krivka, aproximačné schéma, schéma deCasteljau, zvýšenie stupňa polynómov.

**Náročnosť kapitoly:** táto kapitola patrí medzi náročné.

### *Sprievodca štúdiom*

*Cieľom tejto kapitoly je ukázať, v čom spočíva skutočná efektivita aproximačnej schémy de Casteljau. Lemmy 3 a 4, ako i odvodenie v kap. 6.5 sa môžu zdať pre matematicky menej zdatných čitateľov neprekonateľnou bariérou – sú to však len pomocné tvrdenia; našim hlavným cieľom je dokázať to, čo je znázornené na obr. 6.3.*



V predošlej kapitole sme ukázali postup, ako dôjsť ku krivke, ktorá je definovaná riadiacimi *bodmi* a predpísanými *smermi* v nich. Pierre Bézier hľadal vhodnú funkcionálnu bázu tak, aby výsledný tvar krivky bol intuitívne pochopiteľný *len z množiny riadiacich bodov pre ľubovoľný stupeň krivky*. Dospel k formalizmu, ktorý môžeme vyjadriť váhovými funkciami (6.1).

Nezávisle na ňom Paul de Casteljau došiel k tomu istému výsledku (zhruba v tom istom čase) snahou o skonštruovanie jednoduchej iteračnej, numericky stabilnej výpočtovej schémy na generovanie kriviek.

Sformulujeme a dokážeme základné vlastnosti takto definovanej krivky, skonfrontujeme ju s Fergusonovou krivkou a ukážeme dve iteračné metódy, ktoré konvergujú k Bézierovej krivke.

## 6.1 Bernsteinove polynómy

Postup, ako došiel P. Bézier k váhovým funkciám, nie je tak priamočiary ako postup uvedený v predošlej kapitole. Preto sa obmedzíme len na sformulovanie výsledného tvaru váhových funkcií,

$$w_i(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (6.1)$$

a demonštráciu niektorých ich dôležitých vlastností.

Polynómy (6.1) sa v literatúre označujú ako Bernsteinove polynómy a namiesto  $w_i(t)$  budeme používať všeobecne zaužívané označenie  $b_i^n(t)$ .<sup>4</sup>

Je jednoduché vidieť (priamym dosadením hodnôt), že

$$b_i^n(0) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases}, \quad b_i^n(1) = \begin{cases} 0, & i < n \\ 1, & i = n \end{cases}. \quad (6.2)$$

Pre derivácie Bernsteinových polynómov dostávame

$$b_i^n(t) = \begin{cases} -n(1-t)^{n-1} & i = 0 \\ nt^{n-1} & i = n \\ \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i-1} (i-nt) & 0 < i < n \end{cases}. \quad (6.3)$$

Dosadením za  $t = 0$ ,  $t = 1$  dostávame

$$b_i^n(0) = \begin{cases} -n & i = 0 \\ n & i = 1, \\ 0 & i > 1 \end{cases}, \quad b_i^n(1) = \begin{cases} 0 & i < n-1 \\ -n & i = n-1 \\ n & i = n \end{cases}. \quad (6.4)$$

Ďalšie dôležité vlastnosti Bernsteinových polynómov sformulujeme v nasledujúcich tvrdeniach. Prvé dve lemmy použijeme pre analýzu základných vlastností Bézierovej krivky, druhé dve potrebujeme pre dôkaz korektnosti schémy de Casteljau.

**Lemma 1** (o nezápornosti).

$$b_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \geq 0.$$

---

<sup>4</sup> Všade ďalej predpokladáme  $n > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Dôkaz vyplýva z toho, že pre  $0 \leq t \leq 1$  sú očividne oba členy  $(1-t)^{n-i} \geq 0$ ,  $t^i \geq 0$ .

■

**Lemma 2** (o normovanosti).

$$\sum_{i=0}^n b_i^n(t) = 1.$$

Dôkaz dostávame dosadením  $p=t$ ,  $q=1-t$  do binomického rozkladu

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i}.$$

■

**Lemma 3** (o kompozícii kombinačných koeficientov).

$$\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} \quad 0 \leq k \leq i \leq n \quad (6.5)$$

Dôkaz:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \binom{i}{k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{k!(i-k)!} \stackrel{=1}{=} \frac{n!}{(n-i)!k!(i-k)!} = \\ &\stackrel{=2}{=} \frac{n!}{(n-i)!k!(i-k)!} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \stackrel{=3}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!(i-k)!(n-i)!} = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \\ &\stackrel{=4}{=} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-k-(i-k))!} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} \end{aligned}$$

V jednotlivých krokoch postupujeme nasledujúco:

1. vykrátíme  $i!$ ,
2. rozšírime zlomkom  $(n-k)!/(n-k)!$ ,
3. preskupíme členy,
4. použijeme identitu  $(n-i) = (n-k-(i-k))$ .

■

**Lemma 4** (o konvolúcii Bernsteinových polynómov).

$$\sum_{i=k}^n b_i^n(u) b_k^i(t) = b_k^n(ut), \quad \sum_{i=0}^k b_i^n(u) b_{k-i}^{n-i}(t) = b_k^n(u+t-ut). \quad (6.6)$$

Dôkaz: Dokážeme len prvý vzťah. Platnosť druhého vzťahu sa dá ukázať tým istým postupom, využijúc symetriu Bernsteinových polynómov, tj. vzťah  $b_i^n(t) = b_{n-i}^n(1-t)$ .

<sup>5</sup> V nasledujúcich dôkazoch pri úprave aritmetických výrazov je prechod  $\stackrel{=k}{=}$  komentovaný ako  $k$ -ty krok.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^n b_i^n(u) b_k^i(t) &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{i}{k} t^k (1-t)^{i-k} = \\
&= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} u^i t^k (1-u)^{n-i} (1-t)^{i-k} = \\
&=^1 \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} u^i t^k (1-u)^{n-i} (1-t)^{i-k} = \\
&=^2 \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} u^{k+j} t^k (1-u)^{n-k-j} (1-t)^j = \\
&=^3 \binom{n}{k} (ut)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} u^j (1-u)^{n-k-j} (1-t)^j = \\
&=^4 \binom{n}{k} (ut)^k \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} (1-u)^{l-j} (u-ut)^j = \\
&=^5 \binom{n}{k} (ut)^k ((1-u) + (u-ut))^l = \binom{n}{k} (ut)^k (1-ut)^l = \\
&=^6 \binom{n}{k} (ut)^k (1-ut)^{n-k} = b_k^n(ut)
\end{aligned}$$

Pri dôkaze sme

1. využili výsledok Lemmy 2,
2. prešli k novej indexácii  $j=i-k$ ,
3. vybrali multiplikátor pred sumu,
4. pre prehľadnosť substituovali index  $l=n-k$ ,
5. aplikovali binomickú vetu,
6. prešli späť od indexu  $l$  k indexu  $n-k$ . ■

## 6.2 Základné vlastnosti Bézierovej krivky

Z používateľského hľadiska nás zaujímajú také vlastnosti krivky ako sú:

- koncové body krivky,
- smer krivky v koncových bodoch,
- oblasť možnej alokácie krivky.

Práve vyššie sformulované vlastnosti Bernsteinových polynómov zaručujú, že

(1) **krivka prechádza prvým a posledným riadiacim bodom**, pretože

$$P(0) = \sum_{i=0}^n b_i^n(0) P_i = P_0, \quad P(1) = \sum_{i=0}^n b_i^n(1) P_i = P_n, \quad (6.7)$$

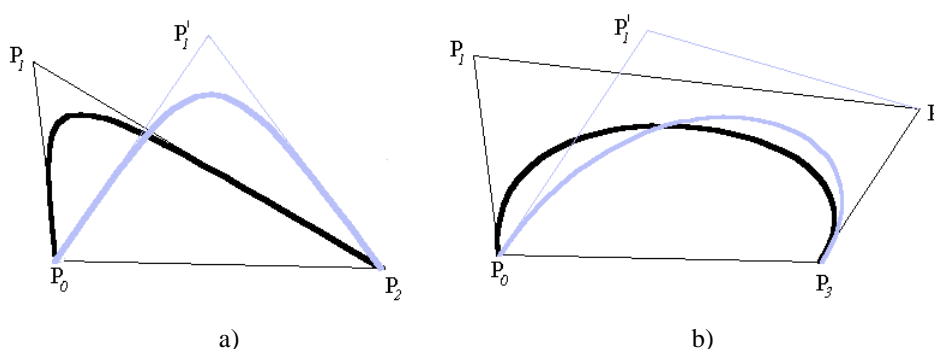
(2) **druhý a predposledný bod určujú smer krivky v koncových bodoch**, pretože

$$P'(0) = \sum_{i=0}^n b_i^n(0) P_i = n(P_1 - P_0), \quad P'(1) = \sum_{i=0}^n b_i^n(1) P_i = n(P_n - P_{n-1}), \quad (6.8)$$

(3) **krivka nevychádza mimo konvexný obal svojich riadiacich bodov**. Toto je priamy dôsledok nezápornosti a normovanosti váhových funkcií. Ináč povedané, bod

krivky je váženým priemerom svojich riadiacich bodov, tj. leží v ich konvexnom obale.

Všimnime si, Obr. 6.1, že v prípade kvadratických kriviek je druhý bod zároveň predposledný, preto jeho pohyb meníme súčasne smer v oboch koncoch krivky. V prípade kubických kriviek (a pravdaže i kriviek vyššieho stupňa) môžeme smer v koncových bodoch krivky meniť vzájomne nezávisle. A toto je dôvod veľmi častého implementovania práve kubických Bézierových kriviek v grafických softvéroch.



Obr. 6.1 Editovanie a) kvadratickej a b) kubickej Bézierovej krivky.

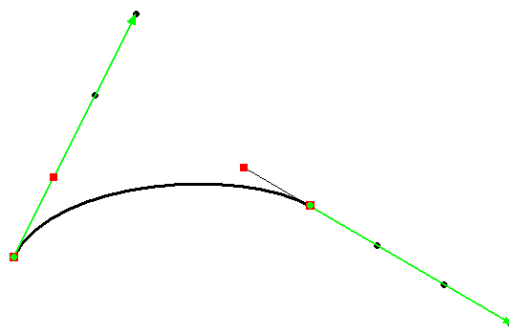
### 6.3 Bézierova a Fergusonova krivka

Prvé dve vlastnosti Bézierovej krivky naznačujú, že medzi kubickou Bézierovou krivkou a Fergusonovou krivkou možno očakávať veľmi tesný vzájomný vzťah. Skutočne, uvažujme Fergusonovu krivku s koncovými bodmi  $P_0$  a  $P_3$  so smerovými vektormi  $\vec{v}_0 = 3(P_1 - P_0)$ ,  $\vec{v}_1 = 3(P_3 - P_2)$ . Dosadením do (5.1) dostávame

$$\begin{aligned} P(t) &= (1 - 3t^2 + 2t^3)P_0 + (3t^2 - 2t^3)P_3 + (t - 2t^2 + t^3)\beta(P_1 - P_0) + (-t^2 + t^3)\beta(P_3 - P_2) \\ &= (1 - 3t + 3t^2 - 2t^3)P_0 + 3(t - 2t^2 + t^3)P_1 + 3(t^2 - t^3)P_2 + t^3P_3 \end{aligned}$$

čo je kubická Bézierova krivka. Kým z formálneho hľadiska nie je medzi oboma krivkami žiaden rozdiel, z hľadiska používateľského komfortu rozdiel je: na posun červených bodov (Bézier) je tvar výslednej krivky viac citlivý ako na posun zelených špiiek (Ferguson) – Obr. 6.2. Navyiac, bézierovský spôsob dáva lepšiu predstavu o alokovaní krivky.





Obr. 6.2. Kubická krivka ako Fergusonova, resp. Bézierova krivka.

Ďalej nás bude hlavne zaujímať efektívne generovanie Bézierovej krivky. Ukážeme dve iteračné schémy, ktoré toto riešia. Iteračnosť znamená, že krivka bude v každom kroku vyjadrená len približne. Toto nám nevaďí, keďže v konečnom dôsledku každá výsledná „počítačová“ realizácia je diskrétna.

#### 6.4 Schéma deCasteljau

Majme riadiace body  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Pre jednoduchší popis schémy indexujme tieto body dvojitým indexom:  $P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n,0}$ . Body prvej úrovne dostávame ako lineárnu kombináciu dvoch susedných bodov:

$$P_{i,1} = (1-t)P_{i-1,0} + tP_{i,0} \quad (6.9^0)$$

Podobne môžeme generovať body druhej úrovne. Vo všeobecnom prípade

$$P_{i,j} = (1-t)P_{i-1,j-1} + tP_{i,j-1} \quad (6.9)$$

Každá ďalšia úroveň má o jeden bod menej, až posledná –  $n$ -tá úroveň obsahuje len jeden bod

$$P_{n,n} = (1-t)P_{n-1,n-1} + tP_{n,n-1}. \quad (6.9^n)$$

Pritom v celej schéme berieme jednu fixovanú hodnotu parametra  $t$ . Možno dokázať, že platí nasledujúce tvrdenie.

**Body  $P_{n,n}$  generované schémou deCasteljau sú body Bézierovej krivky.** Toto je možné nájsť v rôznych zdrojoch, vrátane internetových. Dôkaz spočíva v dôslednom realizovaní uvedenej rekurencie. Spravidla sa robí indukciou. My to len ilustrujeme na príklade pre  $n=3$ .



$$\begin{aligned}
P_{3,3} &= (1-t)P_{2,2} + tP_{3,2} = (1-t)((1-t)P_{1,1} + tP_{2,1}) + t((1-t)P_{2,1} + tP_{3,1}) = \\
&= (1-t)^2 P_{1,1} + 2(1-t)tP_{2,1} + t^2 P_{3,1} = \\
&= (1-t)^2 ((1-t)P_{0,0} + tP_{1,0}) + 2(1-t)t((1-t)P_{1,0} + tP_{2,0}) + t^2 ((1-t)P_{2,0} + tP_{3,0}) = \quad (6.10) \\
&= (1-t)^3 P_{0,0} + 3(1-t)^2 tP_{1,0} + 3(1-t)t^2 P_{2,0} + t^3 P_{3,0}
\end{aligned}$$

Z kontextu popisu schémy deCasteljau v mnohých zdrojoch môže čitateľ nadobudnúť dojem, že schéma sa implementuje takto:


```

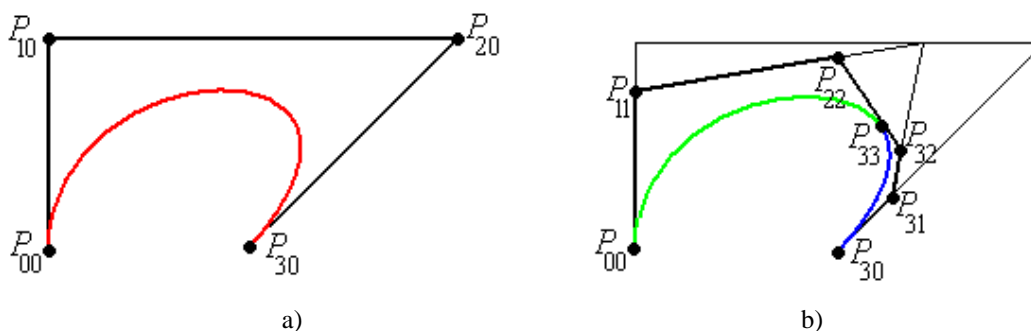
for (t=0; t<=1; t+=d)
{ generuj celou schémou (6.9) bod  $P_{n,n}$ ;
}

```

Toto je však veľmi neefektívne – dokonca menej efektívne ako generovanie priamym výpočtom Bernsteinových polynómov.

Dôležitosť a efektívnosť schémy de Casteljau je daná konštrukciou, ktorú demonštrujeme na príklade štyroch riadiacich bodov a ilustrujeme na obr. 6.3.

Keď budeme generovať Bézierovu krivku napr. na riadiacich bodoch  $P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{30}$ , dostaneme červenú krivku – obr. 6.3a). Keď na týchto riadiacich bodoch aplikujeme schému de Casteljau, okrem bodu  $P_{33}$  dostaneme ešte ďalšie, pričom body  $P_{00}, P_{11}, P_{22}, P_{33}$  použijeme pre generovanie Bézierovej krivky (zelená – obr. 6.3b)) a body  $P_{33}, P_{32}, P_{31}, P_{30}$  pre modrú Bézierovu krivku. Pritom platí, a toto je hlavný výsledok, že **zelená a modrá krivka dávajú dohromady presne červenú krivku**. 



Obr. 6.3 Schéma deCasteljau: a) Bézierova krivka daná svojimi riadiacimi bodmi. b) Body ktoré získame schémou deCasteljau rozdeľujú krivku na dve Bézierove krivky.

V praxi postupujeme tak, že rekurzívne vytvárame z riadiacich bodov dve množiny, pre ľavú (na obr. 6.3b) zelenú) a pre pravú (modrú) krivku. Takto vytvorená lineárne lomená čiara  $P_{00}P_{11}P_{22}P_{33}P_{32}P_{31}P_{30}$  aproximuje Bézierovu krivku. V prípade potreby na každú z kriviek (resp. riadiace body) opäť aplikujeme ten istý postup. Dostávame tak iteračnú schému. V tomto kontexte je vhodné sa vrátiť k prvej poznámke pod čiarou

v úvode tohto textu o iteračnom spôsobe generovania kriviek. Obecne vzato, iteračným procesom môžeme dostať veľmi podivne sa chovajúce riešenia (fraktály, tj. objekty s vlastnosťami „medzi krivkou a plochou“). Jeden taký príklad bude ukázaný v kapitole 6.6. Práve popísaná schéma dáva však riešenie, ktoré „sa chová normálne“, tj. iteráciou (i nekonečnou) konvergujeme k Bézierovej krivke. Práve tento vzťah robí zo schémy de Casteljau dôležitý nástroj generovania Bézierovej krivky.

Načrtne dôkaz korektnosti schémy de Casteljau pre „zelenú“ krivku z obr. 6.3 b).

1. Pre fixovanú hodnotu parametra  $0 < u < 1$  je možné postup (6.10) vyjadriť takto:

$$\begin{pmatrix} P_{00}(u) \\ P_{11}(u) \\ \vdots \\ P_{nn}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0^0(u) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0^1(u) & b_1^1(u) & 0 & \cdots & 0 \\ b_0^2(u) & b_1^2(u) & b_2^2(u) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0^n(u) & b_1^n(u) & b_2^n(u) & \cdots & b_n^n(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \\ \vdots \\ P_{n0} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

2. Skonstruujeme Bézierovu krivku na bodoch  $P_{ii}(u)$ , tj. zelenú krivku z obr. 6.3b).

$$\begin{aligned} B(t; P_{00}(u), P_{11}(u), P_{22}(u), \dots, P_{nn}(u)) &= \\ &= \sum_{i=0}^n b_i^n(t) P_{ii}(u) = \begin{pmatrix} b_0^n(t) & b_1^n(t) & \cdots & b_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00}(u) \\ P_{11}(u) \\ \vdots \\ P_{nn}(u) \end{pmatrix} = \\ &= {}^1 \begin{pmatrix} b_0^n(t) & b_1^n(t) & \cdots & b_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^0(u) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0^1(u) & b_1^1(u) & 0 & \cdots & 0 \\ b_0^2(u) & b_1^2(u) & b_2^2(u) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0^n(u) & b_1^n(u) & b_2^n(u) & \cdots & b_n^n(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \\ \vdots \\ P_{n0} \end{pmatrix} = \\ &= {}^2 \left( \sum_{i=0}^n b_i^n(t) b_0^i(u) \quad \sum_{i=1}^n b_i^n(t) b_1^i(u) \quad \sum_{i=2}^n b_i^n(t) b_2^i(u) \quad \cdots \quad \sum_{i=n}^n b_i^n(t) b_n^i(u) \right) \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \\ \vdots \\ P_{n0} \end{pmatrix} = \\ &= {}^3 \begin{pmatrix} b_0^n(tu) & b_1^n(tu) & b_2^n(tu) & \cdots & b_n^n(tu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \\ \vdots \\ P_{n0} \end{pmatrix} = B(tu; P_{00}, P_{10}, P_{20}, \dots, P_{n0}) \end{aligned}$$

V procese aritmetických úprav sme

1. využili vzťah (6.11),
2. pre násobili ľavý vektor maticou,
3. použili výsledok Lemmy 4.

Vidíme, že v konečnom dôsledku sme dostali časť Bézierovej krivky, určenej bodmi  $P_0 P_{10} \dots P_{n0}$ : keďže hodnota parametru  $u$  je fixovaná a  $0 \leq t \leq 1$ , výsledný parameter  $s=tu$  prebieha v intervale  $0 \leq s \leq u$ . „Dôkaz“ pre „modrú“ krivku prebieha analogicky.

■

Zdá sa, že uvedená konštrukcia vedie k paradoxu. Body  $P_{22}, P_{33}, P_{32}$  na obr. 6.3b) síce sú na jednej priamke, no  $P_{33}$  nie je uprostred úsečky  $P_{22} P_{32}$ . Napojenie modrej a zelenej krivky nemá preto dokonca ani parametrickú hladkosť prvého stupňa! Z druhej strany, bod  $P_{33}$  je vnútorný bod červenej krivky (obr. 6.3a), a preto v ňom je parametrická hladkosť 3. stupňa. V tomto (parametrickom) zmysle krivky „zeleno-modrá“ a „červená“ totožné nie sú. Z hľadiska geometrickej hladkosti však obe krivky totožné sú.



## 6.5 Schéma zvyšujúca stupeň krivky

Existuje aj iná iteračná schéma, ktorá približuje Bézierovu krivku lineárne lomenou čiarou.

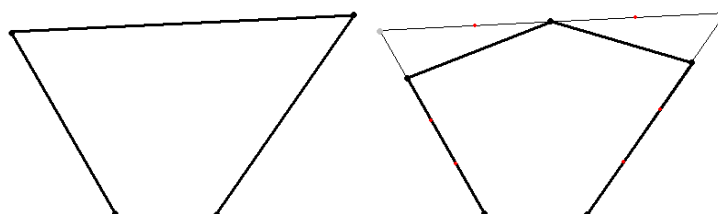
Majme riadiace body  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , ktoré určujú Bézierovu krivku  $n$ -tého stupňa **B1**.

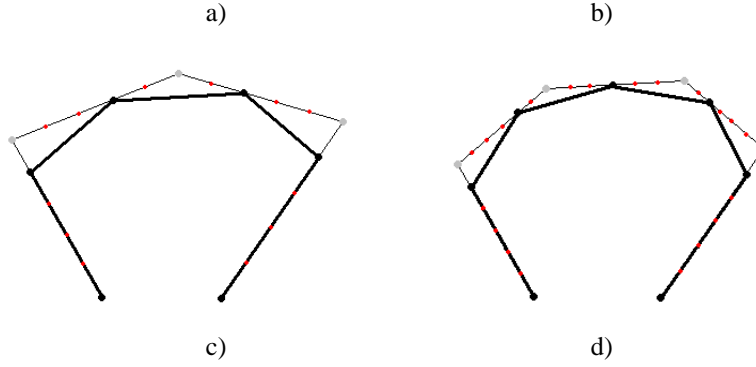
Definujme body  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$  nasledujúcim spôsobom:

$$Q_0 = P_0, \quad Q_{n+1} = P_n, \quad Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} P_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.12)$$

Riadiace body  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$  určujú Bézierovu krivku **B2**  $n+1$ -vého stupňa.

Obr. 6.4 ilustruje, ako schéma funguje.





Obr. 6.4 Aproximácia kubickej Bézierovej krivky. a) Pôvodné riadiace body. b) Riadiace body po aplikácii schémy (6.12). c) – d) Ďalšie dve rekurentné iterácie schémy (6.12)

Ukážeme že krivky **B1** a **B2** sú totožné.

*Dôkaz:*

$$\begin{aligned}
B2 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i Q_i = \underbrace{(1-t)^{n+1} Q_0 + t^{n+1} Q_{n+1}}_A + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i Q_i = \\
&= A + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i \left( \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} P_i \right) = \\
&= A + \sum_{i=1}^n \frac{i}{n+1} \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i P_{i-1} + \sum_{i=1}^n \frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i P_i = \\
&= A + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} (1-t)^{n-(i-1)} t^{i-1} P_{i-1} t + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i (1-t) = \\
&= A + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i t}_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i}_2 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i t}_3 = \\
&= A + (1-t)^n P_0 t + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i t + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i t - t^n P_n t = \\
&= A + (1-t)^n P_0 t + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i - t^n P_n t = \\
&= (1-t)^{n+1} P_0 + \underbrace{t^{n+1} P_n}_* + (1-t)^n P_0 t + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i - \underbrace{t^n P_n t}_* = \\
&= (1-t)^n P_0 (1-t+t) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i = B1
\end{aligned}$$



V tomto tvrdení sa zdá byť rozpor – ako je možné, že krivky rôznych stupňov sú totožné? Je tomu tak preto, že riadiace body  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$  nie sú ľubovoľné, ale sú jednoznačne určené bodmi  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . A táto špecifická poloha bodov  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$  v konečnom dôsledku degeneruje stupeň váhových polynómov.



## 6.6 Schéma zachovávajúca Bézierovské vlastnosti

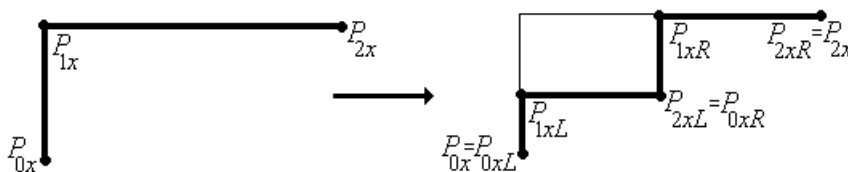
Schéma de Casteljaou i schéma zvyšujúca stupeň krivky sa chovajú korektne, tj. obe konvergujú k Bézierovej krivke. Navyiac, iteračné procesy majú spravidla tú výhodu, že jednotlivé kroky bývajú jednoduché a preto rýchle. Preto môže vzniknúť dojem, že aplikácia iteračných schém je ľahká a „bezbolestná“.

Iteračné procesy však v sebe skrývajú nebezpečie toho, že nemusia konvergovať k nami očakávanému stavu.

Uvažujme napr. schému z obr. 6.5, ktorá v každom kroku  $x$  nahradí schod  $P_{0x} P_{1x} P_{2x}$  dvojicou „jemnejších schodov“  $P_{0xL} P_{1xL} P_{2xL}, P_{0xR} P_{1xR} P_{2xR}$ . Dostávame tak krivku, ktorá v každej iterácii spĺňa tri základné vlastnosti Bézierovej krivky (**1.** prechádza krajnými riadiacimi bodmi  $P_{0x}, P_{2x}$ , **2.** smer v koncových bodoch je úmerný vektorom  $P_{1x} - P_{0x}$ , resp.  $P_{2x} - P_{1x}$ , **3.** krivka nevychádza mimo konvexný obal riadiacich bodov). Pritom výsledná limitná krivka nie je hladká v žiadnom bode a jej dĺžka nie je rovna euklidovskej vzdialenosti bodov  $P_0, P_2$ .



Spočítajte dĺžku krivky, ktorá je výsledkom schémy z obr 6.5 v limitnom stave.



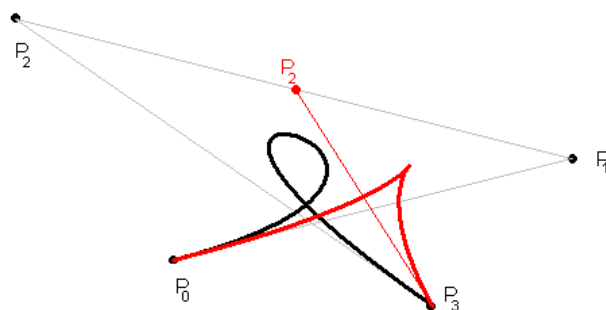
Obr. 6.5. Schéma zachovávajúca „Bézierovské“ vlastnosti.

Vidíme, že táto schéma konverguje k neočakávanému výsledku.

## 6.7 Poznámky o hladkosti Bézierovej krivky

Na príklade Bézierovej krivky je možné taktiež ilustrovať v kapitole 4 ukázanú rozdielnosť parametrickej a geometrickej hladkosti:

- z parametrickej hladkosti nevyplýva automaticky geometrická hladkosť. Príklad toho je na Obr. 6.6: uvažujme bézierovu kubickú krivku (čiernu) zadanú bodmi  $P_0P_1P_2P_3$ . Posúvajte bod  $P_2$  (červený) po pôvodnej úsečke  $P_1P_2$  smerom do prava do naznačenej pozície „Slučka“ bézierovej krivky sa degeneruje do bodu. Evidentne v tejto pozícii krivka nie je geometricky hladká, aj keď parametricky hladká je (pretože váhové funkcie sú kubické polynómy).
- Z geometrickej hladkosti nevyplýva automaticky parametrická hladkosť – napr. vyššie opísaná situácia schémy de Casteljau.



Obr. 6.6. Hladkosť bézierovej krivky.

Obecne vzato, (geometricky) hladké spojenie dvoch Bézierových kriviek, definovaných riadiacimi bodmi  $P_i, Q_i$  zaisťujeme tak, že vyžadujeme

- $P_n = Q_0$  (spojitosť),
- $P_{n-1}, P_n, Q_1$  ležia na jednej priamke (geometrickú hladkosť).

Tieto podmienky však nezaručujú automaticky vyššiu parametrickú hladkosť ako hladkosť prvého stupňa (v prípade, že  $P_n$  je stred úsečky  $P_{n-1}Q_1$ ).

### Kontrólne otázky a samostatné úlohy

- Modifikujte zdrojový text [Ferguson.m](http://Ferguson.m) pre generovanie bézierovej kubickej krivky. Porovnajte komfort ovládania.
- Zapíšte Bézierovu krivku v maticovom tvare.
- Aký minimálny stupeň Bézierovej krivky dovoľuje generovať geometricky hladkú uzavretú krivku?

4. Môže byť Bézierova krivka 2. stupňa geometricky nehladká?
5. Porovnajme kvadratickú Bézierovu krivku určenú trojicou riadiacich bodov  $P_0P_1P_2$  s kubickou Bézierovou krivkou  $P_0P_1P_1P_2$  (t.j. prostredné riadiace body sú totožné).
6. Nahraďte Bézierovu krivku 3. stupňa 13 bodovou lin. lomenou čiarou:
  - a. priamym výpočtom na základe Bernsteinových polynómov (s využitím maticového tvaru – kap. 5), pre  $t=0, t=1/12, \dots, t=11/12, t=1$ ,
  - b. schémou deCasteljau (2-násobnou rekurziou), pre  $t=1/2$ ,
  - c. Rekurentnou schémou (7.3).

Porovnajme výsledný tvar realizovaných aproximácií a taktiež zložitosť výpočtov (počet sčítaní, násobení a delení).



## 7 Coonsov splajn

V tejto kapitole sa dozviete:

- prečo nám v mnohých prípadoch nestačí pre výsledný splajn hladkosť prvého stupňa,
- akým spôsobom možno nájsť váhové funkcie, ktoré nám zaručia u konštruovaného splajnu hladkosť napojenia druhého stupňa,
- ako z polohy riadiacich bodov odvodiť tvar Coonsovej krivky.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- implementovať Coonsov splajn.

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

hladkosť druhého stupňa, Coonsov splajn.

**Náročnosť kapitoly:** táto kapitola patrí medzi ľahšie.

### ***Sprievodca štúdiom***

*Cieľom tejto kapitoly je ukázať, ako možno u konštruovaného splajnu dosiahnuť vyšší (druhý) stupeň hladkosti. Dôležité je osvojiť si geometrickú interpretáciu toho, ako z polohy riadiacich bodov odvodiť tvar výslednej Coonsovej krivky – ide o analógiu kap. 6.2, kde je toto ukázané pre Bézierovu krivku. Venujte pozornosť úlohám 4. a 5.*



V závere kapitoly 5 sme ukázali, že Fergusonov splajn vo všeobecnej podobe má v bodoch napojenia len parametrickú hladkosť prvého stupňa. A podobný výsledok dosahujeme i s Bézierovými splajnami. Technická prax ale vyžaduje vyššiu parametrickú hladkosť. Z fyziky vieme ([2. Newtonov zákon](#)), že sila je úmerná zrýchleniu (a zrýchlenie je druhá derivácia dráhy podľa času),

$$F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Keby sme napr. pohyb manipulátora či priemyselného robota modelovali pomocou Fergusonovho splajnu (resp. Bézierových kriviek), na spojoch trajektórie kde nie sú spojitú druhú deriváciu, by sa pôsobiaca sila menila skokom. Toto spôsobuje väčšie namáhanie súčiastok, čo v konečnom dôsledku vedie k ich rýchlejšiemu opotrebovaniu. Preto pre technickú prax, tj. CAD systémy, je veľmi často nutné dosiahnuť u kriviek hladkosť aspoň druhého stupňa (tj. spojitosť 2. derivácie). V tejto kapitole ukážeme konštrukciu po častiach kubickej krivky, ktorá má v bodoch napojenia takú hladkosť. Výslednú krivku nazývame *Coonsov splajn*.



Uvažujme postupnosť radiacích bodov  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Hľadáme štyri kubické polynomicke funkcie  $c_0(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ ,

$$c_i(t) = c_{0i} + c_{1i}t + c_{2i}t^2 + c_{3i}t^3, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (7.1)$$

ktoré vyhovujú nasledujúcej konštrukcii.

Na postupnosti radiacích bodov  $P_0P_1P_2P_3\dots P_n$  berieme postupne štvorice bodov

$$P_0P_1P_2P_3, P_1P_2P_3P_4, P_2P_3P_4P_5, \dots, P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}P_n \quad (7.2^1)$$

a na každej štvorici generujeme krivku s váhovými funkciami (7.1).

$$\begin{aligned} C_0(t) &= c_0(t)P_0 + c_1(t)P_1 + c_2(t)P_2 + c_3(t)P_3 \\ C_1(t) &= c_0(t)P_1 + c_1(t)P_2 + c_2(t)P_3 + c_3(t)P_4 \\ C_2(t) &= c_0(t)P_2 + c_1(t)P_3 + c_2(t)P_4 + c_3(t)P_5 \\ &\vdots \\ C_{n-3}(t) &= c_0(t)P_{n-3} + c_1(t)P_{n-2} + c_2(t)P_{n-1} + c_3(t)P_n \end{aligned}, \quad (7.2^2)$$

čiže  $k$ -ta krivka je daná priebežnou  $k$ -tou štvoricou radiacích bodov. Chceme, aby tento splajn splňoval požiadavky parametrickej hladkosti druhého stupňa na styku prvej a druhej krivky. Vzhľadom na uvedenú „opakujúcu sa“ konštrukciu, požadovaná hladkosť bude i na styku ďalších dvojíc kriviek. Prevedené do formálneho jazyka dostávame podmienky

$$\begin{aligned} C_0(1) &= C_1(0) \\ C_0'(1) &= C_1'(0) \\ C_0''(1) &= C_1''(0) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Namiesto detailného postupu hľadania koeficientov z (7.1) ukážeme len jeho základné myšlienky.

Pozrime sa na prvú z uvedených podmienok (7.3).

$$\begin{aligned} C_0(1) &= c_0(1)P_0 + c_1(1)P_1 + c_2(1)P_2 + c_3(1)P_3 = \\ &= c_0(0)P_1 + c_1(0)P_2 + c_2(0)P_3 + c_3(0)P_4 = C_1(0) \end{aligned}$$

Prenesením výrazov a jednu stranu dostaneme

$$\begin{aligned} C_0(1) - C_1(0) &= \\ &= c_0(1)P_0 + (c_1(1) - c_0(0))P_1 + (c_2(1) - c_1(0))P_2 + (c_3(1) - c_2(0))P_3 + c_3(0)P_4 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Keďže chceme, aby tento vzťah platil nezávisle na voľbe radiacích bodov, koeficient u každého z nich musí byť nulový, tj.

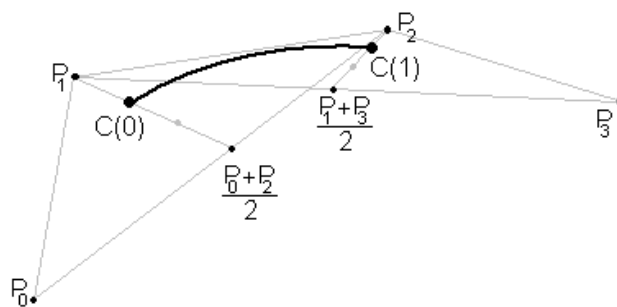
$$\begin{aligned}
c_0(1) = 0 &\Rightarrow c_{00} + c_{10} + c_{20} + c_{30} = 0 \\
c_1(1) - c_0(0) = 0 &\Rightarrow c_{01} + c_{11} + c_{21} + c_{31} = c_{00} \\
c_2(1) - c_1(0) = 0 &\Rightarrow c_{02} + c_{12} + c_{22} + c_{32} = c_{01} \\
c_3(1) - c_2(0) = 0 &\Rightarrow c_{03} + c_{13} + c_{23} + c_{33} = c_{02} \\
c_3(0) = 0 &\Rightarrow c_{03} = 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Podobne postupujeme i u ďalších dvoch vzťahov v (7.3), v dôsledku čoho dostávame dohromady sústavu pätnástich lineárnych rovníc. Neznámych je šestnásť – vid' (7.1). Keď zvolíme jednu z nich ako parameter sústavy, napr.  $c_{33} = K$ , riešením je štvorica váhových funkcií

$$\begin{aligned}
c_0(t) &= K(1-t)^3 \\
c_1(t) &= K(4-6t^2+3t^3) \\
c_2(t) &= K(1+3t+3t^2-3t^3) \\
c_3(t) &= Kt^3
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Pre  $K=1/6$  existuje názorná geometrická interpretácia koncových bodov a smerov v nich, vychádzajúca zo vzťahov (7.6), vid' obr. 7.1.

$$\begin{aligned}
C(0) &= \frac{P_0 + 4P_1 + P_2}{6} = \frac{1}{3} \frac{P_0 + P_2}{2} + \frac{2}{3} P_1 \\
C(1) &= \frac{P_1 + 4P_2 + P_3}{6} = \frac{1}{3} \frac{P_1 + P_3}{2} + \frac{2}{3} P_2 \\
C'(0) &= \frac{P_2 - P_0}{2} \\
C'(1) &= \frac{P_3 - P_1}{2}
\end{aligned} \tag{7.6}$$



Obr. 7.1 Koncové body Coonsovej krivky.

Vidíme, že vzťahy (7.6) určujú vlastnosti Coonsovej krivky podobným spôsobom, ako u Bézierovej, tj. určujú polohu krajných bodov a smery v nich.

Dokážte sami, že Coonsova krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich bodov. (Podobne, ako v prípade Bézierových kriviek je treba ukázať, že každá váhová funkcia je pre  $0 \leq t \leq 1$  nezáporná a  $c_0(t) + c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) = 1$ .)



### Kontrólne otázky a samostatné úlohy

1. Zapište Coonsovu krivku v maticovom tvare.
2. Overte, že v bodoch napojenia je zachovaná hladkosť 2. stupňa. Zmodifikujte zdrojový text [Ferguson.m](#) pre generovanie Coonsovej krivky.
3. Generujte Coonsov otvorený a uzavretý splajn pre postupnosť riadiacich bodov  $P_0, P_1, \dots, P_n$   $n > 3$ .
4. Generujte Coonsove krivky na štvoriciach bodov  $P_0, P_0, P_1, P_2$ ,  $P_0, P_1, P_1, P_2$ . (Návod: vychádzajte z obecnej situácie a postupne približujte príslušné dvojice riadiacich bodov.)
5. Generujte Coonsov splajn na postupnosti bodov  $P_0, P_1, P_1, P_1, P_2$  -- postupujte podobne ako v predošlom príklade.

## 8 B-splajnové krivky

V tejto kapitole sa dozviete:

- čo je to b-splajn,
- k čomu je dobré uniformné a neuniformné delenie uzlového vektoru,
- akým spôsobom riadiť hladkosť napojenia jednotlivých segmentov výsledného splajnu,
- aký je vzťah partikulárnych riešení (Bézierova krivka, Coonsova krivka) v kontexte všeobecného b-splajnu.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- implementovať uniformnú i neuniformnú b-splajnovú krivku,

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

b-splajn, uzlový vektor, uniformný splajn, neuniformný splajn.

**Náročnosť kapitoly:** táto kapitola je najnáročnejšia z celého textu.

### **Sprievodca štúdiom**

*V prvom rade je treba nepodceniť pochopenie „lokálneho“ a „globálneho“ času, čo je základná myšlienka toho, ako spraviť hladkosť napojenia oblúkov nezávisle na riadiacich bodoch.*

*Najpodstatnejšie z celej kapitoly je uvedomiť si nasledujúce:*

- *uniformný b-splajn zaručuje hladkosť napojenia o stupeň nižší, ako je stupeň použitých polynómov,*
- *neuniformné delenie dovedené do extrému znižuje hladkosť spojenia o jeden stupeň.*



Všimnime si že hladké napojenie susedných oblúkov dosahujeme vo všetkých vyššie popísaných spôsoboch tak, že medzi riadiacimi bodmi susedných kriviek je určitý stupeň závislosti. V prípade Fergusonových a Bézierových kriviek dávame dodatočné podmienky na polohu riadiacich bodov, viď príklad 3.5 pre Fergusonov splajn, poznámku b) v kap. 6.7 pre Bézierov splajn.

V prípade Coonsových kriviek každý riadiaci bod ovplyvňuje tri po sebe idúce oblúky, viď (7.2<sup>1</sup>)-(7.2<sup>2</sup>).

V tejto kapitole pôjdeme podobnou cestou ako u Coonsovho splajnu. Vzájomnú väzbu susedných kriviek budeme riadiť mierou prekrývania sa ich riadiacich bodov. Váhové funkcie pre riadiace body budeme generovať rekurentne. Samotná konštrukcia spôsobuje, že váhové funkcie nebudú prosté polynomicke funkcie, ale splajnové funkcie. Ukážeme si, že daný mechanizmus zovšeobecňuje prístupy z predošlých kapitol.

Tento spôsob generovania kriviek je základom dnešných CAD systémov a z nich odvodených softvérových riešení.

## 8.1 Váhové funkcie v lokálnom a globálnom čase

V prvom rade si všimnime, že doteraz sme uvažovali tak, že na každej z kriviek výsledného splajnu beží čas „lokálne“ v intervale  $0 \leq t \leq 1$ . Preto keď chceme splajn pozostávajúci z  $k$  takých kriviek modelovať postupne v „globálnom“ čase  $0 \leq t \leq k$ , obecná parametrická forma pre  $i$ -ty časový interval  $i-1 \leq t \leq i$ , tj. príslušná časť splajnu bude mať tvar

$$P(t) = w_0(t-i)P_{i,0} + w_1(t-i)P_{i,1} + \dots + w_n(t-i)P_{i,n}, \quad (8.1)$$

kde  $P_{i,0}, P_{i,1}, \dots, P_{i,n}$  sú riadiace body  $i$ -tej krivky.

Uvažujme napr. splajn zložený z dvoch kubických Bézierových kriviek so spoločným riadiacim bodom  $P$ . Jeho váhové funkcie vyjadrené v lokálnom čase sú: na prvej krivke  $b_3^3(t) = t^3$ , kým na druhej krivke je to  $b_0^3(t) = (1-t)^3$ . V kontexte vyššie uvedeného, tj. v globálnom časovom vyjadrení, je váhová funkcia pre  $P$  na celom intervale  $0 \leq t \leq 2$

$$w_P(t) = \begin{cases} b_3^3(t) = t^3 & 0 \leq t \leq 1 \\ b_0^3(t-1) = (1-(t-1))^3 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}. \quad (8.2)$$

Výslednú globálnu váhovú funkciu uvažovaného riadiaceho bodu ilustruje obr. 8.1a).

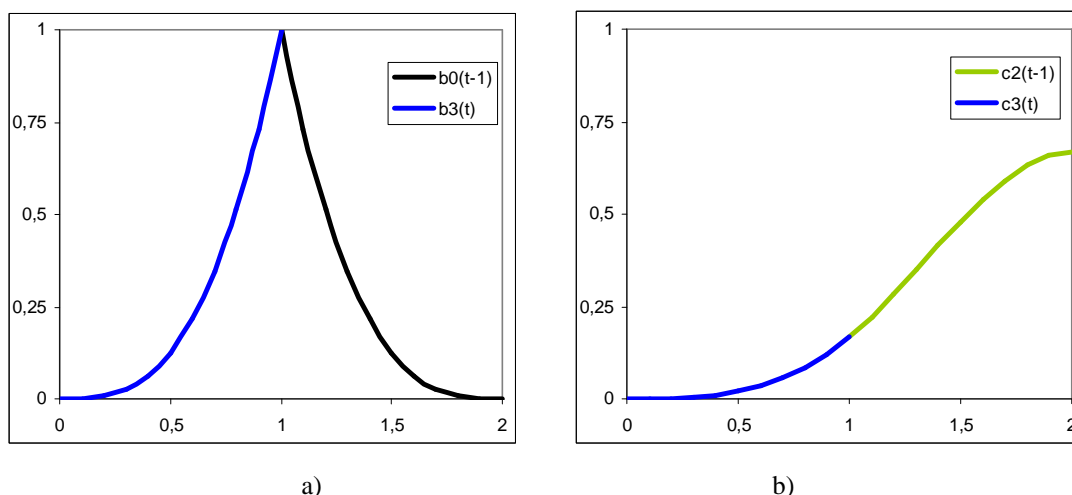
Schéma pre Coonsov splajn (7.2) je v „globálnom“ čase vyjadrená takto:

$$\begin{aligned} C_0(t) &= c_0(t)P_0 + c_1(t)P_1 + c_2(t)P_2 + c_3(t)P_3 \\ C_1(t-1) &= c_0(t-1)P_1 + c_1(t-1)P_2 + c_2(t-1)P_3 + c_3(t-1)P_4 \\ C_2(t-2) &= c_0(t-2)P_2 + c_1(t-2)P_3 + c_2(t-2)P_4 + c_3(t-2)P_5 \\ &\vdots \\ C_{n-3}(t-n+3) &= c_0(t-n+3)P_{n-3} + c_1(t-n+3)P_{n-2} + c_2(t-n+3)P_{n-1} + c_3(t-n+3)P_n \end{aligned}$$

Globálna váhová funkcia pre bod  $P_3$  na intervale  $0 \leq t \leq 2$  je v tomto prípade:

$$w_{P_3}(t) = \begin{cases} c_3(t) = \frac{t^3}{6} & 0 \leq t \leq 1 \\ c_2(t-1) = \frac{1+3(t-1)+3(t-1)^2-3(t-1)^3}{6} & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}, \quad (8.3)$$

čo ilustruje obr. 8.1b).



Obr. 8.1 Globálna váhová funkcia koncového riadiaceho bodu. a) Bézierova kubická krivka, b) Coonsova krivka.

Doteraz sme sa venovali váhovým funkciám hlavne z lokálneho pohľadu, čo zabezpečuje parametrickú hladkosť výslednej krivky príslušného stupňa v rámci jedného časového kroku.

Ako ukazuje Obr. 8.1, v globálnom priebehu času, tj. v celej oblasti vplyvu riadiaceho bodu na výslednú krivku, sú váhovými funkciami splajnové funkcie. Mechanizmus, ktorý dovoľuje riadiť jednotným spôsobom váhové funkcie riadiacich bodov v globálnom čase, je predmetom tejto kapitoly.



## 8.2 Definícia b-splajnu

Vyššie ukázané skutočnosti viedli k zavedeniu pojmu b-splajn, kde váhové funkcie riadiacich bodov definujeme rekurentne nasledujúcim spôsobom (de Boorova schéma):

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & t \notin \langle t_i, t_{i+1} \rangle \end{cases} \quad (8.4^1)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad (8.4^2)$$

Namiesto  $w_{i,k}(t)$  sa z tradičných dôvodov používa značenie  $N_{i,k}(t)$ . V tejto definícii sa objavuje nový fenomén – hodnoty  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Nazývame ich *uzly (knots)* a celú  $m$ -ticu *uzlový vektor*. Je to vlastne nástroj pre zavedenie vyššie zmieneného globálneho času.

Definujme spočiatku pre jednoduchosť  $t_i = i$ . Dostávame tak *uniformný uzlový vektor*.

Rekurentný vzťah pre váhové funkcie (8.4<sup>2</sup>) nadobudne v tomto prípade tvar

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-i}{k} N_{i,k-1}(t) + \frac{k+1-(t-i)}{k} N_{i+1,k-1}(t). \quad (8.4^3)$$

Výslednú krivku nazývame *uniformný b-splajn*.

Podme porozumieť konštrukcii

$$P(t) = N_{0,0}(t)P_0 + N_{1,0}(t)P_1 + \dots + N_{n,0}(t)P_n.$$

Vzhľadom na (8.4<sup>1</sup>), pre všetky  $0 \leq t < 1$  dostávame  $P(t) = P_0$ . Podobne pre každý ďalší interval  $i \leq t < i+1$  dostávame  $P(t) = P_i$ . To vlastne znamená, že b-splajn s postupujúcim časom  $t$  v uzlových hodnotách „preskočí“ z jedného riadiaceho bodu na susedný, tj.



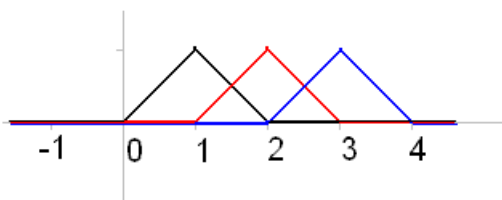
*b-splajn nultého stupňa je množina izolovaných riadiacich bodov.*

Pozrime sa teraz na b-splajny prvého stupňa.

$$P(t) = N_{0,1}(t)P_0 + N_{1,1}(t)P_1 + \dots + N_{n,n}(t)P_n.$$

Po prvom kroku rekurencie pre uniformný uzlový vektor máme váhové funkcie:

$$N_{0,1} = \begin{cases} t & t \in \langle 0,1 \rangle \\ 2-t & t \in \langle 1,2 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0,2 \rangle \end{cases}, \quad N_{1,1} = \begin{cases} t-1 & t \in \langle 1,2 \rangle \\ 3-t & t \in \langle 2,3 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 1,3 \rangle \end{cases}, \quad N_{2,1} = \begin{cases} t-2 & t \in \langle 2,3 \rangle \\ 4-t & t \in \langle 3,4 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 2,4 \rangle \end{cases}, \quad \dots \quad (8.5)$$



Obr. 8.2 Lineárne váhové funkcie  $N_{0,1}(t)$  – čierna,  $N_{1,1}(t)$  – červená,  $N_{2,1}(t)$  – modrá. Každá z nich je zložená z dvoch lineárnych (nenulových) segmentov.

Dosadením váhových funkcií (8.5) do rovnice krivky (2.3) vidíme, že na intervale  $i+1 \leq t < i+2$  platí

$$P(t) = (i+2-t)P_i + (t-i-1)P_{i+1} = P_i + (t-i-1)(P_{i+1} - P_i).$$

Pre väčšiu prehľadnosť zavedieme substitúciu  $\tau = t - i - 1$

$$P(i+1+\tau) = (1-\tau)P_i + \tau P_{i+1} = P_i + \tau(P_{i+1} - P_i), \quad 0 \leq \tau < 1,$$



z čoho vidíme, že výsledná krivka je poskladaná z úsečiek, ktoré spájajú dvojice susedných riadiacich bodov. Z uvedeného vyplýva, že

*b-splajn prvého stupňa je lineárne lomená čiara definovaná riadiacimi bodmi.*



Z Obr. 8.2 vidíme, a platí to pre *uniformné b-splajny všeobecne*, že

*váhové funkcie rovnakého stupňa sa líšia len vzájomným posunom,*

čo formálne možno zapísať:

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} \dots & \\ f(t) & j \leq t < j+1 \\ \dots & \\ \dots & \end{cases} \Rightarrow N_{i+1,k}(t) = \begin{cases} \dots & \\ f(t-1) & j+1 \leq t < j+2 \\ \dots & \end{cases} \quad (8.6)$$

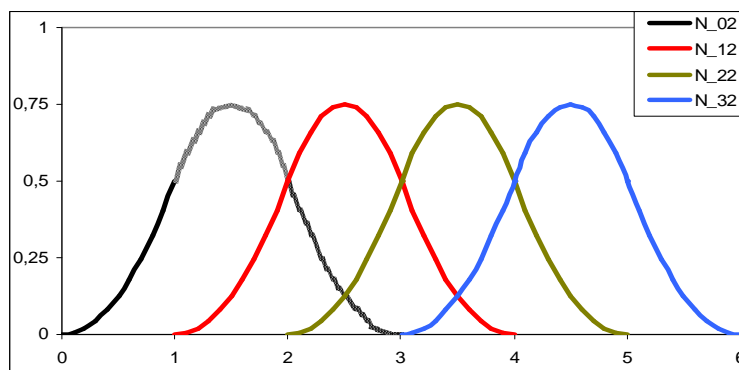


Uniformné váhové funkcie možno preto generovať postupne tak, že jednu funkciu požadovaného stupňa vygenerujeme rekurentne s pomocou (8.4<sup>3</sup>) a ostatné funkcie toho istého stupňa získame posunom (8.6). Demonštrujeme to na príklade váhovej funkcie  $N_{0,2}(t)$ .

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{t-0}{2-0} N_{0,1} + \frac{3-t}{3-1} N_{1,1} = \frac{t}{2} N_{0,1} + \frac{3-t}{2} N_{1,1} = \\ &= \begin{cases} \frac{t}{2} t & t \in \langle 0,1 \rangle \\ \frac{t}{2} (2-t) & t \in \langle 1,2 \rangle \\ 0 & t \in \langle 2,3 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0,3 \rangle \end{cases} + \begin{cases} 0 & t \in \langle 0,1 \rangle \\ \frac{3-t}{2} (t-1) & t \in \langle 1,2 \rangle \\ \frac{3-t}{2} (3-t) & t \in \langle 2,3 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0,3 \rangle \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} t^2 & t \in \langle 0,1 \rangle \\ -2t^2 + 6t - 3 & t \in \langle 1,2 \rangle \\ (3-t)^2 & t \in \langle 2,3 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0,3 \rangle \end{cases} \quad (8.7) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} t^2 & t \in \langle 0,1 \rangle \\ -2(t-1)^2 + 2(t-1) + 1 & t \in \langle 1,2 \rangle \\ (1-(t-2))^2 & t \in \langle 2,3 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0,3 \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

Na základe posunu (8.6) môžeme z  $N_{0,2}(t)$  generovať ďalšie funkcie  $N_{i,2}(t)$ ,

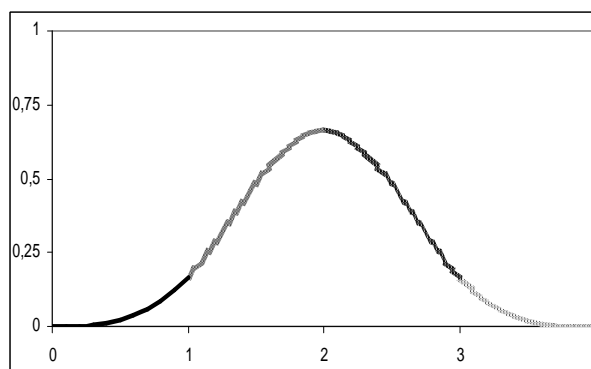
$$N_{i,2}(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} (t-i)^2 & t \in \langle i, i+1 \rangle \\ -2(t-(i+1))^2 + 2(t-(i+1)) + 1 & t \in \langle i+1, i+2 \rangle \\ (1-(t-(i+2)))^2 & t \in \langle i+2, i+3 \rangle \\ 0 & t \notin \langle i, i+3 \rangle \end{cases} \quad (8.8)$$



Obr. 8.3 Váhové funkcie  $N_{0,2}(t)$  – čierna (s rozlíšením jednotlivých kvadratických polynómov),  $N_{1,2}(t)$  – červená,  $N_{2,2}(t)$  – zelená,  $N_{3,2}(t)$  – modrá.

Podobne z dvoch susedných funkcií druhého stupňa s použitím (8.4<sup>3</sup>) konštruujeme kubické váhové funkcie  $N_{i,3}(t)$ . Odvodzovať to nebudeme, obmedzíme sa len na výsledné vyjadrenie funkcie  $N_{0,3}(t)$ .

$$N_{0,3}(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} t^3 & t \in \langle 0,1 \rangle \\ -3(t-1)^3 + 3(t-1)^2 + 3(t-1) + 1 & t \in \langle 1,2 \rangle \\ 3(t-2)^3 - 6(t-2)^2 + 4 & t \in \langle 2,3 \rangle \\ -((t-3)-1)^3 & t \in \langle 3,4 \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0,4 \rangle \end{cases} . \quad (8.9)$$



Obr. 8.4 Kubická váhová funkcia  $N_{0,3}(t)$ . Rôznym vzorom sú odlíšené jednotlivé kubické polynómy z (8.9).

Teraz na základe vzájomného posunutia (8.6) môžeme podobne ako v prípade kvadratických uniformných splajnov vyjadriť ľubovoľnú z kubických váhových funkcií:

$$N_{i,3}(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} (t-i)^3 & t \in \langle i, i+1 \rangle \\ -3(t-(i+1))^3 + 3(t-(i+1))^2 + 3(t-(i+1)) + 1 & t \in \langle i+1, i+2 \rangle \\ 3(t-(i+2))^3 - 6(t-(i+2))^2 + 4 & t \in \langle i+2, i+3 \rangle \\ -((t-(i+3))-1)^3 & t \in \langle i+3, i+4 \rangle \\ 0 & t \notin \langle i, i+4 \rangle \end{cases} \quad (8.10)$$

### 8.3 Kvadratický Bézierov splajn ako uniformný b-splajn

Generujme b-splajn vychádzajúc z váhových funkcií (8.7)–(8.8),

$$P(t) = N_{0,2}(t)P_0 + N_{1,2}(t)P_1 + N_{2,2}(t)P_2$$

pre  $2 \leq t \leq 3$ , tj. na intervale, kde sú nenulové všetky tri funkcie  $N_{0,2}(t)$ ,  $N_{1,2}(t)$ ,  $N_{2,2}(t)$ :

$$P(t) = \frac{(3-t)^2}{2} P_0 - \frac{(11-10t+2t^2)}{2} P_1 + \frac{(t-2)^2}{2} P_2 \quad (8.11)$$

Presvedčte sa sami, že

$$P(2) = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad P(3) = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad P'(2) = P_1 - P_0, \quad P'(3) = P_2 - P_1. \quad (8.12)$$

Keď označíme nové body

$$R_0 = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad R_1 = P_1, \quad R_2 = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad (8.13)$$

vzťahy (8.12) nadobudnú tvar

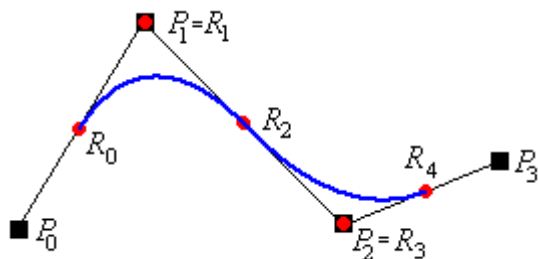
$$R(0) = R_0, \quad R(1) = R_2, \quad R'(0) = 2(R_1 - R_0), \quad R'(1) = 2(R_2 - R_1).$$

Dostali sme tak krivku, ktorá spĺňa podmienky kvadratickej Bézierovej krivky.

A skutočne, keď v kvadratickej Bézierovej krivke

$$R(\tau) = (1-\tau)^2 R_0 + 2(1-\tau)\tau R_1 + \tau^2 R_2$$

použijeme substitúciu  $\tau = t - 2$  a (8.13), tak po elementárnych aritmetických úpravách dostaneme (8.11) na intervale  $2 \leq t \leq 3$ .



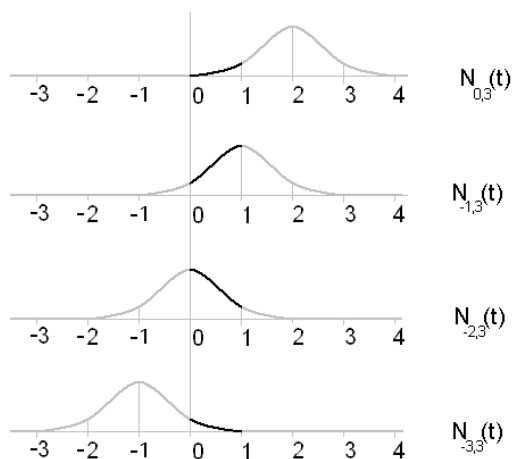
Obr. 8.5 Kvadratický splajn ako Béziov (daný riadiacimi bodmi  $R_i$ ) a ako b-splajn (daný riadiacimi bodmi  $P_i$ ).

Obr. 8.5 demonštruje to, čo sme zmieňovali v úvode kapitoly ako zásadný rozdiel medzi prístupom „bézierovským“ a „b-splajnovým“: keď krivku zadávame ako kvadratický Béziov splajn (tj. „červenými“ riadiacimi bodmi  $R_i$ ), tak požiadavka hladkosti znamená, že sami musíme zabezpečiť, aby body  $R_1, R_2, R_3$ , ležali na jednej priamke. Keď túto krivku zadávame ako kvadratický b-splajn (tj. „čiernymi“ riadiacimi bodmi  $P_i$ ), hladkosť dostávame automaticky.

#### 8.4 Coonsova krivka ako uniformný kubický b-splajn

Pozrime sa teraz na váhové funkcie  $N_{-1,3}(t)$ ,  $N_{-2,3}(t)$ ,  $N_{-3,3}(t)$ . Podľa vyššie uvedenej vlastnosti vzájomného posunu všetky z nich sú tvarovo rovnaké ako  $N_{0,3}(t)$ , akurát sú posunuté smerom doľava – Obr. 8.6.

Uvažujme krivku  $P(t) = \sum_{i=0}^3 N_{i-3,3}(t)P_i$  len na intervale  $0 \leq t \leq 1$ .



Obr. 8.6 Kubické váhové funkcie so zvýraznením na intervale  $0 \leq t \leq 1$ .

Pozrime sa na druhý segment váhovej funkcie  $N_{-1,3}(t)$ . Z (8.10) dostávame:

$${}_2N_{-1,3}(t) = \frac{1}{6}(-3(t - (-1+1))^3 + 3(t - (-1+1))^2 + 3(t - (-1+1)) + 1) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = c_2(t).$$

Podobne pre tretí segment funkcie  $N_{-2,3}(t)$  a štvrtý segment funkcie  $N_{-3,3}(t)$  (realizujte sami), dostaneme

$${}_3N_{-2,3}(t) = c_1(t), \quad {}_4N_{-3,3}(t) = c_0(t).$$

Vidíme tak, že zvýraznené segmenty váhových funkcií  $N_{0,3}(t)$ ,  $N_{-1,3}(t)$ ,  $N_{-2,3}(t)$ ,  $N_{-3,3}(t)$  z Obr. 8.6 sú totožné s váhovými funkciami Coonsovej krivky. Znamená to, že

*uniformný kubický b-splajn je Coonsova krivka*

a má tak hladkosť druhého stupňa.



Dalo by sa takto pokračovať ďalej a vo všeobecnom tvare ukázať, že schéma (8.4<sup>2</sup>) zvyšuje stupeň hladkosti výsledného splajnu, tak, že *v uzlových bodoch splajnu je hladkosť o jeden stupeň nižšia než hladkosť medzi uzlovými bodmi.*



## 8.5 Neuniformné váhové funkcie

### 8.5.1 Lineárny prípad

Vráťme sa k príkladu (4.5) – Obr. 4.2c),  $P_0 = (-0.5, -0.5)$ ,  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 2)$  ktorý demonštruje veľmi jednoduchú situáciu parametrickej nehladkosti, keď sa rýchlosť pohybu po úsečke  $P_0P_2$  v bode  $P_1$  mení skokom. Toto je spôsobené tým, že nerovnako dlhé úsečky  $P_0P_1$  a  $P_1P_2$  pri uniformnej parametrizácii musíme prejsť za rovnaký čas. Keď zvolíme časovú parametrizáciu úmernú dĺžkam úsečiek, tj. uzlový vektor napr.  $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 5$ , tak dostávame váhové funkcie:

$$N_{0,1}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} N_{0,0}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) = \begin{cases} -\frac{t-t_0}{t_0} & t < 0 \\ 1-t & 0 \leq t < 1 \end{cases},$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ \frac{5-t}{4} & 1 \leq t < 5 \end{cases},$$

$$N_{2,1}(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_3} N_{3,0}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{4} & 1 \leq t < 5 \\ \frac{t_4-t}{t_4-5} & 5 \leq t \end{cases}.$$

Pre úplné definovanie váhových funkcií by sme potrebovali ešte vedieť hodnoty  $t_0$  a  $t_4$ . Nás ale nezaujíma, čo sa dialo v čase  $t < t_1 = 0$  a čo sa bude diať v čase  $t > t_3 = 5$ .

V pre nás zaujímavých časových intervaloch  $0 \leq t < 1$  a  $1 \leq t < 5$  je výsledkom krivka

$$Q(t) = \begin{cases} P^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = P_0 + t(P_1 - P_0), & 0 \leq t < 1 \\ P^2(t) = \frac{5-t}{4}P_1 + \frac{t-1}{4}P_2 = P_1 + \frac{t-1}{4}(P_2 - P_1), & 1 \leq t < 5 \end{cases}$$



Necháva sa čitateľovi preveriť, že pre body  $P_0 = (-0.5, -0.5)$ ,  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 2)$  je výsledný pohyb po krivke  $Q(t)$  rovnomerný (tj. v celom priebehu je rýchlosť pohybu konštantná).

Vyššie uvedený príklad demonštruje zmysel zavedenia neuniformity. Vďaka definícii (8.4) toto bude fungovať i pre b-splajny vyšších stupňov. Obmedzíme sa na ukážku v kvadratickom prípade.

### 8.5.2 Kvadratický prípad

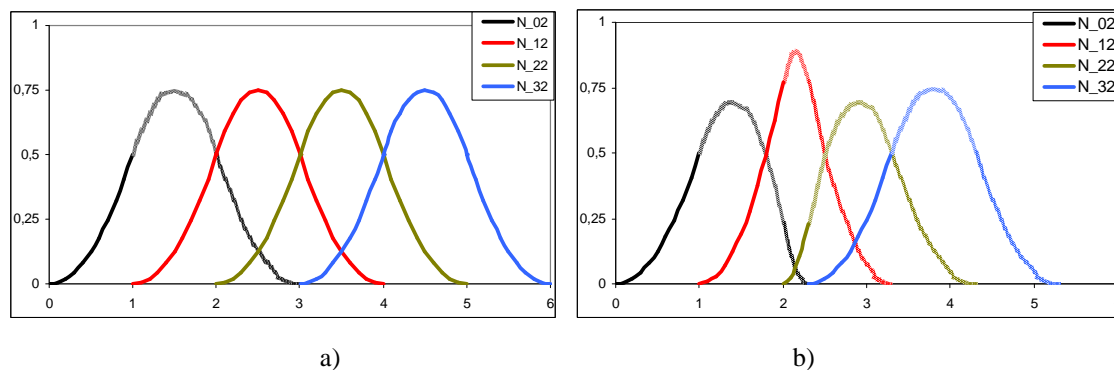
Uvažujme uzlový vektor  $T_{3,\Delta} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (0, 1, 2, 2+\Delta, 3+\Delta, 4+\Delta, 5+\Delta)$ . Ináč povedané, uvažujeme uniformné delenie s výnimkou jediného intervalu  $t_2 \leq t < t_3$ . Vzhľadom na to, že počnúc uzlom  $t_3$  je uzlový vektor uniformný, všetky váhové funkcie  $N_{i,1}(t)$ , kde  $i \geq 3$  dostaneme príslušným posunutím váhovej funkcie uniformného delenia. Necháva sa čitateľovi odvodiť váhové funkcie  $N_{0,2}(t)$ ,  $N_{1,2}(t)$ ,  $N_{2,2}(t)$  a overiť že výsledkom sú funkcie z Tab. 8.1.

	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2, 2+\Delta \rangle$	$\langle 2+\Delta, 3+\Delta \rangle$	$\langle 3+\Delta, 4+\Delta \rangle$
$N_{0,2}(t)$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{t(2-t)}{2} + \frac{(2-t+\Delta)(t-1)}{1+\Delta}$	$\frac{(2-t+\Delta)^2}{(1+\Delta)\Delta}$		
$N_{1,2}(t)$		$\frac{(t-1)^2}{1+\Delta}$	$\frac{(t-1)(2-t+\Delta)}{(1+\Delta)\Delta} + \frac{(3-t+\Delta)(t-2)}{(1+\Delta)\Delta}$	$\frac{(3-t+\Delta)^2}{1+\Delta}$	
$N_{2,2}(t)$			$\frac{(t-2)^2}{(1+\Delta)\Delta}$	$\frac{(t-2)(3-t+\Delta)}{1+\Delta} + \frac{(4-t+\Delta)(t-2-\Delta)}{2}$	$\frac{(4-t+\Delta)^2}{2}$

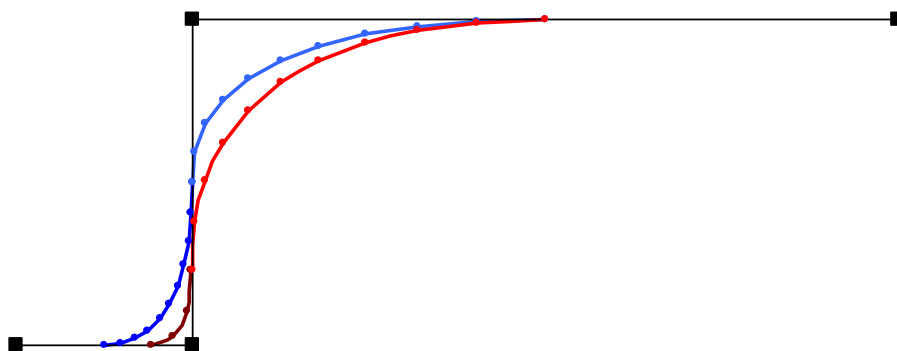
Tab. 8.1 Váhové funkcie kvadratických b-splajnov pre uzlový vektor

$$T_{3,\Delta} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (0, 1, 2, 2+\Delta, 3+\Delta, 4+\Delta, 5+\Delta).$$

Obr. 8.7 ukazuje váhové funkcie pre uniformný uzlový vektor a pre uzlový vektor  $T_{3,\Delta}$ , pre  $\Delta=0.3$ . Pre neuniformný uzlový vektor – obr. 8.7b) sú rôznym vzorom odlišené jednotlivé segmenty váhových funkcií.



Obr. 8.7 Kvadratické váhové funkcie a) uniformné, b) pre uzlový vektor  $T_{3,\Delta}$ , kde  $\Delta=0.3$ .



Obr. 8.8 Uniformný (modrý) a neuniformný (červený) kvadratický b-splajn pre váhové funkcie z Obr. 8.7, s vyznačením diskretizačného kroku  $d=0.1$ .

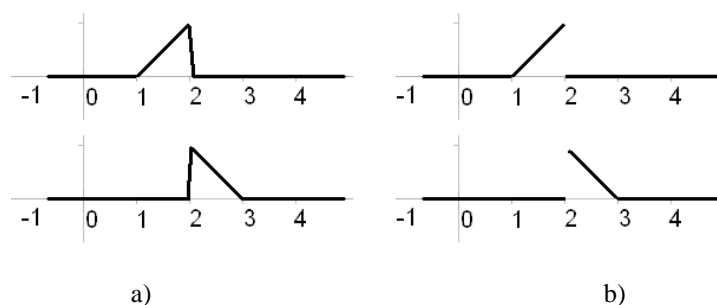
Na obr. 8.8 vidíme dôsledok zmeny váhových funkcií pri neuniformnom delení. Váha druhého riadiaceho bodu sa zvýši oproti uniformnému prípadu, tj. neuniformný splajn (v porovnaní s uniformným) viac k tomuto bodu priskyká. Navyše vidíme, že rýchlosť pohybu bodu po neuniformnej krivke je rovnomernejšia ako po uniformnej: najkratší – tmavočervený úsek (neuniformná krivka) prejdeme za tri časové kroky, kým tmavomodrý úsek (uniformná krivka) za desať krokov, tj. za taký istý časový interval, ako svetločervený resp. svetlomodrý úseky príslušných kriviek.

Znamená to, že je vhodné voliť mieru neuniformity parametrizácie v závislosti na pomere vzájomných dĺžok spojovaných kriviek.



### 8.5.3 Násobné uzly

Vychádzajúc z (8.4<sup>2</sup>) vidíme, že prirodzeným obmedzením na hodnoty uzlov je požiadavka monotónnosti, tj.  $i < j \Rightarrow t_i < t_j$ . Pozrime sa, čo sa bude diať, keď susedné uzlové hodnoty budeme k sebe približovať až do vzájomného splynutia. Situáciu ilustruje Obr. 8.9.



Obr. 8.9 a) Susedné lineárne váhové funkcie pre  $t_1=1$ ,  $t_2=2$ ,  $t_3=2.1$ ,  $t_4=3$ . b) Keď budeme  $t_3$  posúvať ešte viac vľavo, v limitnom prípade, tj. pre  $t_2=t_3$  dostaneme nespojitú váhové funkcie.

Aby vzťah (8.4<sup>2</sup>) zostal korektný i v tomto limitnom stave, je treba určiť hodnotu zlomku s nulovým menovateľom. Korektnou analýzou limitného prechodu vo vzťahu (8.4<sup>2</sup>) by sme dospeli k výsledku, že v našom kontexte je zmysluplné definovať

$$\frac{t-t_k}{0-0}N_{i,j} = \frac{t_k-t}{0-0}N_{i,j} = 0. \quad (8.14)$$

Pozrime sa, ako budú vyzerat' váhové funkcie pre uzlový vektor

$T_{3,0} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (0, 1, 2, 2, 3, 4, 5)$ . Lineárne funkcie  $N_{1,1}(t)$  a  $N_{2,1}(t)$  sú na Obr.8.9b). Funkcie  $N_{0,1}(t)$ ,  $N_{3,1}(t)$ ,  $N_{4,1}(t)$  majú štandardný tvar ako na Obr. 8.2, s vrcholmi v hodnotách  $t=1, 3, 4$ .

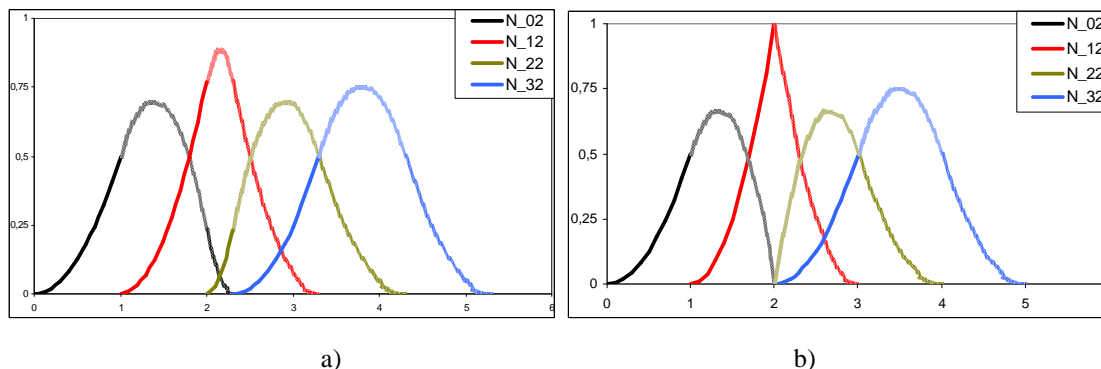
Kvadratické a kubické váhové funkcie sú v Tab. 8.2, ich grafická reprezentácia je na Obr. 8.10–8.11.

	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 4,5 \rangle$
$N_{0,2}(t)$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{(2-t)(3t-2)}{2}$			
$N_{1,2}(t)$		$(t-1)^2$	$(3-t)^2$		
$N_{2,2}(t)$			$\frac{(t-2)(10-3t)}{2}$	$\frac{(4-t)^2}{2}$	
$N_{3,2}(t)$			$\frac{(t-2)^2}{2}$	$-\frac{2t^2-14t+23}{2}$	$\frac{(5-t)^2}{2}$
$N_{0,3}(t)$	$\frac{t^3}{4}$	$-\frac{5t^3-18t^2+18t-6}{2}$	$\frac{(3-t)^3}{2}$		



$N_{1,3}(t)$		$\frac{(t-1)^3}{2}$	$\frac{5t^3 - 42t^2 + 114t - 98}{4}$	$\frac{(4-t)^3}{4}$	
$N_{2,3}(t)$			$\frac{(t-2)^2(40-11t)}{2}$	$\frac{7t^3 - 78t^2 + 282t - 326}{12}$	$\frac{(5-t)^3}{6}$

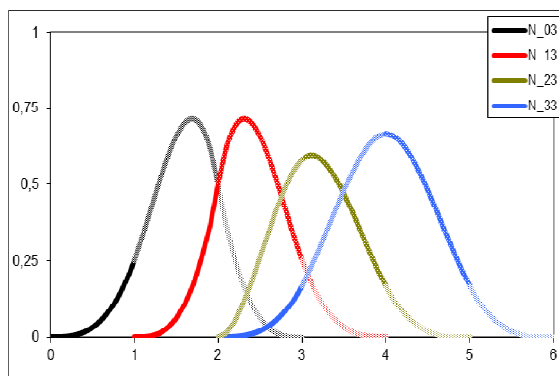
Tab. 8.2 Váhové funkcie kvadratických a kubických b-splajnov pre uzlový vektor  $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (0, 1, 2, 2, 3, 4, 5)$ .



Obr. 8.10. Prechod od neuniformného uzlového vektoru a) k násobnému uzlu b) pre kvadratické váhové funkcie.

Na Obr. 8.10 sú odlišené rôznym vzorom jednotlivé časti kvadratických váhových funkcií. Kým pre uniformný prípad  $N_{3,2}(t)$  (modrá váhová funkcia) máme tri časti, pre váhové funkcie  $N_{0,2}(t)$  – čierna,  $N_{1,2}(t)$  – červená,  $N_{2,2}(t)$  – zelená, v limitnom prípade  $\Delta=0$  postupne zdegenerujú tretia, druhá a prvá časť váhovej funkcie. Vidíme, že kvadratické váhové funkcie  $N_{0,2}(t)$ ,  $N_{1,2}(t)$ ,  $N_{2,2}(t)$  z obr. 8.10b), tj. tie, ktoré súvisia s násobným uzlom  $t=2$  sú síce spojité, no nie sú hladké. Funkcia  $N_{3,2}(t)$  (obr. 8.10a) – modrá) je štandardná váhová funkcia uniformného b-splajnu.

Podobne na Obr. 8.11, modrá – uniformná kubická váhová funkcia  $N_{3,3}(t)$  je zložená zo štyroch segmentov. Váhové funkcie  $N_{0,3}(t)$  –  $N_{2,3}(t)$  (čierna, červená a zelená), ktoré sú ovplyvnené násobným uzlom majú vždy jeden zdegenerovaný segment – postupne tretí, druhý a prvý.



Obr. 8.11. Kubické váhové funkcie pre násobný uzol  $t=2$  z Tab. 8.2 a váhová funkcia uniformného delenia (modrá).

Kubické váhové funkcie  $N_{0,3}(t)$ ,  $N_{1,3}(t)$ ,  $N_{2,3}(t)$  z Obr. 8.11 sú hladké, no na rozdiel od uniformného b-splajnu ich hladkosť je len prvého stupňa – preverte sami, vychádzajúc z Tab. 8.2.

Z uvedeného vyplýva, že násobnosť uzlu spôsobí zníženie hladkosti odpovedajúcich váhových funkcií v tomto uzle o jeden stupeň.



Kombináciou násobnosti uzlových hodnôt a počtu rekurencií (8.4b), tak dostávame mechanizmus, ako generovať krivky rôzneho stupňa s rôznym stupňom parametrickej hladkosti vo vybraných bodoch.



## 8.6 Bézierova krivka ako b-splajn

Uvažujme uzlový vektor  $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ .

Znamená to, že  $N_{0,0}(t) = N_{1,0}(t) = N_{3,0}(t) = N_{4,0}(t) = 0$ ,  $N_{2,0}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \end{cases}$ .

Vychádzajúc z (8.14) dostaneme lineárne váhové funkcie

$$N_{0,1}(t) = N_{3,1}(t) = 0,$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{t-0}{0-0} N_{1,0}(t) + \frac{1-t}{1-0} N_{2,0}(t) = 1-t, \quad N_{2,1}(t) = \frac{t-0}{1-0} N_{2,0}(t) + \frac{1-t}{1-1} N_{3,0}(t) = t,$$

pričom obidve funkcie  $N_{1,1}(t)$  i  $N_{2,1}(t)$  sú definované na intervale  $0 \leq t < 1$ .

Pre kvadratické váhové funkcie máme

$$N_{0,2}(t) = \frac{t-0}{0-0} N_{0,1}(t) + \frac{1-t}{1-0} N_{1,1}(t) = (1-t)^2$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t-0}{1-0} N_{1,1}(t) + \frac{1-t}{1-0} N_{2,1}(t) = t(1-t) + (1-t)t = 2(1-t)t$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{t-0}{1-0} N_{2,1}(t) + \frac{1-t}{0-0} N_{3,1}(t) = t^2$$

Vo všeobecnom prípade pre uzlový vektor

$$\left( \underbrace{0,0,\dots,0}_{k+1}, \underbrace{1,1,\dots,1}_{k+1} \right)$$

by sme podobným postupom dospeli k váhovým funkciám – Bernsteinovým polynómom

$$N_{ik}(t) = \binom{k}{i} (1-t)^{k-i} t^i$$

čo sú váhové funkcie Bézierovej krivky.

## 8.7 Lemma o normovanosti váhových funkcií

V kap. 6 sme dokázali Lemmu o normovanosti váhových funkcií bézierovej krivky, tj.

fakt, že  $\sum_{i=0}^n b_i^n(t) = 1$  pre ľubovoľný stupeň  $n$ . Podobne v závere kap. 7 sme nechali

čitateľa overiť, že toto platí i pre Coonsovu krivku, tj. že  $c_0(t) + c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) = 1$ .

Keď sa pozrieme na adekvátne výrazy pre váhové funkcie b-splajnov vidíme, že

očividne platí  $\sum_i N_{i,0}(t) = 1$ ,  $\sum_i N_{i,1}(t) = 1$ . Použijúc Tab. 8.1 overte sami, že na intervale

$\langle 2, 2+\Delta \rangle$  toto platí i pre kvadratické váhové funkcie, tj.  $\sum_i N_{i,2}(t) = 1$ .

Dala by sa dokázať (podobne ako niektoré iné tvrdenia však toto dokazovať nebudeme)

**Lemma 2b** (o normovanosti váhových funkcií b-splajnov).

Pre ľubovoľný stupeň  $k$  váhových funkcií platí  $\sum_i N_{i,k}(t) = 1$ . ■

Pritom pre každú hodnotu parametra  $t$  do tejto sumy musíme zahrnúť všetky indexy

$i$  také, že funkcia  $N_{i,k}(t)$  je nenulová. Znamená to, že napr. na intervale  $\langle 3+\Delta, 4+\Delta \rangle$

z obr. 8.10 do tejto sumy musíme zahrnúť okrem zobrazených funkcií  $N_{2,2}(t)$ ,  $N_{3,2}(t)$

i nezobrazenú funkciu  $N_{4,2}(t)$ .

### Kontrólne otázky a samostatné úlohy

1. Realizujte deBoorov algoritmus (8.4) pre generovanie váhových funkcií b-splajnov.
2. V uniformnom uzlovom vektore meňte hodnotu jedného uzlu a sledujte zmenu váhových funkcií.
3. Čo sa stane s krivkou z Obr. 8.8 pri splynutí uzlov  $t_2 = t_3 = 2$ ?

Vhodným dopĺňujúcim internetovým zdrojom je

[http://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/B%E2%80%93spline\\_k%C5%99ivka](http://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/B%E2%80%93spline_k%C5%99ivka)

## 9 Racionálne krivky

V tejto kapitole sa dozviete:

- prečo sú polynomicke (splajnové) váhové funkcie nedostačujúce,
- ako sa zavádza štandardizovaným spôsobom racionálna krivka,
- ako si možno názorne predstaviť prechod od prostých polynomických kriviek k racionálne polynomickým krivkám.

Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- implementovať racionálne krivky v zjednodušenej podobe.

**Kľúčové slová tejto kapitoly:**

homogénne súradnice, racionálny polynóm.

**Náročnosť kapitoly: táto kapitola je nenáročná.**

### *Sprievodca štúdiom*

*Hlavnou motiváciou konštrukcie, analyzovanej v tejto kapitole je fakt, že kružnicu, ktorá je základnou krivkou technickej praxe, nemožno presne generovať spôsobami, uvedenými v predošlých kapitolách. Je ukázané, že k vyjadreniu kružnice nutne potrebujeme racionálne polynomicke váhové funkcie. Je taktiež ukázané, ako zaviesť racionalitu takým spôsobom, aby sa to dalo názorne geometricky interpretovať.*



Pokúsime sa vyjadriť kružnicu

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (9.1)$$

ako polynomicke parametrickú kvadratickú krivku

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2. \quad (9.2)$$

Znamená to, že aspoň jeden z koeficientov  $a_2, b_2$  je nenulový.

Dosadením (9.2) do (9.1) dostávame

$$a_0^2 + b_0^2 + 2(a_0 a_1 + b_0 b_1)t + (2a_0 a_2 + 2b_0 b_2 + a_1^2 + b_1^2)t^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)t^3 + (a_2^2 + b_2^2)t^4 = r^2.$$

Vidíme, že na ľavej strane je polynóm štvrtého stupňa závisiaci od  $t$ , kým na pravej strane je konštanta. Rovnosť teda môže nastať len v prípade, že všetky koeficienty pri  $t^k$  ( $k > 0$ ) sú nulové. Z toho ale vyplýva, že musí platiť  $a_2 = b_2 = 0$ , ináč povedané, vzťahy (9.2) sú lineárne, čo je spor s predpokladom, že krivka je kvadratická. K takému sporu by sme dospeli i pri každom inom predpokladanom stupni polynomickej parametrizácie. Vidíme tak, že *kružnicu nie je možné vyjadriť ako polynomicke parametrickú krivku.*



To je dosť závažný nedostatok, pretože máme síce mechanizmus, ktorý dovoľuje užívateľsky komfortne generovať rôzne tvary, no tento nástroj nie je kompatibilný s klasickým prístupom pravítka a kružidla.

**Príklad 9.1** Skúsme napr. nahradiť  $\frac{1}{4}$ -kružnicu kvadratickou Bézierovou krivkou.

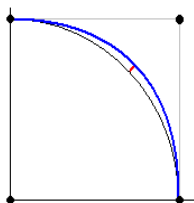
Nech  $P_0=(1,0)$ ,  $P_1=(1,1)$ ,  $P_2=(0,1)$ .

$$P(t) = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i P_i, \text{ tj. } \begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2 \cdot 1 + 2(1-t)t \cdot 1 + t^2 \cdot 0 = 1-t^2 \\ y(t) &= (1-t)^2 \cdot 0 + 2(1-t)t \cdot 1 + t^2 \cdot 1 = 2t-t^2 \end{aligned}$$

Pre  $t=0.5$  dostávame bod so súradnicami  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ , kým na kružnici leží bod  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Max. odchýlka je preto

$$\sqrt{\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1,$$

čo je viac ako 6% – obr. 10.1.



Obr. 9.1 Rozdiel kružnice (čierna) a kvadratickej Bézierovej krivky (modrá). Maximálna odchýlka je označená červene.

Lepšie priblíženie dosiahneme použitím kriviek vyššieho stupňa, alebo aproximáciou väčším počtom kriviek – vid' napr. [5]. Kombináciou oboch prístupov dospejeme k požadovanej presnosti. Napriek tomu, *presné vyjadrenie kružnice za pomoci polynómov* je určitou výzvou k tomu, ako zovšeobecniť parametrický prístup.

## 9.1 Kružnica ako kvadratická racionálna krivka

Uvažujme priamky prechádzajúce bodom  $(-r, 0)$ . Obecne sa dajú vyjadriť vzťahom

$$y = t(x+r). \quad (9.3)$$

Prienik takejto priamky pre zvolený sklon  $t$ , a kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$  (obr. 10.2) je bod so súradnicami

$$x(t) = r \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = r \frac{2t}{1+t^2}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (9.4)$$

Odvodenie je jednoduché – dosadením hodnoty  $y$  (z vyjadrenia priamky (9.3)) do rovnice kružnice dostávame kvadratickú rovnicu  $x^2 + (t(x+r))^2 = r^2$ . Po štandardných aritmetických úpravách máme rovnicu v tvare

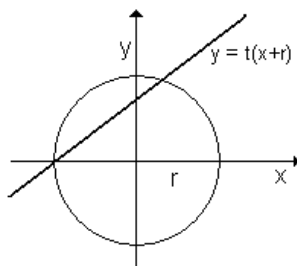
$$(1+t^2)x^2 + 2rt^2x + r^2(t^2-1) = 0$$

ktorá má korene:

$$x_1 = -r, \quad x_2 = r \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ a príslušné } y \text{ dopočítame dosadením do (9.3),}$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = r \frac{2t}{1+t^2} \text{ vid' obr. 9.2.)}$$

Vidíme, že sme dostali parametrické vyjadrenie kružnice za pomoci kvadratických polynómov, pričom polynómy sú v racionálnom tvare (tj. zlomky polynómov) – odtiaľ názov racionálna parametrizácia – konfrontujte s príkladom 2.2.



Obr. 9.2. Geometrická interpretácia racionálnej parametrizácie kružnice.

## 9.2 Štandardizovaný tvar racionálnej krivky

Keď budeme vychádzať z polynomického tvaru krivky vo forme (2.3) s váhovými funkciami  $w_i(t)$ , príslušnú triedu racionálnych kriviek vyjadríme takto:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n q_i w_i(t) P_i}{\sum_{i=0}^n q_i w_i(t)}, \quad q_i > 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (9.5)$$



Hodnoty  $q_i$  nazývame racionálne váhy. Napr. pre kružnicu (resp. pre štvrtkružnicu) tak dostávame možnosť vyjadriť ju ako racionálnu Bézierovu krivku 2. stupňa, s riadiacimi bodmi

$$P_0=(r,0), \quad P_1=(r, r), \quad P_2=(0, r),$$

váhovými funkciami

$$w_0 = (1-t)^2, \quad w_1 = 2(1-t)t, \quad w_2 = t^2,$$

a racionálnymi váhami

$$q_0=1, q_1=1, q_2=2.$$

Overte sami, že dosadením týchto hodnôt do (9.5) dostanete (9.4) – vid' príklad 2.2.

Racionálny tvar (9.5) sa môže na prvý pohľad javiť ako príliš zložitý. Ukážeme si však, že táto forma zápisu dovoľuje názorne geometricky demonštrovať vzájomnú súvislosť príslušnej racionálnej a prostej polynomiálnej krivky (tj. kriviek s tými istými váhovými funkciami).

Je vhodné si predtým pripomenúť nasledujúce vzťahy.

- i. Pre fixovaný bod  $P=(x,y,z)$  a kladné reálne číslo  $q>0$ , bod  $qP$  leží na polpriamke, ktorá začína v začiatku súradníc a prechádza bodom  $P$ .
- ii. Keď je daný bod  $P$  navyše taký že  $z \neq 0$ , tak na tejto polpriamke leží i bod  $S = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ . Bod  $S$  je vlastne stredovou projekciou bodu  $P$ , kde stred projekcie je v začiatku súradníc a projekčnou rovinou je rovina  $z = 1$ .

Uvažujme nasledujúcu konštrukciu pre dvojrozmernú krivku (9.5) s riadiacimi bodmi

$$P_0, P_1, \dots, P_n, \quad P_i = (x_i, y_i). \quad (9.6)$$

Body (9.6) „vnoríme“ do trojrozmerného priestoru na rovinu  $z = 1$ . Formálne vyjadrené to znamená, že dostávame „nové“ body

$$R_0, R_1, \dots, R_n, \quad R_i = (x_i, y_i, 1). \quad (9.7)$$

Najprv interpretujeme čitateľa z (9.5) pre riadiace body  $R_i$ .

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n q_i w_i(t) R_i = \sum_{i=0}^n w_i(t) q_i R_i = \sum_{i=0}^n w_i(t) Q_i. \quad (9.8^1)$$

Znamená to, že vzhľadom k racionálnym váham  $q_i$ , z každého riadiaceho bodu  $R_i$  dostaneme podľa vlastnosti **i.** riadiaci bod  $Q_i = q_i R_i$ . Na sade týchto riadiacich bodov vytvoríme parametrickú krivku (9.8<sup>1</sup>), ktorá rozpísaná v súradniciach má vzhľadom na (9.7) tvar:

$$x_Q(t) = \sum_{i=0}^n q_i w_i(t) x_i, \quad y_Q(t) = \sum_{i=0}^n q_i w_i(t) y_i, \quad z_Q(t) = \sum_{i=0}^n q_i w_i(t). \quad (9.8^2)$$

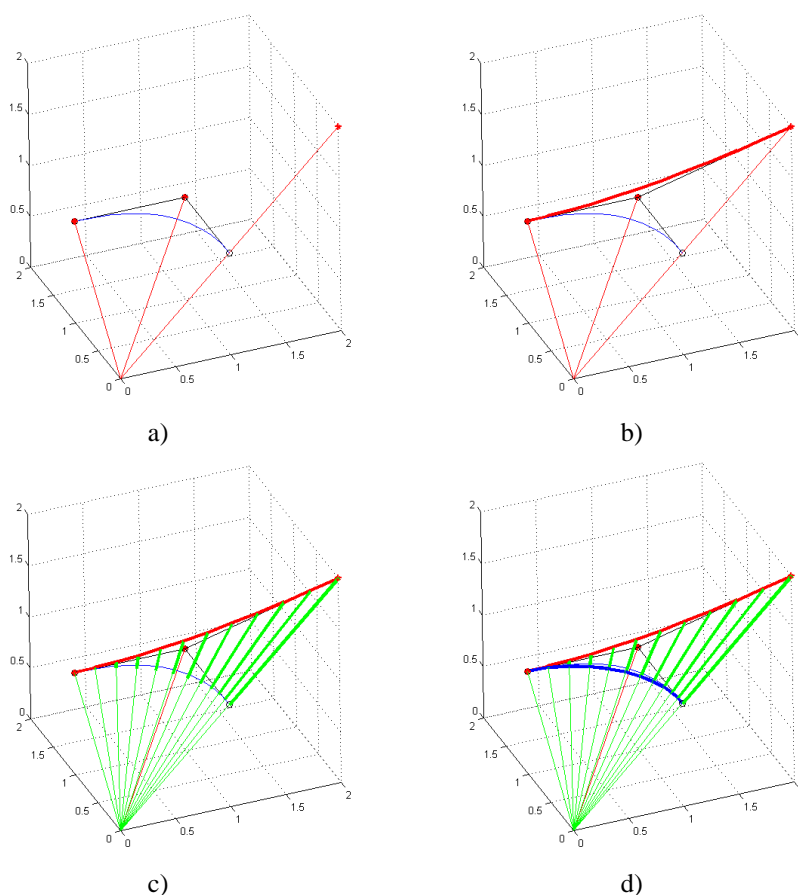


Teraz prejdeme k interpretácii celého zlomku (9.5): každý bod krivky (9.8) stredovo projektujeme do roviny  $z = 1$  so stredom  $(0,0,0)$ . Vzhľadom na **ii.** tak dostávame krivku, súradnice ktorej sú

$$x_p(t) = \frac{x_Q(t)}{z_Q(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n q_i w_i(t) x_i}{\sum_{i=0}^n q_i w_i(t)}, \quad y_p(t) = \frac{y_Q(t)}{z_Q(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n q_i w_i(t) y_i}{\sum_{i=0}^n q_i w_i(t)}, \quad z_p(t) = \frac{z_Q(t)}{z_Q(t)} = 1. \quad (9.9)$$

Keďže  $z$ -súradnica tejto krivky je triviálna, obmedzíme sa len na  $x$  a  $y$  súradnice. Skrátенý – vektorový zápis (9.9) má preto tvar (9.5).

Vyššieuvedenú konštrukciu pre štvrtkružnicu ilustruje obr. 9.3.



Obr. 9.3 Konštrukcia racionálnej krivky:

- body  $R_i$  – prázdne krúžky, bázierova krivka na nich (modrá) a body  $Q_i = q_i R_i$  – červené, pre  $q_0 = q_1 = 1, q_2 = 2$ ,
- bázierova krivka (červená) na bodoch  $Q_i$ ,
- stredová projekcia krivky z b),
- rozdiel bázierovej krivky (tenká čiara) a racionálnej bázierovej krivky (hrubá čiara).



### Kontrólne otázky a samostatné úlohy

1. Z geometrickej interpretácie – obr.10.3 odvodte, ako sa prenášajú vlastnosti (Bézierovej krivky, Coonsovej krivky) na ich racionálne modifikácie.
2. Pre riadiace body  $P_0=(r,0)$ ,  $P_1=(r, r)$ ,  $P_2=(0, r)$ , realizujte racionálnu Bézierovu krivku s racionálnymi váhami  $q_0=2$ ,  $q_1=1$ ,  $q_2=1$ . Riešenie konfrontujte s kružnicou v kap. 10.2.
3. Ako vyzerá racionálna b-splajnová krivka v prípade, že všetky  $q_i$  sú totožné? (Využite Lemmu o normovanosti váhových funkcií.)
4. Modifikáciou už hotových nástrojov generovania kriviek realizujte generovanie racionálnych kriviek.

## 9 Závěrečné dve poznámky k NURBSom

### V tejto kapitole sa dozviete:

- ako možno rozšíriť interpretáciu použitého aparátu pre účely prechodu do vyššej dimenzie pri geometrickom modelovaní, resp. pre použitie v rámci animačných techník, prípadne pre úlohy spracovania obrazu,
- aké sú hranice možností racionálnej polynomickej parametrizácie konfrontované s technickou.

### Po jej preštudovaní by ste mali byť schopní:

- implementovať jednoduché animácie,
- implementovať jednoduchý digitálny ZOOM pre rastrový obraz.

### Kľúčové slová tejto kapitoly:

bilinéarna, bikvadratická, bikubická forma, ofsetová krivka, Pytagorejský hodograf.

**Náročnosť kapitoly: táto kapitola je mierne náročná.**

### ***Sprievodca štúdiom***

*Cieľom tejto kapitoly je dať určitý presah použitého aparátu a ukázať, ako môžu súvisieť i zdanlivo nesúvisiace oblasti. Druhým cieľom je ukázať hranice použitého aparátu v kontexte reálnych úloh technickej praxe.*



Dostali sme sa ku koncu našej exkurzie do základov sveta neuniformných racionálnych b-splajnov. Ukázali sme, prečo je splajn vhodnejší ako interpolačný polynóm. Dospeli sme k formalizácii zvanej b-splajn. Demonštrovali sme vplyv neuniformnej parametrizácie na geometriu výslednej krivky i to, že neuniformita dovedená do singularity znižuje parametrickú hladkosť splajnu. Ukázali sme taktiež, akým spôsobom možno partikulárne riešenia (fergusonova krivka, bézierova krivka, coonsova krivka) vyjadriť ako b-splajny. Významným je racionálne rozšírenie váhových funkcií, pretože zabezpečuje kompatibilitu takto budovaného spôsobu modelovania kriviek s klasickým, založeným na použití pravítka a kružidla.

V tejto kapitole zúročíme vyššie uvedené mechanizmy generovania kriviek na generovanie plôch. Nakoniec si ukážeme, čo bohužiaľ tento koncept nedokáže – generovanie ofsetovej krivky.

### 10.1 Všeobecnejší pohľad na schému (2.3)

V kap. 2 sme začali naše úvahy pohľadom na krivku ako na vážený priemer množiny riadiacich bodov, pričom tieto váhy závisia na čase. Celý čas sme preto vnímali krivku

ako trajektóriu pohybujúceho sa bodu. Zovšeobecníme tento koncept tak, že riadiace body  $P_i$  nahradíme niečím zložitejším.

Majme napr. dve úsečky

$$P(s) = (1-s)P_0 + sP_1, \quad R(s) = (1-s)R_0 + sR_1, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (10.1)$$

Konštrukcie (10.1) z pohľadu geometrie nazývame úsečka, z pohľadu lineárnej algebry ide o lineárnu interpoláciu bodov.

Uvažujme teraz lineárnu interpoláciu, tj. konštrukciu

$$S(t, s) = (1-t)P(s) + tR(s), \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad (10.2^1)$$

kde sme riadiace body nahradili úsečkami (10.1). Znamená to, že pre každú fixovanú hodnotu  $s$  dostávame dvojicu bodov  $P(s)$ ,  $R(s)$  a túto dvojicu spájame úsečkou. Vidíme, že (10.2) plne odpovedá konceptu (2.3).

Podobne, ako sme (2.3) previedli do maticového tvaru (4.3) spravíme to i pre (10.2<sup>1</sup>).

$$\begin{aligned} S(t, s) &= (1-t)P(s) + tR(s) = (1-t)P(s) + tR(s) = \\ &= (1-t \quad t) \begin{pmatrix} P(s) \\ R(s) \end{pmatrix} \\ &= (1-t \quad t) \begin{pmatrix} (1-s)P_0 + sP_1 \\ (1-s)R_0 + sR_1 \end{pmatrix} \\ &= (1-t \quad t) \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ R_0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix} \\ &= (1 \quad t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ R_0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \\ &= (1 \quad t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ R_0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T (1 \quad s)^T. \end{aligned} \quad (10.2^2)$$

**Príklad 10.1** Uvažujme riadiace body

$$P_0 = (0, -1, 1), \quad P_1 = (1, 0, -1), \quad R_0 = (-1, 0, -1), \quad R_1 = (0, 1, 1).$$

Dosadením do (10.2) dostávame pre súradnice nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} x(t, s) &= s - t \\ y(t, s) &= s + t - 1 \\ z(t, s) &= 1 - 2s - 2t + 4st \end{aligned} \quad (10.3)$$

Pokúsime sa vyjadriť vzťah medzi súradnicami v (10.3) explicitne bez použitia parametrov  $t, s$ . Z prvých dvoch rovníc v (10.3) dostaneme:

$$s = \frac{y+x+1}{2}, \quad t = \frac{y-x+1}{2},$$

Dosadením do tretej rovnice máme

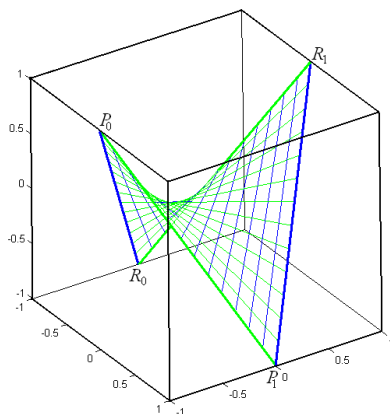
$$z = y^2 - x^2. \quad (10.4)$$

Dostali sme plochu, pre ktorú platí:

- rez s rovinou  $x=c$  dáva parabolou  $z = y^2 - a$ ,
- rez s rovinou  $y=c$  dáva parabolou  $z = a - x^2$ ,
- rez s rovinou  $z=c$  dáva hyperbolu  $c = y^2 - x^2$ ,

kde  $c=a^2$ ,

odtiaľ názov *hyperbolicý paraboloid*. Vzhľadom na konštrukciu tejto plochy sa používa i alternatívny názov – *bilineárna plocha*, viď obr. 10.1.



Obr. 10.1 Bilineárna plocha (10.3).

■

Vidíme, že konštrukciu (10.2) môžeme chápať rôznym spôsobom:

a) ako plochu v geometrickom zmysle slova,

b) ako animáciu, pri ktorej sa úsečka  $P_0P_1$  transformuje do úsečky  $R_0R_1$ ,

a vzhľadom k symetrii (10.2) k parametrom  $s, t$  i

c) ako animáciu pri ktorej sa úsečka  $P_0R_0$  transformuje do úsečky  $P_1R_1$ .

Podobne ako v predošlej konštrukcii, lineárne interpolujeme dve kubické bázierove krivky určené riadiacimi bodmi  $P_0, P_1, P_2, P_3$  a  $R_0, R_1, R_2, R_3$ .

Opakovaním postupu (10.2<sup>1</sup>) dostaneme

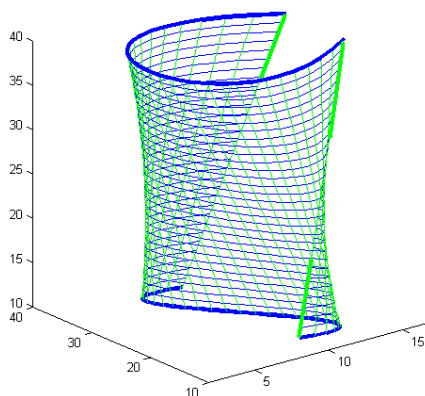
$$\begin{aligned}
S(t, s) &= (1-t)P(s) + tR(s) = (1-t)P(s) + tR(s) = \\
&= (1-t \quad t) \begin{pmatrix} P(s) \\ R(s) \end{pmatrix} \\
&= (1-t \quad t) \begin{pmatrix} b_0^3(s)P_0 + b_1^3(s)P_1 + b_2^3(s)P_2 + b_3^3(s)P_3 \\ b_0^3(s)R_0 + b_1^3(s)R_1 + b_2^3(s)R_2 + b_3^3(s)R_3 \end{pmatrix} \\
&= (1-t \quad t) \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^3(s) & b_1^3(s) & b_2^3(s) & b_3^3(s) \end{pmatrix}^T \\
&= (1 \quad t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{pmatrix}^T
\end{aligned} \tag{10.5}$$

**Príklad 10.2** Pre riadiace body

$$P_0 = (15, 30, 40), P_1 = (0, 50, 40), P_2 = (0, 0, 40), P_3 = (15, 20, 40),$$

$$R_0 = (10, 35, 10), R_1 = (10, 40, 10), R_2 = (20, 10, 10), R_3 = (10, 15, 10),$$

dostávame lineárnu interpoláciu – priamkovú plochu dvoch kubických bázierových kriviek – obr. 10.2.



Obr. 10.2 Priamková plocha kubických bázierových kriviek.

■

Podobne i teraz môžeme túto konštrukciu chápať ako plochu, alebo ako animáciu písmenka „C“ na písmenku „S“ (modré krivky), alebo ako animáciu úsečky, kde sa jej krajné body pohybujú po bázierových krivkách (zelené úsečky).

Na základe vyššie uvedeného, všeobecná maticová forma parametrickej plochy, ktorá je analógom maticového zápisu krivky (4.3) má tvar:

$$S(t, s) = \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{\Pi} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T = \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{\Pi} (\mathbf{S} \mathbf{N})^T \quad (10.6)$$

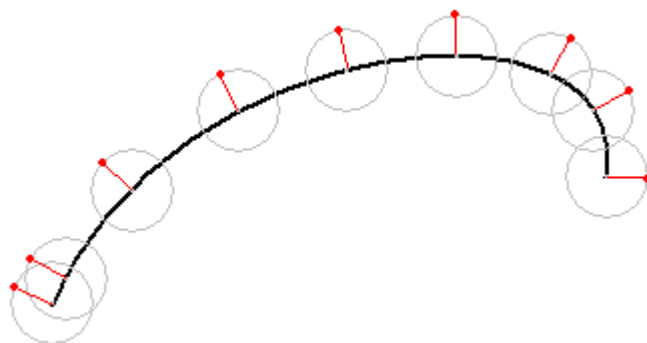
kde  $\mathbf{T} = (1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^m)$  a  $\mathbf{S} = (1 \ s \ s^2 \ \dots \ s^n)$  sú vektory parametrizácie,  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  sú matice váhových funkcií adekvátnej veľkosti, tj.  $\mathbf{M}$  je matica  $m \times m$  a  $\mathbf{N}$  je matica  $n \times n$  a  $\mathbf{\Pi}$  je matica riadiacich bodov, veľkosti  $n \times m$ .

Uvedené jednoduché príklady ukazujú, že tvar (10.6) dáva určitú názornú predstavu, ako daná plocha vyzerá, no z druhej strany demonštrujú ich geometrickú zložitosť:

- prienik takej plochy s rovinou môže byť krivka až stupňa  $n+m$ , (príklad 10.1)
- aj keď sú krivky, ktoré definujú plochu pomerne jednoduché a samy seba nepretínajú, výsledná plocha samu seba pretína, (príklad 10.2).

## 10.2 Ofsetová krivka

Predstavme si nasledujúcu praktickú úlohu: vrták s polomerom  $r$  NC frézy (tj. jeho stred) sa pohybuje po NURBS krivke. Nás zaujíma výsledná vyfrézovaná krivka. Pre každý bod NURBS krivky hľadáme preto taký bod, ktorého kolmá vzdialenosť od tejto krivky je  $r$  – obr. 10.3.



Obr. 10.3. Body s konštantnou kolmou vzdialenosťou od krivky.

Keďže smerový vektor krivky  $P(t) = (x(t), y(t))$  vyjadríme ako  $(x'(t), y'(t))$ , normálové vektory sú  $\pm (y'(t), -x'(t))$  a preto normované normálové vektory sú

$$\bar{n}_{1,2}(t) = \pm \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}.$$

Hľadaná ofsetová krivka, vzdialená od  $P(t)$  o hodnotu  $r$  má preto tvar

$$\Omega(r, P(t)) = P(t) \pm r \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \quad (10.7)$$

V prípade, že  $x'^2(t) + y'^2(t)$  vieme zapísať ako kvadrát polynómu (10.7), hovoríme, že  $P(t) = (x(t), y(t))$  je *krivka s pytagorovským hodografom*. V tomto prípade je jej ofsetová krivka je racionálnou polynomickou krivkou. V obecnom prípade však vidíme, že ofsetová krivka vychádza za rámec NURBS kriviek.

Nebolo úmyslom vytvoriť „negativistický záver“ celej exkurzie do NURBS kriviek. Naopak, snahou bolo motivovať čitateľa k ďalšiemu štúdiu v tejto oblasti.



## Literatúra

- [1] Farin, G.: **NURBS from Projective Geometry to Practical Use**. AK Peters 1999.
- [2] Foley, J.,D., Van Dam, A.: **Fundamentals of Interactive Computer Graphics**. Addison Wesley 1982.
- [3] Ježek, F.: **Geometrické a počítačové modelování**. Pomocný učební text, v. 9.0. FAV, ZČU Plzeň 2008.
- [4] Linkeová, I.: **NURBS křivky**. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.
- [5] Piegl, L., Tiller, W.: **The NURBS Book**. Springer, 1997.
- [6] Žára, J., Beneš, B., Sochor, J., Felkel, P.: **Moderní počítačová grafika**. Computerpress, Brno 2004.