STOLZOVA VĚTA

1

Nový nadpis 25.3.2010

VĚTA: Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti a posloupnost (b_n) nechť je ryze monotónní.

Nechť dále platí:

1) $\lim a_n = \lim b_n = 0$ nebo $\lim |b_n| = +\infty$.

2) $\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \ (\in R^*)$.

Pak:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L.$$

DŮKAZ:

Dokážeme nejprve následující tvrzení: (případ $L=0$)

Nechť jsou (α_n), (β_n) posloupnosti a (β_n) je ryze monotónní. Jestliže platí

1) $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$,

2) $\lim \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = 0$,

pak $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$.

2

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. K tomuto ε tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left| \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} \right| < \varepsilon, \text{ tj.}$$

$$\boxed{|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \varepsilon \cdot |\beta_{n+1} - \beta_n|.} \quad \left(\begin{matrix} n \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_0 \end{matrix} \right)$$

Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, $m > n$, libovolné. Pak z poslední nerovnosti vyplývá

$$\left| \sum_{i=n}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \right| \leq \boxed{\sum_{i=n}^{m-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \varepsilon \cdot \sum_{i=n}^{m-1} |\beta_{i+1} - \beta_i|} =$$

$$\| $$

$$|\alpha_m - \alpha_n| \qquad \overset{\text{ryzí monotonie } (\beta_n)}{=} \varepsilon \cdot \left| \sum_{i=n}^{m-1} (\beta_{i+1} - \beta_i) \right| = \varepsilon \cdot |\beta_m - \beta_n|.$$

Vidíme tedy, že platí

$$\left| \frac{\alpha_m - \alpha_n}{\beta_m - \beta_n} \right| < \varepsilon. \quad \left(\begin{matrix} m, n \in \mathbb{N}, \\ m, n \geq n_0, \\ m > n \end{matrix} \right)$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je libovolné, ale pevné. Limitním přechodem $m \to +\infty$ obdržíme z nerovnosti

$$\left| \frac{\alpha_m - \alpha_n}{\beta_m - \beta_n} \right| < \varepsilon$$

nerovnost

$$\left| \frac{0 - \alpha_n}{0 - \beta_n} \right| \leq \varepsilon, \text{ tj. } \quad \left(\begin{array}{l} \text{využili jsme toho, že} \\ \alpha_m \to 0 \\ \beta_m \to 0 \end{array} \right)$$

$$\left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right| \leq \varepsilon .$$

To však znamená, že $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$.

[Nyní předpokládejme, že (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti a (b_n) je ryze monotónní. Dále nechť

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad \text{a}$$

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \; (\in \mathbb{R}). \text{]}$$

Položme $\left. \begin{array}{l} \alpha_n = a_n - L \cdot b_n \\ \beta_n = b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0, \\ (\beta_n) \text{ ryze monotónní.} \end{array}$

Dále platí

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n - L\cdot(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}-b_n)}$$

$$= \underbrace{\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}}_{L} - L\cdot \underbrace{\lim \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}-b_n}}_{L} = 0.$$

Podle pomocného tvrzení platí

$$0 = \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \frac{a_n - L\cdot b_n}{b_n} =$$

$$= \lim \frac{a_n}{b_n} - L\cdot \underbrace{\lim \frac{b_n}{b_n}}_{L}, \text{ odkud}$$

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = L.}$$

Případy $L = \pm\infty$ dokážeme stejným způsobem jako případ $L = 0$, tj. z nerovnosti

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \gtrless K$$

obdržíme nerovnost $\frac{a_n}{b_n} \gtrless K$.

CVIČENÍ

Dokázali jsme část Stolzovy věty týkající se případu $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Nyní nás ještě čeká případ $\boxed{\lim |b_n| = +\infty}$. Protože (b_n) je ryze monotónní, lze předp., že $\boxed{(b_n) \text{ je rostoucí}}$. Pak ale platí

$$\boxed{\lim b_n = +\infty.}$$

PZN: Případ (b_n) klesající bychom řešili podobně, popř. bychom místo (b_n) vzali $(-b_n)$.

Dokažme opět pomocné tvrzení: (případ $L=0$)

Nechť (α_n), (β_n) jsou posloupnosti, (β_n) je rostoucí a $\lim \beta_n = +\infty$.

Jestliže $\lim \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n} = 0$, pak

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, ale pevné. K tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\left| \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} \right| < \varepsilon, \text{ tj.}$$

$$\boxed{|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \varepsilon \cdot |\beta_{n+1} - \beta_n|.} \qquad \begin{pmatrix} n \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_0 \end{pmatrix}$$

Nechť nyní $n > n_0$ je libovolné (pevně zvolené) přirozené číslo. Pak z poslední nerovnosti dostaneme

$$\left| \sum_{i=n_0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \right| \leq \boxed{\sum_{i=n_0}^{n-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \varepsilon \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} |\beta_{i+1} - \beta_i|} =$$

$$\| \qquad\qquad (\beta_n) \text{ ryze monotónní}$$

$$|\alpha_n - \alpha_{n_0}| \qquad\qquad = \varepsilon \cdot \left| \sum_{i=n_0}^{n-1} (\beta_{i+1} - \beta_i) \right| = \varepsilon \cdot |\beta_n - \beta_{n_0}|.$$

Tedy platí:

$$\boxed{|\alpha_n - \alpha_{n_0}| < \varepsilon \cdot |\beta_n - \beta_{n_0}|.} \qquad \begin{pmatrix} n \in \mathbb{N}, \\ n > n_0 \end{pmatrix}$$

Protože $\lim \beta_n = +\infty$, lze předp., že $\beta_n > 0$.

Vydělme poslední nerovnost výrazem b_n (>0).
Obdržíme:

$$\boxed{\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| < \varepsilon\cdot\left|1-\frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right|.} \quad \begin{pmatrix} n\in\mathbb{N}, \\ n>n_0 \end{pmatrix}$$

Odtud:

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| &\leq \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| + \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| < \\ &< \varepsilon\cdot\left|1-\frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right| + \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\cdot\left(1+\left|\frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right|\right) + \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right|. \end{aligned}} \quad \begin{pmatrix} n\in\mathbb{N}, \\ n>n_0 \end{pmatrix}$$

Protože $\boxed{\lim b_n = +\infty}$, existuje k číslu ε (které již bylo pevně zvoleno) číslo $n_1\in\mathbb{N}$ takové, že pro libovolné $n\in\mathbb{N}$, $n>n_1$, platí

$$\left|\frac{\beta_{n_0}}{\beta_n}\right| < 1 \quad \text{a} \quad \left|\frac{\alpha_{n_0}}{\beta_n}\right| < \varepsilon.$$

Proto pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n > \max\{n_0, n_1\}$, platí

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| < 3\varepsilon, \text{ tj. } \boxed{\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0}.$$

Nechť nyní (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti a navíc posloupnost (b_n) je rostoucí a platí

$$\lim b_n = +\infty.$$

Předpokládejme, že

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \ (\in \mathbb{R}).$$

Definujme $\alpha_n = a_n - L \cdot b_n$ (jako v 1. části důkazu)
$\beta_n = b_n$.

Pak $\lim \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = 0 \overset{\text{POM. TVRZENÍ}}{\Longrightarrow}$

$$\Longrightarrow \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = L}.$$

9

Případy $L = \pm\infty$ lze dokázat opět podobně jako případ $L=0$.

CVIČENÍ

POZN: Předpoklad ryzí monotonie posloupnosti (b_n) nelze bez větší vynechat, jak ukazují následující příklady:

Zvolme posloupnosti (a_n) a (b_n) takto:

$$a_n: \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \ldots$$

$$b_n: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 3, \ldots$$

Všimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{a_{n^2} = b_{n^2} = n.}$$

Obecněji, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \sqrt{n},$$

10

$$b_n = [\sqrt{n}] + \frac{1+(-1)^{n-[\sqrt{n}]^2+1}}{2}.$$

Není těžké se přesvědčit, že

$$\left.\begin{aligned}\Delta a_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 0,\\ \Delta b_n &\in \{-1,1\}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = 0.}$$

Zřejmě platí $\boxed{\lim b_n = +\infty.}$

Pro posloupnost (b_n) jistě platí

$$\sqrt{n}-1 \leq b_n \leq \sqrt{n}+1 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = 1.} \quad \left(\neq \lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}\right)$$

$\boxed{\text{JINÝ PŘÍKLAD:}}$

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Jistě $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, ale posloupnost (b_n) není ryze monotónní.

Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\Delta a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)},$$

$$\Delta b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right] =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

<u>Odtud máme:</u>

$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \to 0.$$

Na druhé straně $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$, a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n}$ neexistuje.

POZN:

V případě neexistence limity $\boxed{\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}}$ nelze nic usuzovat o (ne)existenci $\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n}}$.

Př: $a_n = (-1)^n, \; b_n = n.$

Jistě $b_n \to +\infty$ a (b_n) je ryze monotónní.

Dále $\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{1} \Rightarrow \boxed{\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \text{ neex.}}$

Na druhé straně $\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = 0.}$

Př: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \; b_n = \frac{1}{n}.$

Jistě $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ a (b_n) je ryze monot.

Dále
$$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{2n^2+2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = (-1)^n \cdot \frac{2n^2+2n+1}{n^2+n}.$$

$\Rightarrow \lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$ neexistuje, ale $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0.$

PŘÍKLADY:

Př: Pro libovolný parametr $p > -1$ vypočtěte limitu

$$\boxed{\lim \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}}.$$

Řešení: Protože $p > -1$, je $\lim n^{p+1} = +\infty$ a posloupnost $\left(n^{p+1}\right)$ je rostoucí. Lze tedy použít Stolzovu větu.

Proto platí:

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$

(za předpokladu, že limita napravo existuje).

Pokusme se tedy limitu napravo spočítat.

Kdyby bylo $p \in \mathbb{N}$, mohli bychom použít binomickou větu. Pak bychom dostali

$$\lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim \frac{n^p + \ldots\ldots + 1}{\cancel{n^{p+1}} + \binom{p+1}{1} n^p + \ldots + 1 - \cancel{n^{p+1}}} = \frac{1}{p+1}.$$

Nyní ukážeme, že stejný výsledek dostaneme i pro obecné $p > -1$.

Výraz $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$ ze jmenovatele odhadneme pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

Jestliže si vezmeme funkci $f(x) = x^{p+1}$ na intervalu $\langle n, n+1 \rangle$, dostaneme

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (p+1) \cdot \xi^p, \text{ kde } n < \xi < n+1.$$

Proto platí

$$(p+1) \cdot n^p \leq (n+1)^{p+1} - n^{p+1} \leq (p+1) \cdot (n+1)^p.$$

Z toho vyplývá, že

$$\underbrace{\frac{(n+1)^p}{(p+1)\cdot(n+1)^p}}_{\frac{1}{p+1}} \leq \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} \leq \underbrace{\frac{(n+1)^p}{(p+1)\cdot n^p}}_{\frac{1}{p+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \to}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{p+1}$$

$$\Longrightarrow \lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{1^p+2^p+\ldots\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.}$$

CVIČENÍ: (pokračování předchozího příkladu)

Dokažte, že pro každé $p>-1$ platí

$$\lim\left[n\cdot\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}-\frac{1}{p+1}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

DŮSLEDKY STOLZOVY VĚTY:

Nechť (a_n) je posloupnost a nechť existuje

$$\lim a_n = L \ (\in \mathbb{R}^*).$$

Pak
$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L.$$

(limita pol. aritmetických průměrů)

Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel a nechť existuje

$$\lim a_n = L \ (\in \mathbb{R}^*).$$

Pak
$$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = L.$$

(limita pol. geometrických průměrů)

17

Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel a nechť existuje
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \ (\in \mathbb{R}^*).$$
Pak
$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Př: Vypočtěte $\boxed{\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}$.

Řešení: Použijeme poslední důsledek. Položme
$$a_n = \frac{n^n}{n!} \text{ a vypočteme}$$
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} =$$
$$= \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$$
$$= \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Odtud plyne, že

$$\boxed{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e.}$$