PROČ JSOU POLYNOMY HUSTÉ ?

Nový nadpis 10.11.2010

OZNAČENÍ.

$C(\langle a,b\rangle)$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ .... prostor všech funkcí $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ spojitých na $\langle a,b\rangle$ s normou

$$\|f\| = \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)|.$$

$P(\langle a,b\rangle)\subseteq C(\langle a,b\rangle)$ .... podprostor všech polynomů (není uzavřený).

$\mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ ..... množina všech lineárních operátorů $L: C(\langle a,b\rangle)\to C(\langle a,b\rangle)$ (ne nutně spojitých).

[Operátor $L\in\mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ nazveme neklesající, pokud pro libovolné $f,g\in C(\langle a,b\rangle)$ splňující $f(x)\le g(x)$ pro $\forall x\in\langle a,b\rangle$ platí $L(f)(x)\le L(g)(x)$ $(\forall x\in\langle a,b\rangle)$.]

PROBLÉM.

? Lze každou funkci $f\in C(\langle a,b\rangle)$ aproximovat s libovolnou předem danou přesností nějakým polynomem ?

ANO – tvrzení platí.

Přesněji, platí tzv. Weierstrassova věta o aproximaci.

VĚTA (Weierstrass, 1885).
Pro libovolnou funkci $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje polynom $p \in P(\langle a,b\rangle)$ takový, že
$$\|p - f\| < \varepsilon.$$

DŮSLEDEK.
Ke každé spojité funkci $f \in C(\langle a,b\rangle)$ existuje posloupnost polynomů (p_n) taková, že
$$p_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ na } \langle a,b\rangle \quad (\|p_n - f\| \to 0).$$

To tedy znamená, že množina $P(\langle a,b\rangle)$ všech polynomů je hustá v $C(\langle a,b\rangle)$.

Ukážeme, že Weierstrassova věta je důsledkem tzv. Korovkinovy věty.

VĚTA (Korovkin, 1953) – tzv. věta o třech funkcích.

Pavel Petrovich Korovkin (1913 – 1985)

Nechť (L_n) je posloupnost neklesajících operátorů z $\mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$.
Uvažujme tři funkce
$$\left.\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x^2 \end{aligned}\right\} x \in \langle a,b\rangle.$$

Předpokládejme, že $L_n(f_i)(x) \rightrightarrows f_i(x)$ na $\langle a,b\rangle$.
$(i \in \{0,1,2\})$

Pak platí $L_n(f)(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\langle a,b\rangle$ dokonce pro $\forall f \in C(\langle a,b\rangle)$.

Nejprve dokažme pomocné tvrzení.

LEMMA.
Nechť $g \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $\alpha > 0$ existuje $K>0$ ($K = K(\alpha)$) takové, že platí

$$|g(x)-g(t)| \leq \alpha + K\cdot(x-t)^2 \text{ pro } \forall x,t \in \langle a,b\rangle.$$

DŮKAZ.

Nechť $\alpha > 0$ je libovolně zvolené číslo.
Definujme množinu

$$U = \{(x,t)\in\langle a,b\rangle\times\langle a,b\rangle : |g(x)-g(t)| \geq \alpha\}.$$

Ze spojitosti funkce $h(x,t) = |g(x)-g(t)|$ na $\langle a,b\rangle\times\langle a,b\rangle$ plyne, že $U \subseteq \langle a,b\rangle\times\langle a,b\rangle$ je uzavřená, a tedy kompaktní (neboť U je omezená).

Je-li $U=\emptyset$, je tvrzení triviální (možno volit $K>0$ libovolně).
Předpokládejme tedy, že $U\neq\emptyset$.

Položme

$$M = \max_{(x,t)\in U} |g(x)-g(t)|, \quad m = \min_{(x,t)\in U} (x-t)^2.$$

Není obtížné si uvědomit, že $M>0$, $m>0$.

Položme $K = \frac{M}{m} \implies M = K\cdot m$. Pak

pro každé $(x,t)\in U$ platí

$$\boxed{|g(x)-g(t)| \leq M = K\cdot m \leq K\cdot(x-t)^2 < \alpha + K\cdot(x-t)^2.}$$

Pro $(x,t) \in (\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle) \setminus U$ máme

$$\boxed{|g(x)-g(t)| < \alpha \leq \alpha + K\cdot(x-t)^2.}$$

$\square$

DŮKAZ Korovkinovy věty.

Nejprve si všimněme, že pro neklesající operátor $L \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ platí

$$\boxed{\underset{(\text{pro } \forall x \in \langle a,b\rangle)}{|f(x)| \leq g(x)} \implies \underset{(\forall x \in \langle a,b\rangle)}{|L(f)(x)| \leq L(g)(x).}}$$

Skutečně,

$$|f(x)| \leq g(x) \implies -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \implies$$

$$\implies -L(g)(x) \leq L(f)(x) \leq L(g)(x) \implies$$

$$\implies |L(f)(x)| \leq L(g)(x).$$

Nechť jsou tedy splněny předpoklady Korovkinovy věty a nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$ je libovolná. (lze předp. $f \neq 0$)
Dále zvolme $\varepsilon > 0$. (jinak by $L_n(f) \equiv f$)
Podle lemmatu existuje k číslu $\alpha = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ číslo $K > 0$ splňující

$$|f(x)-f(t)| \leq \alpha + K\cdot(x-t)^2 \quad (\text{pro } \forall x,t \in \langle a,b\rangle). \quad (*)$$

V nerovnosti $\circledast$ nyní zafixujme t a chápejme ji jako nerovnost mezi funkcemi proměnné x. Navíc výraz $(x-t)^2$ rozepišme

$$(x-t)^2 = x^2 - 2xt + t^2 = f_2(x) - 2t\cdot f_1(x) + t^2\cdot f_0(x).$$

Na $\circledast$ nyní aplikujme operátor L_n.

Pak (vzhledem k předchozímu) platí

$$\boxed{\begin{aligned}|L_n(f)(x) - f(t)\cdot L_n(f_0)(x)| &\leq \alpha\cdot L_n(f_0)(x) + \\ &+ K\cdot\Big(L_n(f_2)(x) - 2t\cdot L_n(f_1)(x) + t^2\cdot L_n(f_0)(x)\Big).\end{aligned}}$$

Poslední nerovnost platí pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$, a tedy i pro $x = t$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}|L_n(f)(t) - f(t)\cdot L_n(f_0)(t)| &\leq \alpha\cdot L_n(f_0)(t) + \\ &+ K\cdot\Big(L_n(f_2)(t) - 2t\cdot L_n(f_1)(t) + t^2\cdot L_n(f_0)(t)\Big).\end{aligned}} \quad \circledast$$

$t \in \langle a,b\rangle$ bylo sice fixní, ale bylo libovolné. Proto poslední nerovnost platí pro libovolné $t \in \langle a,b\rangle$.

Dále platí (pro $\forall t \in \langle a,b\rangle$) (trojúh. nerovnost)

$$\boxed{\begin{aligned}|L_n(f)(t) - f(t)| &\leq |L_n(f)(t) - f(t)\cdot L_n(f_0)(t)| + \\ &+ |f(t)|\cdot|L_n(f_0)(t) - 1|.\end{aligned}} \quad \circledast\circledast$$

$f_0(t)$

Víme, že $L_n(f_0)(t) \rightrightarrows f_0(t)$, $L_n(f_1)(t) \rightrightarrows f_1(t)$,

$$L_n(f_2)(t) \rightrightarrows f_2(t) \text{ na } \langle a,b\rangle \implies$$

$$\implies \Big[L_n(f_2)(t) - 2t \cdot L_n(f_1)(t) + t^2 L_n(f_0)(t)\Big] \rightrightarrows$$

omezené

(na $\langle a,b\rangle$)

$$\rightrightarrows f_2(t) - 2t \cdot f_1(t) + t^2 \cdot f_0(t) = t^2 - 2t \cdot t + t^2 = 0.$$

Odtud snadno najdeme existenci čísla $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro $\forall t \in \langle a,b\rangle$ platí:

$$L_n(f_0)(t) \leq 2, \quad \left|L_n(f_0)(t) - 1\right| \leq \frac{\alpha}{\|f\|},$$

$$L_n(f_2)(t) - 2t \cdot L_n(f_1)(t) + t^2 \cdot L_n(f_0)(t) \leq \frac{\alpha}{K}.$$

Kombinací s $*$ a $**$ dostáváme, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a pro $\forall t \in \langle a,b\rangle$ platí

$$\left|L_n(f)(t) - f(t)\right| \leq \alpha \cdot 2 + K \cdot \frac{\alpha}{K} + \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|} \cdot \frac{\alpha}{\|f\|} \leq$$

$$\leq 4\alpha = \varepsilon, \text{ což znamená, že}$$

$$\boxed{L_n(f)(t) \rightrightarrows f(t) \text{ na } \langle a,b\rangle.}$$

$\square$

DŮKAZ Weierstrassovy věty o aproximaci.

Nejprve předpokládejme, že $f \in C(\langle 0,1\rangle)$.
Definujme posloupnost (B_n) operátorů z $\mathcal{L}(\langle 0,1\rangle)$:

$$B_n(f)(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-k}}_{\text{Bernsteinovy polynomy}} \qquad \left(x \in \langle 0,1\rangle\right).$$

Každý z operátorů je opravdu lineární a neklesající.

Ukážeme, že $\underbrace{B_n(f)(x)}_{\text{posloupnost polynomů}} \rightrightarrows f(x)$ na $\langle 0,1\rangle$.

Podle Korovkinovy věty stačí ukázat, že

$$\left.\begin{array}{l} B_n(f_0)(x) \rightrightarrows f_0(x) \\ B_n(f_1)(x) \rightrightarrows f_1(x) \\ B_n(f_2)(x) \rightrightarrows f_2(x) \end{array}\right\} \text{ na } \langle 0,1\rangle. \quad \left(\begin{array}{l} f_0(x) = 1 \\ f_1(x) = x \\ f_2(x) = x^2 \end{array}\right)$$

Přímým výpočtem ověříme, že

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_0\left(\frac{k}{n}\right)}_{1}\cdot\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-k} =$$

$$\overset{\text{binom. věta}}{=} \left[x + (1-x)\right]^n = 1^n = 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{pro } \forall x \in \langle 0,1\rangle \\ \forall n \in \mathbb{N}\end{array}\right).$$

$$\Longrightarrow B_n(f_0)(x) \rightrightarrows 1 = f_0(x) \quad (\text{na } \langle 0,1\rangle).$$

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_1\left(\frac{k}{n}\right)}_{\frac{k}{n}} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot x \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k} =$$

$$= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!}}_{\binom{n-1}{k}} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-1-k} =$$

binom. věta

$$= x \cdot \left[x + (1-x)\right]^{n-1} = x \cdot 1^{n-1} = x = f_1(x)$$

$$\left(\begin{matrix}\forall x \in \langle 0,1\rangle \\ \forall n \in \mathbb{N}\end{matrix}\right)$$

$$\Longrightarrow B_n(f_1)(x) \rightrightarrows f_1(x) \quad (\text{na } \langle 0,1\rangle).$$

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f_2\left(\frac{k}{n}\right)}_{\frac{k^2}{n^2} = \frac{k}{n^2} + \frac{k\cdot(k-1)}{n^2}} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}.$$

Přitom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\cdot\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-k} = \frac{x}{n} \quad \left(\text{viz } B_n(f_1)(x)\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\cdot(k-1)}{n^2}\cdot\binom{n}{k}\, x^k\cdot(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k\cdot(k-1)}{n^2}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-2)!}{(k-2)!\cdot(n-k)!}\cdot x^2\cdot x^{k-2}\cdot(1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot x^2\cdot\sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{\frac{(n-2)!}{k!\cdot(n-2-k)!}}_{\binom{n-2}{k}}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-2-k} =$$

$$\overset{\text{binom. věta}}{=} \frac{n-1}{n}\cdot x^2\cdot\Big[\underbrace{x+(1-x)}_{1}\Big]^{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot x^2$$

$$\Rightarrow\quad B_n(f_2)(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}\cdot x^2 = \qquad \left(\begin{array}{l}\forall x\in\langle 0,1\rangle,\\ \forall n\in\mathbb{N}\end{array}\right)$$

$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad B_n(f_2)(x) \rightrightarrows x^2 = f_2(x) \quad (\text{na } \langle 0,1\rangle).$$

Jestliže $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak vše převedeme na interval $\langle 0,1\rangle$ tak, že uvažujeme funkci

$$g \in C(\langle 0,1\rangle), \quad g(x) = f(a+(b-a)x) \quad (x \in \langle 0,1\rangle).$$

Podle předchozího existuje k této funkci posloupnost (q_n) polynomů taková, že

$$q_n(x) \rightrightarrows g(x) \text{ na } \langle 0,1\rangle.$$

Pak ale není těžké ověřit, že

$$\underbrace{p_n(x)}_{\text{posloupnost polynomů}} = q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \rightrightarrows g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$$

na $\langle a,b\rangle$.

□

DŮSLEDEK.

Prostor $C(\langle a,b\rangle)$ (se suprémovou normou) je **separabilní** (v $C(\langle a,b\rangle)$ existuje spočetná hustá podmnožina).

DŮKAZ.

Uvažujme množinu všech polynomů s racionálními koeficienty. Není těžké si promyslet, že se jedná o spočetnou množinu. Abychom dokázali hustotu, stačí k libovolné funkci $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a libovolnému $\varepsilon > 0$ najít polynom q s racionálními koeficienty takový, že

$$\boxed{\|f-q\| < \varepsilon.}$$

Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a $\varepsilon>0$ je dáno. Podle předchozího existuje polynom p (s reál. koef.) takový, že

$$\boxed{\|f-p\| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

Můžeme psát $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Položme

$$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2\cdot(n+1)\cdot(\max\{|a|,|b|,1\})^n} > 0.}$$

Jistě existují čísla $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ splňující $|a_i - b_i| < \delta$ pro $\forall i \in \{0,1,\dots,n\}$ (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$) a označme $q(x) = b_n x^n + \dots + b_0$.

Nyní je jednoduchým cvičením dokázat, že

$$\boxed{\|p-q\| < \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \boxed{\|f-q\| < \varepsilon.}$$

$\square$

CVIČENÍ. Zkuste separabilitu $C(\langle a,b\rangle)$ dokázat přímo.

?

OTÁZKA.

Proč jsme při důkazu používali Bernsteinovy polynomy a ne např. dobře známé Lagrangeovy interpolační polynomy.

Definovali bychom posloupnost operátorů tak, aby

$\boxed{L_n(f)(x)}$ byl Lagrangeův interpolační polynom funkce f na $\langle a,b\rangle$ s ekvidistant. uzly $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Daleko snadněji bychom prokázali, že

$$L_n(f_i)(x) \rightrightarrows f_i(x) \text{ na } \langle a,b\rangle \quad \begin{pmatrix} i \in \{0,1,2\} \\ f_i(x) = x^i \end{pmatrix}.$$

Snadno si totiž lze uvědomit, že platí

$$\left[\begin{array}{lll} L_n(f_0) \equiv f_0 & & (\text{pro } \forall n \in \mathbb{N}), \\ L_n(f_1) \equiv f_1 & & (\text{pro } \forall n \in \mathbb{N}), \\ L_n(f_2) \equiv f_2 & & (\text{pro } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2). \end{array}\right]$$

Korovkinova věta by pak dávala

$$L_n(f)(x) \rightrightarrows f(x) \text{ na } \langle a,b\rangle.$$

Z konkrétních příkladů (třeba $f(x) = |x|$ na intervalu $\langle -1,1\rangle$) ale vidíme, že tomu tak NENÍ! (viz animace) a vztah

$$L_n(f)(x) \rightrightarrows f(x) \text{ neplatí.}$$

CVIČENÍ.

Zamyslete se, kde jsme v úvaze o Lagrangeových interpolačních polynomech udělali chybu.