O RŮZNÝCH TYPECH SPOJITOSTÍ

Nový nadpis 25.10.2010

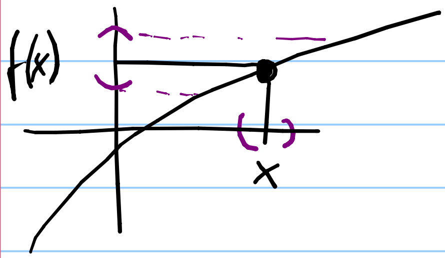
DEF. f je spojité v $x \in \mathbb{R}$ $\equiv$ $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$

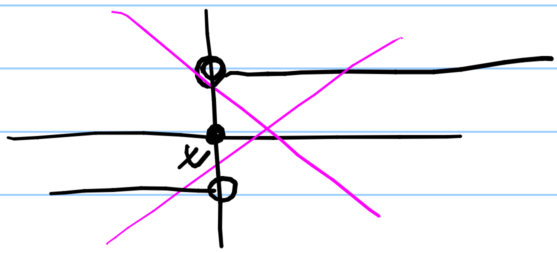
$$\Updownarrow$$

$$\forall (y_n) \subset \mathbb{R} : \left[y_n \to x \Rightarrow f(y_n) \to f(x) \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} : \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$





(f spoj. zprava v x $\equiv$ $\lim_{y \to x+} f(y) = f(x)$,

f spoj. zleva v x $\equiv$ $\lim_{y \to x-} f(y) = f(x)$)

PŘ.
$$f(x) \overset{\text{df.}}{=} \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ kde } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

(Riemannova funkce) m, n ... nesoudělná

Platí: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: f je spoj. v x

$\forall x \in \mathbb{Q}$: f není spoj. v x

$$\left(\Rightarrow \forall a,b\in\mathbb{R}: \ (R)\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}\right)$$

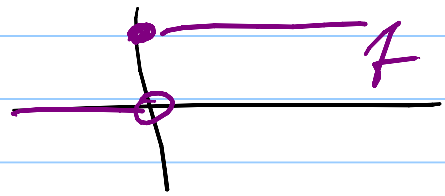
DEF. Buď $I\subset\mathbb{R}$ interval.

- f je spoj. v I $\equiv \left[\forall x\in I\ \forall (y_n)\subset I:\ y_n\to x \Rightarrow f(y_n)\to f(x)\right]$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x\in I\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall y\in I:\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon}$$

PŘ. $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$



f je spoj. v $\langle 0,\infty)$,
f je spoj. v $(-\infty,0)$
f není spoj. v $(-\infty,0\rangle$

VĚTA. f monotónní na (a,b) $\Rightarrow$ $\forall x\in(a,b):\ \lim_{y\to x+} f(y)\in\mathbb{R}$, $\lim_{y\to x-} f(y)\in\mathbb{R}$

(Důsledek. Množina bodů nespojitosti je nejvýše spočetná)

Dk. – cvičení

VĚTA. Je-li f konvexní na (a,b), je f spojitá na (a,b).

KDE JE DOBRÁ SPOJITOST:

- Weierstrassova věta
- Darbouxova vlastnost
- (Riemannovská) integrovatelnost

...

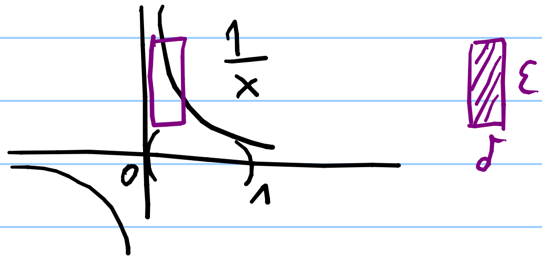
DEF.

- f je stejnoměrně spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\in I:\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon}$$

PŘ. $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{x}$



f je spojitá v $(0,1)$

f není stejnoměrně spojitá v $(0,1)$

PLATÍ: f stejnoměrně spojitá v $I \Rightarrow f$ spoj. v I

VĚTA. f spoj. v $\langle a,b\rangle$ $\Longrightarrow$ f stejn. spoj. v $\langle a,b\rangle$
$(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$

DK. Předpokládejme sporem, že

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,y\in\langle a,b\rangle: |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$(*)\quad \exists \varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n,y_n\in\langle a,b\rangle: |x_n-y_n|<\frac{1}{n} \wedge |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$$

Pod. $(x_n)\subset\langle a,b\rangle \Longrightarrow \left[\exists x\in\langle a,b\rangle : x_{n_k}\to x\right]$ $(**)$

$$|y_{n_k}-x|\leq \underbrace{|y_{n_k}-x_{n_k}|}_{\leq \frac{1}{n_k}\to 0}+\underbrace{|x_{n_k}-x|}_{\to 0}\to 0$$

Takže i $y_{n_k}\to x$ $(***)$

Ze vztahů $(*)$, $(**)$, $(***)$ a spoj. f v I plyne:

$$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{|f(x)-f(x)|}_{=0}$$, a to je spor.

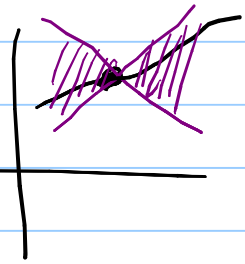
EPA

$$\left(\Leftarrow \left[f \text{ spoj. v } \langle a,b\rangle \Rightarrow (R)\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R} \right]\right)$$

VĚTA. Buď $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.
Pak f je stejnoměrně spojitá v (a,b) právě tehdy, existuje-li spojité rozšíření f na $\langle a,b\rangle$

Dk. – cvičení

DEF. f je lipschitzovsky spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$



$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\exists L>0\ \forall x,y\in I:\ |f(x)-f(y)| \leq L\cdot|x-y|}$$

VĚTA $\exists M>0\ \forall x\in I:\ |f'(x)| \leq M$

$$\Downarrow$$

f je lipsch. spoj. v I $\quad (L=M)$

Dk. $\forall x,y\in I$:

$$|f(x)-f(y)| \underset{\text{Lagrange}}{=} |f'(\xi)\cdot(x-y)| \leq M\cdot|x-y|$$

cbd.

$\left(f \text{ lipsch. spoj. v } I \Rightarrow f' \text{ exist. s.v. v } I \quad (|f'|\leq L)\right)$

DEF. f je absolutně spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}:$

$$\left[I \ni a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_n < b_n \in I \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \quad \Downarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \right]$$

VĚTA f je a.o. na intervalu I

$$\Downarrow$$

f je stejnoměrně spojitá na I

Dk. zřejmý (volme $n=1$)

VĚTA f je lipschitzovsky spojitá na I

$$\Downarrow$$

f je a.o. na intervalu I

Dk. Stačí si uvědomit, že

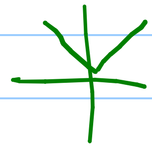
$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \le \sum_{k=1}^{n} L \cdot |b_k - a_k| < L \cdot \delta$$

a pro dané $\varepsilon > 0$ volíš $\delta \leq \frac{\varepsilon}{L}$ ...

cbd.

VÍME: f má omezenou derivaci v I

$$\Downarrow \qquad \cancel{\Uparrow} \qquad f(x) \overset{\text{def.}}{=} |x|, \quad I = (-1,1)$$



f je lipschitz. spoj. v I

$$\Downarrow \qquad \cancel{\Uparrow} \qquad f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x}, \quad I = (0,1)$$

f je a.s. v I

$$\Downarrow \qquad \cancel{\Uparrow}$$

f ... Cantorova schodovitá funkce, $I = \langle 0,1 \rangle$

f je stejnoměrně spoj. v I

$I = \langle a,b \rangle$ $\Uparrow$

$$\Downarrow \qquad \cancel{\Uparrow} \qquad f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = (0,1)$$

f je spojitá v I

VĚTA. Funkce f je a.s. na $\langle a,b\rangle$ právě tehdy, existuje-li funkce $g \in \mathcal{L}^1(a,b)$ taková, že

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt .$$

Dodatek. Navíc pak platí: $f'(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in (a,b)$

$$\left(f \text{ a.s. na } \langle a,b\rangle \;\text{---}\; f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \right)$$

← Lebesgueův integrál

VĚTA

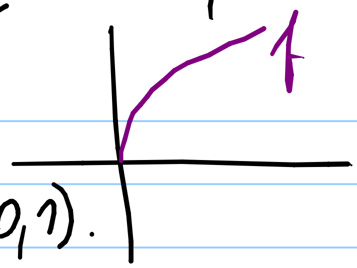
$$W^{1,2}(a,b) = H^1(a,b) =$$

$$= \{ f \in AC(\langle a,b\rangle) : f' \in L^2(a,b) \}$$

↑ množina všech a.s. funkcí na $\langle a,b\rangle$

PŘ. Funkce $f(x) \overset{def.}{=} \sqrt{x}$ je na intervalu $(0,1)$ absolutně spojitá, ale ne lipschitzovsky spojitá.

Dk. f má na $(0,1)$ neomezenou derivaci, proto není lipschitz. spojitá



Ukažme, proč je f a.s. na $(0,1)$.

Buď $\varepsilon > 0$ dáno.

Zvolme $\delta^* > 0$ takové, aby $\boxed{\sqrt{\delta^*} < \frac{\varepsilon}{2}}$. $(*)$

f má na $\langle \delta^*, 1\rangle$ omezenou derivaci,

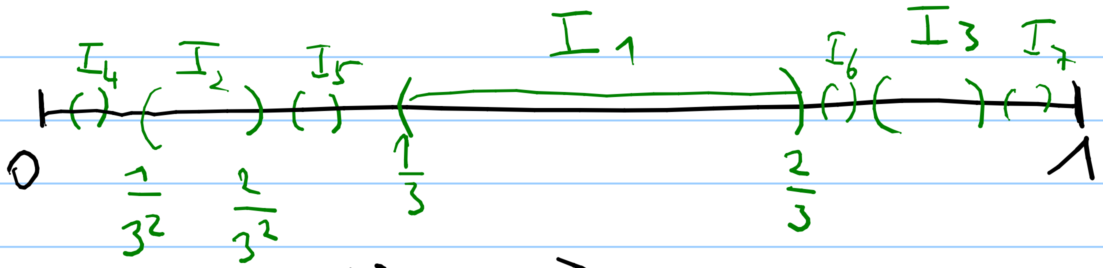
je tedy na $\langle \delta^*, 1\rangle$ lipsch., a proto i a.s.

Odtud plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\boxed{\begin{gathered} \delta^* \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le 1 \\ \sum (b_k - a_k) < \delta \\ \Downarrow \\ \sum |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{gathered}} \quad (**)$$

... k dokončení stačí zkombinovat $(*)$ a $(**)$

Př. – Cantorovo diskontinuum a Cantorova stupňovitá funkce.



Cantorovo diskontinuum D

$$\boxed{D = \langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}$$

... nespočetná

... řídká

... uzavřená

... $\lambda(D) = 0$

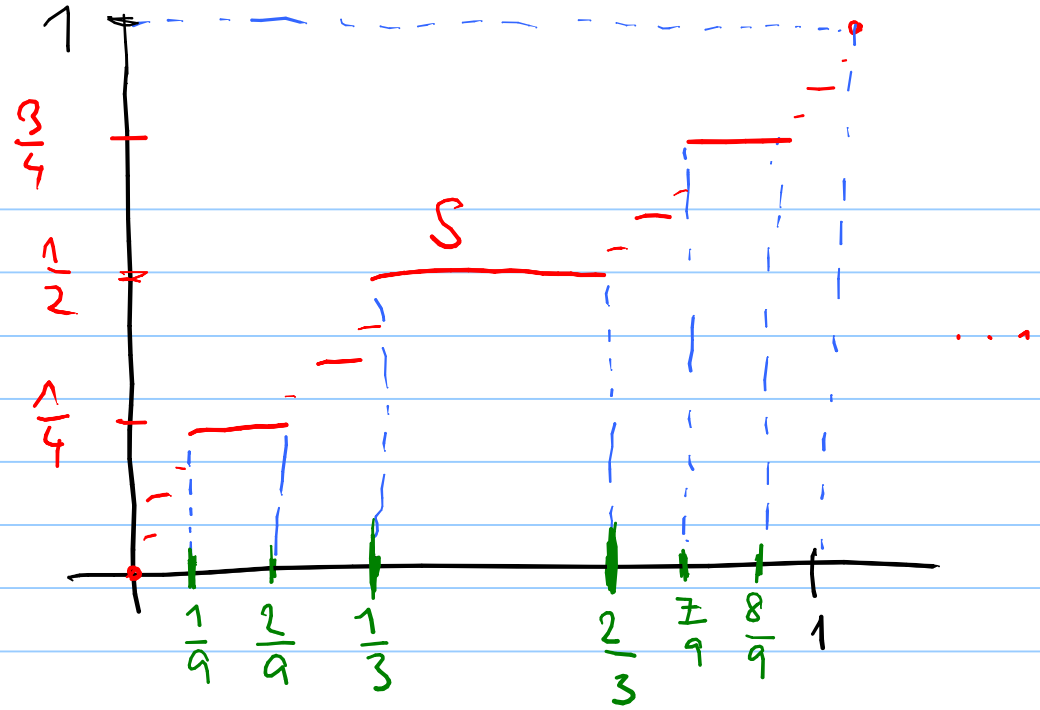
$$x \in D$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}, \quad i_n = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$
$$\| $$
$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n}, \quad j_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Cantorova stupňovitá funkce S

$$\boxed{x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} \in D} \quad \ldots \quad \boxed{S(x) \overset{def.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{2^n}}$$

$$x = 2 \cdot \underbrace{0{,}j_1 j_2 \ldots}_{\text{triadicky}} \qquad S(x) = \underbrace{0{,}j_1 j_2 \ldots}_{\text{dyadicky}}$$

> dodefinujeme S na $\langle 0,1\rangle \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ tak, aby S byla konstantní na každém I_n



$$S : \langle 0,1\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,1\rangle$$

... spojitá (a proto i stejnoměrně spojitá!!) na $\langle 0,1\rangle$

... neklesající na $\langle 0,1\rangle$

... $S'(x) = 0$ s.v. v $(0,1)$

$$\Downarrow$$

$$S(x) \neq S(0) + \int_0^x S'(t)\,dt = 0, \text{ a proto}$$

S není a.s. (a tedy ani lipschitzovská) na $\langle 0,1\rangle$.