NEMRAVNOSTI O LVECH (CHVALME NEROVNOSTI)

JIRKA BOUCMALA

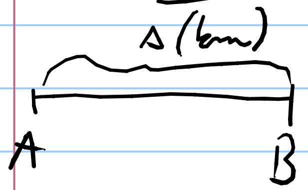
Nový nadpis 3.5.2011

PŘ. 1. Určete průměrnou rychlost auta, které jelo první hodinu rychlostí 40 km/h a druhou hodinu rychlostí 60 km/h

$$v = \frac{s}{t} = \frac{40+60}{2} = 50 \quad (km/h)$$

$a, b \in \mathbb{R}$: $\frac{a+b}{2}$ ... aritmetický průměr

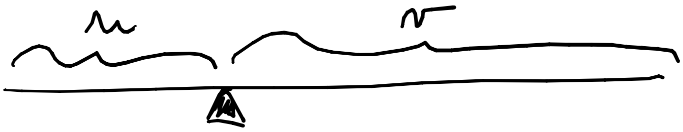
PŘ. 2. Určete průměrnou rychlost auta, které jelo z místa A do místa B rychlostí 40 km/h a zpět z B do A rychlostí 60 km/h.



$$v = \frac{2\cancel{s}}{\frac{\cancel{s}}{40} + \frac{\cancel{s}}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}} = 48 \quad (km/h)$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ... harmonický průměr

PŘ. 3. Vážíme maso na nerovnoramenné váze. Dám-li ho na levou misku, vyvážím ho 4 kg, dám-li ho napravo, vyvážím ho 9 kg. Jaká je skutečná masa?



$m = ?$

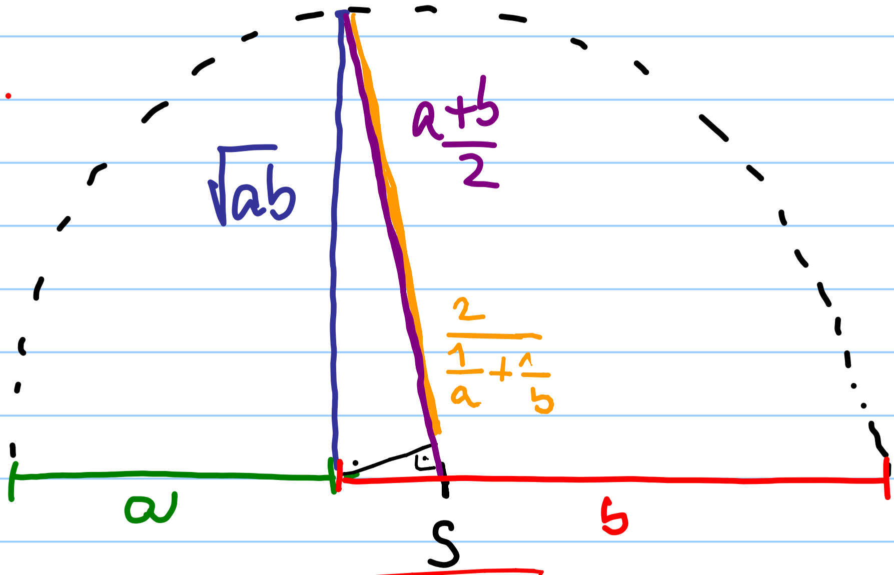
$$\left.\begin{aligned} m \cdot u &= 4 \cdot v \\ m \cdot v &= 9 \cdot u \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^2 \cancel{u}\,\cancel{v} = 4 \cdot 9 \cdot \cancel{u}\cdot\cancel{v}$$

$$\Downarrow$$

$$m = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ (kg)}$$

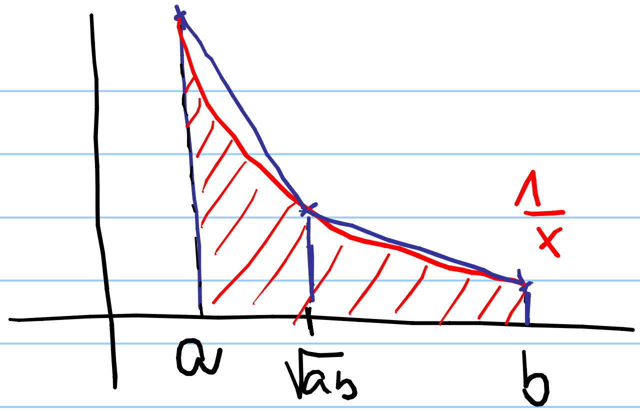
$a, b \in \mathbb{R}$
$a, b \geq 0$: $\sqrt{a \cdot b}$ ... geometrický průměr

Pozorování 1.



$$\boxed{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}}$$

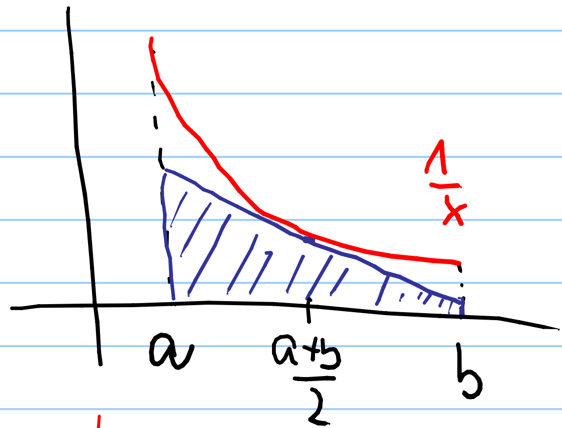
Pozorování 2.



$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a < \frac{1}{2}\frac{b-a}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{2}\frac{b-a}{\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}}$$



$$(b-a)\frac{1}{\frac{a+b}{2}} < \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}}$$

Způsob jsme:

$$\boxed{\forall a,b>0,\ a\neq b: \quad \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}}$$

VĚTA $\forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n},$$

harmonický průměr — geometrický průměr — aritmetický průměr

přičemž (v každé z nerovností) rovnost nastane právě tehdy, když

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Důkaz. Stačí dokázat nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (protože z ní pak už snadno plyne:

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_n}},$$

a tedy

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}\Bigg).$$

Ukažme si důkaz A. L. Cauchyho z r. 1820 založený na „zpětné" indukci.

(1) Tvrzení zřejmě platí pro $n=2$, tzn.

$$\boxed{\forall\, x_1, x_2 > 0 : \quad \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}, \text{ přičemž rovnost nastane právě tehdy, je-li } x_1 = x_2 .}$$

$$\left(\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2} \iff 0 \leq (x_1 - x_2)^2 , \ldots \right)$$

(2) Platí-li tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, platí i pro $2n$, tzn.

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n > 0 : \quad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, y_1, \ldots, y_{2n} > 0 : \quad \sqrt[2n]{y_1 \cdots y_{2n}} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_{2n}}{2n}$$

Dk.

$$\sqrt[2n]{y_1 \cdots y_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n}\ \sqrt[n]{y_{n+1} \cdots y_{2n}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \cdot \frac{y_{n+1} + \ldots + y_{2n}}{n}} \leq \frac{\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} + \frac{y_{n+1} + \ldots + y_{2n}}{n}}{2}$$

$$\leq \frac{y_1 + \ldots + y_{2n}}{2n}$$

cbd.

(Pozn. vě máme dokázáno, že tvrzení platí pro každé $n \in \{2,4,8,16,32,\dots\}$.)

③ Platí-li tvrzení pro $n+1$, platí i pro n, tzn.

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x_1,\dots,x_{n+1}>0:\ \sqrt[n+1]{x_1\cdots x_{n+1}} \le \frac{x_1+\dots+x_{n+1}}{n+1}\\ \Downarrow \\ \forall y_1,\dots,y_n>0:\ \sqrt[n]{y_1\cdots y_n} \le \frac{y_1+\dots+y_n}{n}\end{gathered}}$$

Dk. Buď $y_1,\dots,y_n>0$ dáno. Volme

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \dots,\ x_n=y_n,\ x_{n+1}=\frac{y_1+\dots+y_n}{n}.$$

Pak

$$\sqrt[n+1]{x_1\cdots x_{n+1}} \le \frac{y_1+\dots+y_n+\frac{y_1+\dots+y_n}{n}}{n+1} = \frac{y_1+\dots+y_n}{n}$$

$$\|$$

$$\sqrt[n+1]{y_1\cdots y_n\cdot\frac{y_1+\dots+y_n}{n}}.\quad \text{Odtud}$$

$$y_1\cdots y_n\cdot\cancel{\frac{y_1+\dots+y_n}{n}} \le \left(\frac{y_1+\dots+y_n}{n}\right)^{n+\cancel{1}}$$

a proto $\sqrt[n]{y_1\cdots y_n} \le \frac{y_1+\dots+y_n}{n}$. Cbd.

Cbd.

Př. 4 Dokažme pomocí A-G nerovnosti, že posloupnost

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ je rostoucí}$$

a že posloupnost

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ je klesající.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \overset{AG}{<} \left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

$$\frac{1}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 \overset{AG}{<} \left(\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{b_{n+1}}$$

Pozorování. Z výše dokázaných monotonií plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$2 = a_1 \leq a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \leq b_1 = 4,$$

a proto

$$2 \leq \lim a_n \leq \lim b_n \leq 4.$$

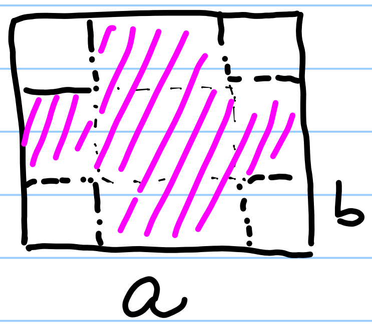
Navíc: $\lim a_n = \lim \Big[\underbrace{a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{b_n}\Big] = \lim b_n$

Shrnutí – pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le 4$$

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ldots$$

Př. 5. Z kartónu tvaru čtverce o straně a (cm) chceme vystřihnout čtyři čtverce o straně b (cm) umístěné v rozích



tak, aby krabice (bez víka) složená ze zbytku kartónu měla maximální objem. Jak velké b máme zvolit?

Máme vlastně zjistit, pro jaké $b \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ je $V(b) = (a-2b)^2 \cdot b$ největší.

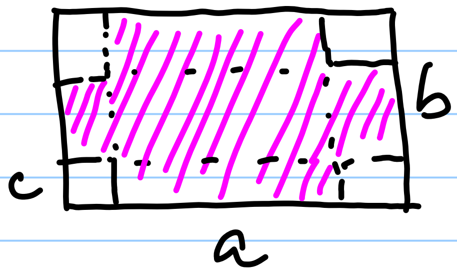
Pro každé $b \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ platí:

$$V(b) = \frac{1}{4} \cdot (a-2b)^2 \cdot (4b) \underset{AG}{\le} \frac{1}{4}\left(\frac{a-2b+a-2b+4b}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^3,$$

přičemž rovnost nastane při $a-2b = 4b$, tj. $b = \frac{a}{6}$

Závěr: složená krabice bude mít největší objem (a to $\frac{2}{27}a^3$ (cm^3)), odstřihneme-li čtverečky o straně $b = \frac{a}{6}$ (cm).

Domácí cvičení: Zjistěte (pomocí AG nerovnosti), jak velké čtverečky (o straně c) musíte vystřihnout z kartónu tvaru obdélníku o stranách a, b, aby krabice složená ze zbylého kartónu měla maximální objem.



Pro jednoduchost volte $a = 15$
$b = 7$.