Nový nadpis

π

π lze definovat více způsoby:

- délka kružnice s průměrem 1
- první kladný nulový bod funkce sinus

Nabízí se však přirozené otázky:

- co je délka křivky? [lze vyřešit] [integrál]
- co je funkce sinus? [řada]

Nechme tyto otázky stranou a zabývejme se různými vyjádřeními čísla π.

π jako součet řady:

Uvědomme si, že

$$\boxed{\pi = 4 \cdot \operatorname{arctg} 1.}$$

Pokusme se odvodit rozvoj funkce arctg a z něj najít příslušné vyjádření čísla π.

První možnosti by bylo použití Taylorova vzorce — bylo by ale komplikované počítat derivace funkce arctg.
[Navíc bychom museli ukázat, že zbytky jdou k nule.]

My se vydáme jinou cestou:

Víme, že

$$\left(\forall x\in(-1,1)\right):\ \underbrace{1-x^2+x^4-x^6+\dots\dots}_{\text{geom. řada s kvocientem } (-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\Downarrow \quad \text{(zintegrujeme)}$$

Pro každé $x\in(-1,1)$ platí

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\dots = \operatorname{arctg} x. \qquad (*)$$

To je podvod! Není vůbec jasné, proč by to mělo platit.

My však ukážeme, že rovnost $(*)$ je v pořádku dokonce pro všechna $x\in\langle -1,1\rangle$.

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ definujme funkci r_n předpisem

$$r_n(x)=\operatorname{arctg} x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}\right),$$

tj.

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1}+r_n(x).}$$

pozn.: $r_n(0)=0$

Všimněme si, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\boxed{r_n'(x)} = \frac{1}{1+x^2} - \underbrace{\left(1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}\right)}_{\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}} =$$

(část. součet geom. řady)

$$= \boxed{\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{1+x^2}}.$$

Potřebujeme vlastně ukázat, že

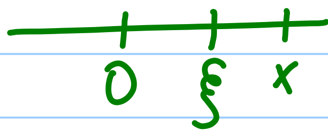
$$(\forall x \in \langle -1, 1 \rangle): \lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0.$$

Předpokládejme nejprve, že $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$ je pevné. [případ $x=0$ je zřejmý]

Pak z Lagrangeovy věty vyplývá, že

$$r_n(x) = r_n(x) - r_n(0) = (x-0) \cdot r_n'(\xi),$$

kde $\xi = \xi(n,x)$ leží mezi 0 a x.



Každopádně ale platí $|\xi| < |x|$.

Odtud

$$|r_n(x)| = |x| \cdot |r_n'(\xi)| = |x| \cdot \frac{|\xi|^{2n}}{\underbrace{1+\xi^2}_{\geq 1}} \leq$$

$$\leq |x| \cdot |\xi|^{2n} \leq |x| \cdot |x|^{2n} = |x|^{2n+1}.$$

Protože $x \in (-1,1)$ bylo pevně zvolené, je

$$\lim_{n\to\infty} |x|^{2n+1} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} |r_n(x)| = 0$$

$$\implies \boxed{\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,}$$

což jsme chtěli.

Rovnost $(*)$ tedy platí $\forall x \in (-1,1)$.

Ukážeme, že $(*)$ platí i pro $x = 1$, (podobně bychom dokázali případ $x = -1$)

tj. $\boxed{\lim_{n\to\infty} r_n(1) = 0.}$ (Předchozí argumenty nelze použít.)

Provedeme podobnou (ale jemnější) úvahu.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné ale pevné. [stačí, omezíme-li se na $\varepsilon < 2$]

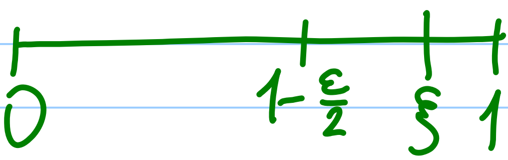
Pak

$$|r_n(1)| = \left| r_n(1) - r_n\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right) + r_n\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \right| \leq$$

$$\leq \left| r_n(1) - r_n\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \right| + \left| r_n\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \right| = \quad \text{Lagr. věta}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{|r_n'(\xi)|}_{\leq 1} + \underbrace{\left| r_n\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \right|}_{\leq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n+1}} \leq$$

(viz předch. úvahy)



$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n+1}.$$

Protože $0 < \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ je pevně zvoleno, jistě

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n+1} = 0} \implies$$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0): \boxed{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|r_n(1)| < \varepsilon.}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} r_n(1) = 0}.$$

$\implies$ ⊛ platí i pro $x = 1$, $x = -1$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots\dots}$$

Dostali jsme velmi pěkné (v praxi však nepoužitelné) vyjádření čísla π.

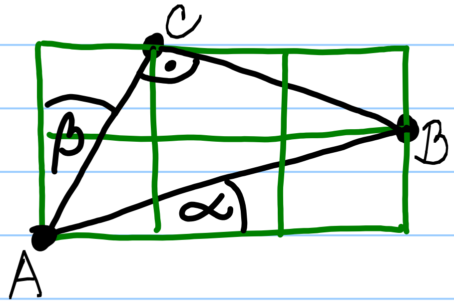
Kdybychom totiž chtěli spočítat π s chybou $< 10^{-6}$, potřebovali bychom sečíst 1 000 000 členů výše uvedené řady!

VYLEPŠENÍ (vhodnější pro numerické počítání)

PLATÍ:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.}$$

DŮKAZ.



$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

ΔABC je rovnoramenný a pravoúhlý $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow$ TVRZENÍ.

VÍME, ŽE

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \cdots\cdots$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \cdots\cdots$$

K výpočtení π s chybou $< 10^{-6}$ stačí sečíst 9 členů první řady a 6 členů řady druhé.
[Sečteme a vynásobíme čtyřmi]

JEŠTĚ LÉPE: (lze ukázat – z roku 1706 – π na 100 míst)

$$\boxed{\operatorname{arctg} 1 = 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.}$$

Pak

$$\boxed{\pi \doteq \frac{16}{5} - \frac{16}{3 \cdot 5^3} + \frac{16}{5 \cdot 5^5} - \frac{16}{7 \cdot 5^7} - \frac{4}{239}.}$$

[výsledek je $\frac{1231847548}{392109375} \doteq 3{,}14159167\ldots \Rightarrow$
$\Rightarrow$ chyba $< 10^{-6}$]

[CVIČENÍ!

Pokuste se vztah

$$\boxed{\operatorname{arctg} 1 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}}$$

dokázat!]

π jako nekonečný součin:

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ počítejme integrál

$$\boxed{I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx.}$$

Zřejmě

$$I_0 = \int_0^\pi 1 \, dx = \pi \quad , \quad I_1 = \int_0^\pi \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = 2.$$

Pro $n \geq 2$ počítejme metodou per-partes:

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx = \int_0^\pi \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & v' = \sin x \\ u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{\left[-\sin^{n-1} x \cdot \cos x\right]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx =$$

$$= (n-1) \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= (n-1) \cdot \left[\int_0^\pi \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^\pi \sin^n x \, dx \right] = (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n).$$

Máme tedy: $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$:

$$\boxed{I_n = (n-1)\cdot\left(I_{n-2} - I_n\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}.}$$ (rekurentní vztah)

Platí tedy

$I_0 = \pi$ $\qquad$ $I_1 = 2$

$I_2 = \pi\cdot\frac{1}{2}$ $\qquad$ $I_3 = 2\cdot\frac{2}{3}$

$I_4 = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ $\qquad$ $I_5 = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$

$I_6 = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$ $\qquad$ $I_7 = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}$

$\vdots$

$$\boxed{I_{2n} = \pi\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n},\quad I_{2n+1} = 2\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.}$$

$(n\in\mathbb{N})$

Zároveň platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\})(\forall x \in \langle 0, \pi\rangle):\ \sin^n x \geq \sin^{n+1} x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) : \quad I_n \geq I_{n+1}.}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}}_{I_{2n}} \geq \underbrace{2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}}_{I_{2n+1}} \geq \underbrace{\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)}}_{I_{2n+2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1)} \geq \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}}_{\to \frac{\pi}{2}}$$

$$\downarrow \frac{\pi}{2}$$

Odtud

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right],$$

tzn.

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots\ldots}$$

(Wallisova formule – r. 1655)

[Jiné znění:
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$
]

Pro numerické počítání není Wallisova formule dobrá.

Pokud bychom například vynásobili prvních 100 000 členů ve Wallisově formuli a výsledek vynásobili $\times 2$, dostali bychom přibližnou hodnotu π (s chybou asi $1{,}6 \cdot 10^{-5}$). (a to není dobré)

Jiné vyjádření:

(Viètův vztah – z roku 1593)

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots\ldots}$$

Uvědomme si, že platí

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Proto není obtížné si všimnout, že

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \ldots\ldots$$

Náš vztah má tedy tvar

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot \;------}$$

Ze součtového vzorce $\boxed{\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)}$

plyne $\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}+\cos\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{16}+\cos\frac{3\pi}{16}+\cos\frac{5\pi}{16}+\cos\frac{7\pi}{16}\right).$$

Indukcí snadno obdržíme, že $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ platí

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=1}^{2^n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\boxed{\frac{\pi/2}{2^n}\cdot\sum_{k=1}^{2^n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}} \Longrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

(integrální součty funkce cos)

$\Longrightarrow$ TVRZENÍ.

POZNÁMKA.

K výpočtu čísla π se používá následující řada:

$$\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).}$$

[z roku 1995]

Zajímavé je, že pomocí této řady lze počítat cifry čísla π bez znalosti cifer předchozích.

Např. lze počítat miliontou cifru čísla π.

[to vše v hexadecimální soustavě]

DALŠÍ FAKTA O ČÍSLE π.

- den čísla π je 14. 3. [3/14] – zároveň je to den narození A. Einsteina.
- číslo π je iracionální (1761, Lambert)
  π^2 je iracionální (1794, Legendre)
  π je transcendentní (1882, Lindemann)
- 16. 10. 2011 bylo π vypočteno s přesností na **10 000 000 000 000** $(= 10^{13})$ desetinných míst.