Katedra aplikované matematiky

OSMA

Občasný seminář z matematické analýzy

Petr Vodstrčil

23. 10. 2012

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Svět vědy
CZ 1.07/2.3.00/35.0018

ČÍSLA e A π JSOU IRACIONÁLNÍ.

1

1) iracionalita e

K důkazu využijeme následující větu:

TAYLOROVA VĚTA

Nechť v nějakém okolí $U(x_0,\delta)$ existuje konečná $(n+1)$-ní derivace funkce f a nechť $x \in P(x_0,\delta)$. Pak existuje ξ ležící mezi body x a x_0 takové, že

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\cdot(x-x_0)^i}_{\text{Taylorův polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{\text{zbytek}}.$$

Aplikujeme-li Taylorovu větu na funkci $f(x)=e^x$ a položíme-li $x_0=0$, dostaneme

$$(*)\quad \boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

[ξ leží mezi 0 a x]

Důkaz iracionality e povedeme sporem.

Předpokládejme tedy, že

$$\boxed{e = \frac{p}{q} \quad (p,q \in \mathbb{N}).}$$

$(e>0)$

Nyní použijeme vztah ⊛ pro $x=-1$ a $n=p$, odkud obdržíme

$$\boxed{\frac{q}{p} = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^p}{p!} + \frac{e^{\xi}\cdot(-1)^{p+1}}{(p+1)!},}$$

kde $-1 < \xi < 0$.

Vynásobme nyní poslední vztah číslem $\boxed{(p+1)!}$ $\underset{\Longrightarrow}{\text{upravíme}}$

$$\underbrace{\left|(p+1)!\cdot\frac{q}{p} - (p+1)!\cdot\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^p}{p!}\right)\right|}_{\in \mathbb{Z}} = \left|e^{\xi}\cdot(-1)^{p+1}\right| =$$

$$= e^{\xi} \in (0,1) \qquad \left[\begin{array}{l}\xi < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\xi} \in (0,1)\end{array}\right]$$

a to je SPOR.

Jiný důkaz využívá vyjádření čísla e řadou

$$\otimes \quad \boxed{e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots}$$

Předpokládejme opět, že $\boxed{e = \frac{p}{q},\ \text{kde } p, q \in \mathbb{N}.}$

Ze vztahu $\otimes$ obdržíme

$$0 < \overset{e}{\frac{p}{q}} - \left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots\dots <$$

$$< \frac{1}{(q+1)!}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\dots\dots\right)}_{\text{geom. řada}} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{(q+1)!}\cdot\frac{q+1}{q} = \frac{1}{q\cdot q!}.$$

Nyní poslední nerovnost vynásobíme číslem $\boxed{q\cdot q!}$.

Dostaneme

$$0 < \underbrace{q!\cdot p - q\cdot q!\cdot\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{q!}\right)}_{\in \mathbb{Z}} < 1,$$

což je SPOR.

Lze ukázat, že např. i číslo $\boxed{e^2}$ je iracionální.

Předchozí důkazové techniky bychom ale nemohli použít.

Jinou technikou se nám povede ukázat následující:

VĚTA

Pro každé $k\in\mathbb{N}$ je e^k iracionální.

4

Než přistoupíme k samotnému důkazu, zavedme následující značení.

Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$\underbrace{f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot (1-x)^n}_{\text{polynom stupně } 2n}$$

VLASTNOSTI f_n:

1) $(\forall x \in \langle 0,1 \rangle): \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$, (zřejmé)

2) $(\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}): \quad f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}, \; f_n^{(m)}(1) \in \mathbb{Z}.$

Polynom f_n lze totiž psát ve tvaru

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=n}^{2n} c_i \cdot x^i \qquad \left[c_i \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$(\forall m \in \{0, 1, \dots, n-1\}): \quad f_n^{(m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z},$$

$$(\forall m \in \{n, \dots, 2n\}): \quad f_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \cdot c_m \cdot m! \in \mathbb{Z},$$

$$(\forall m \in \{2n+1, \dots\}): \quad f_n^{(m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Tvrzení $f_n^{(m)}(1) \in \mathbb{Z}$ plyne ze zřejmého faktu

$$f_n(x) = f_n(1-x) \implies f_n^{(m)}(x) = (-1)^m \cdot f_n^{(m)}(1-x).$$

DŮKAZ VĚTY

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $e^k \in \mathbb{Q}$, tj.

$$\boxed{e^k = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}).} \quad (e^k > 0)$$

Počítejme nyní následující integrál. (n ∈ N libovolné) [metodou per-partes 2n krát]

$$I_n = \int_0^1 e^{kx} \cdot f_n(x)\,dx = \begin{vmatrix} u = f_n(x) & v' = e^{kx} \\ u' = f_n'(x) & v = \frac{1}{k} e^{kx} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{k} e^{kx} \cdot f_n(x)\right]_0^1 - \frac{1}{k} \cdot \int_0^1 e^{kx} \cdot f_n'(x)\,dx = \ldots\ldots =$$

$$= \left[e^{kx} \cdot \left(\frac{1}{k} f_n(x) - \frac{1}{k^2} f_n'(x) + \ldots + \frac{1}{k^{2n+1}} \cdot f_n^{(2n)}(x)\right)\right]_0^1 \implies$$

vynásobíme číslem $k^{2n+1} \cdot q$

$$\underbrace{k^{2n+1} q \cdot I_n}_{} = \underbrace{\left[q \cdot e^{kx} \cdot \left(k^{2n} f_n(x) - k^{2n-1} f_n'(x) + \ldots + f_n^{(2n)}(x)\right)\right]_0^1}_{\in \mathbb{Z} \text{ (promyslete!)}}.$$

$$\to 0 < k^{2n+1} q \cdot I_n = k^{2n+1} q \cdot \int_0^1 \underbrace{e^{kx}}_{\leq e^k} \cdot \underbrace{f_n(x)}_{\leq \frac{1}{n!}}\,dx \leq$$

$$\leq \frac{k^{2n+1} \cdot q \cdot e^k}{n!} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0. \quad \text{(promyslete!)}$$

a to je SPOR.

DŮSLEDEK

Pro každé $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ je e^r iracionální.

DŮKAZ

Tvrzení dokážeme nejprve pro libovolné $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

Pišme $r = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ a předpokládejme, že $e^r \in \mathbb{Q} \implies e^{\frac{p}{q}} \in \mathbb{Q} \implies$

$\implies \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q = e^p \in \mathbb{Q}$. (SPOR) [viz předchozí větu]

Je-li $r \in \mathbb{Q}$, $r < 0$, plyne vše z faktu

$$e^{-r} = \frac{1}{e^r}.$$

DŮSLEDEK

$$(\forall r \in \mathbb{Q}, r > 0, r \neq 1) : \ln r \notin \mathbb{Q}.$$

DŮKAZ

Důkaz je vhodným cvičením.

2) iracionalita π

Dokážeme, že π^2 je iracionální. Iracionalita π je pak snadným důsledkem. (rozmyslete si)

Předpokládejme, že $\pi^2 \in \mathbb{Q}$, tzn.

$$\boxed{\pi^2 = \frac{p}{q} \qquad (p, q \in \mathbb{N}).}$$

$(\pi^2 > 0)$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ počítejme integrál [metodou per-partes]

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) \cdot \sin \pi x \, dx. \qquad \left[f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot (1-x)^n \right]$$

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) \cdot \sin \pi x \, dx = \left| \begin{matrix} u = f_n(x) & v' = \sin \pi x \\ u' = f_n'(x) & v = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} f_n(x) \cos \pi x \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 f_n'(x) \cos \pi x \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = f_n'(x) & v' = \cos \pi x \\ u' = f_n''(x) & v = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \end{matrix} \right| = \left[-\frac{1}{\pi} f_n(x) \cos \pi x \right]_0^1 +$$

$$+\underbrace{\left[\frac{1}{\pi^2} f_n'(x)\sin\pi x\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f_n''(x)\sin\pi x\,dx = \ldots\ldots =$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} f_n(x)\cos\pi x + \frac{1}{\pi^3} f_n''(x)\cos\pi x - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{2n+1}} f_n^{(2n)}(x)\cos\pi x\right]_0^1.$$

Vynásobíme-li poslední rovnost číslem $\boxed{\pi^{2n+1}\cdot q^n}$, dostaneme

$$\boxed{\pi^{2n+1}\cdot q^n\cdot J_n} = \qquad\qquad \left[\pi^2 = \frac{p}{q}\right]$$

$$= \underbrace{\left[\cos\pi x\cdot\left(-\underbrace{\pi^{2n} q^n}_{\in\mathbb{Z}} f_n(x) + \underbrace{\pi^{2n-2} q^n}_{\in\mathbb{Z}} f_n''(x) - \ldots + (-1)^{n+1} q^n f_n^{(2n)}(x)\right)\right]_0^1}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Z druhé strany ale máme

$$0 < \pi^{2n+1}\cdot q^n\cdot J_n = \pi^{2n+1} q^n\cdot\int_0^1 \underbrace{f_n(x)}_{\leq\frac{1}{n!}}\,\underbrace{\sin\pi x}_{\leq 1}\,dx \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{2n+1} q^n}{n!} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0,\ \text{což je SPOR.}$$

rozmyslete si, proč to platí

POZNÁMKA

Uvažujeme-li integrály typu

$$\int_0^1 g_n(x)\cdot \sin rx\,dx\,, \quad \text{kde}$$

$$g_n(x)=\frac{1}{n!}\cdot x^n(1-x)^{2n}(2-x)^n,$$

dostaneme podobnými úvahami následující větu.

VĚTA

$$(\forall r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}):\ \cos r\notin\mathbb{Q}.$$

DOMÁCÍ CVIČENÍ

Na základě výše uvedené věty dokažte, že

$$(\forall r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}):\ \begin{array}{l}\sin r\notin\mathbb{Q},\\ \mathrm{tg}\, r\notin\mathbb{Q},\\ \mathrm{cotg}\, r\notin\mathbb{Q}.\end{array}$$

POZNÁMKA

Integrál $\int_0^1 e^x \cdot f_n(x)\,dx$ $\left[f_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot (1-x)^n \right]$

může být rovněž využit pro přibližný výpočet čísla $\boxed{e}$.

Bude však výhodné odvodit jemnější odhad $f_n(x)$.

Pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ platí

$$0 \leq x \cdot (1-x) \leq \frac{1}{4} \implies 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n! \cdot 4^n} \implies$$

$$\implies \boxed{0 < \int_0^1 e^x f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n! \cdot 4^n} \cdot \underbrace{\int_0^1 e^x\,dx}_{e-1<2} < \frac{2}{n! \cdot 4^n}.}$$

Položíme-li např. $n=2$, dostaneme

$$0 < \int_0^1 e^x \cdot f_2(x)\,dx \overset{\text{per partes}}{=} 7e - 19 < \frac{2}{2! \cdot 4^2} = \frac{1}{16} \implies$$

$$\overset{:7}{\implies} \boxed{0 < e - \frac{19}{7} < \frac{1}{112}.} \qquad \left[\frac{19}{7} = 2{,}71428\ldots\ldots \right]$$

Podobně bychom mohli nalézt i následující aproximace čísla $\boxed{e}$:

$$\underset{n=3}{\frac{193}{71}}, \quad \underset{n=4}{\frac{2721}{1001}}, \quad \underset{n=5}{\frac{49\,171}{18\,089}}, \quad \ldots\ldots$$

LITERATURA

[1] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.

[2] NIVEN, I.: *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America, 1956.