Katedra
aplikované
matematiky

a Jednota českých matematiků a fyziků
vás srdečně zvou na

OBČASNÝ SEMINÁŘ
Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

Doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
KAM FEI VŠB–TU Ostrava

Několik (nevolebních) poznámek na téma
lokální $\longleftrightarrow$ globální

VŠB-Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 15, Ostrava-Poruba

Úterý 15. října 2013
12:30
B5

http://am.vsb.cz/osma

Několik (nevšedních) poznámek na téma lokální ⟷ globální

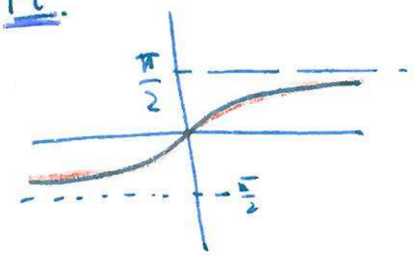
(seminář OSMA – 15. 10. 2013)

(Chvála kompaktnosti)

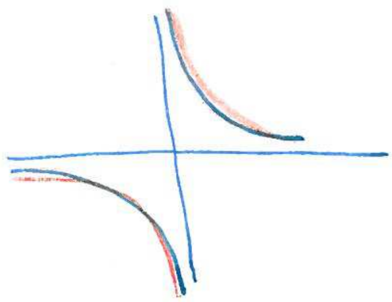
Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f je <u>omezená na $M \subset \mathbb{R}$</u> $\equiv$ $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ M \subset Df \\ \bullet\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : |f(x)| \leq k \end{array}}$

Př.



$f(x) := \operatorname{arctg} x$ <u>je</u> omezená na $\mathbb{R}$



$f(x) := \frac{1}{x}$ – <u>není</u> omezená na $M = Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

– <u>je</u> omezená na $\langle \varepsilon, \infty)$ pro každé $\varepsilon > 0$

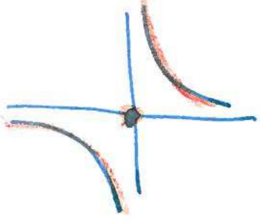
Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f je <u>omezená v bodě $x \in \mathbb{R}$</u> $\equiv$ $\exists\, \mathcal{U}(x) : \left[f \text{ je omezená na } \mathcal{U}(x) \right]$

Př. $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

– $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: f <u>je</u> omezená v x

– f <u>není</u> omezená v 0



Př. (x_n)… všechna racionální čísla seřazená do prosté posloupnosti

$f(x) := \begin{cases} n, & x = x_n, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

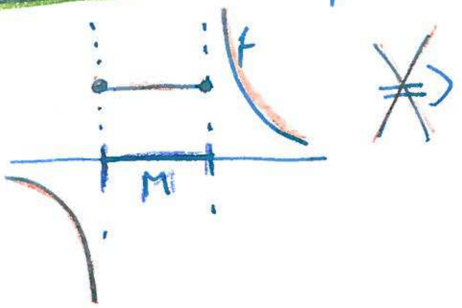
f <u>není</u> omezená na žádném intervalu, proto f <u>není</u> omezená v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$.

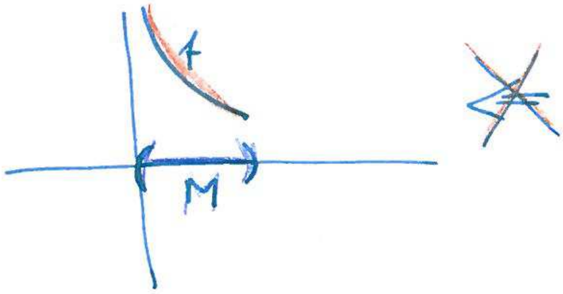
Problém. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $M \subset D_f$. Jak spolu souvisí

$$\boxed{f \text{ je omezená na } M} \quad \text{a} \quad \boxed{\begin{array}{l} f \text{ je omezená} \\ \text{v každém } x \in M \end{array}} \; ?$$

$$\overset{?}{\Longleftarrow} \qquad \overset{?}{\Longrightarrow}$$

Neplatí ani jedna z implikací:





Def. f je omezená v bodě $x \in M$ vzhledem k M

$$\equiv$$

$$\exists U(x): \left[f \text{ je omezená na } U(x) \cap M \right]$$

Věta.

f je omezená na $M \subset \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f je omezená v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M

Důkaz.

Předpokládáme $\quad \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in M: |f(x)| \le k$.

Buď $x \in M$ a $U(x)$ libovolné okolí.

Pak

$$\forall y \in U(x) \cap M \ (\subset M): |f(y)| \le k,$$

a proto f je omezená na $U(x) \cap M$.

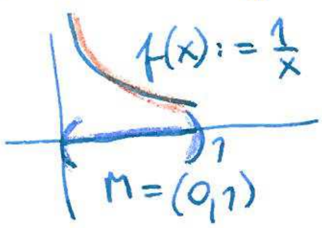
Cbd.

Věta

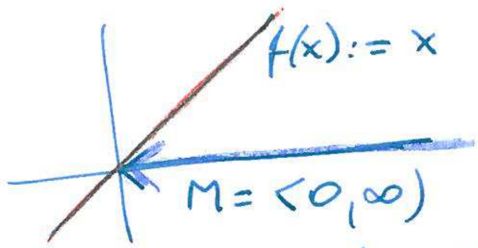
Nechť
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $M \subset D_f$,
- M je <u>kompaktní</u> (tj: uzavřená a omezená)
- $\forall x \in M$: [f je omezená v x vzhledem k M]

Pak f je omezená na M.

Př. (k nezbytnosti předpokladu kompaktnosti M)



M není uzavřená



M není omezená

Důkaz věty Předpokládejme sporem, že

$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists x \in M: |f(x)| > k$. Odtud plyne, že

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in M: |f(x_n)| > n$, a tedy že $\lim |f(x_n)| = \infty$.

Protože M je kompaktní, můžeme z posloupnosti (x_n) vybrat podposloupnost – značme ji stejně – takovou, že $x_n \to x \in M$, tzn.

$$\forall U(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall \underset{n \geq n_0}{n \in \mathbb{N}}: x_n \in U(x). \qquad (*)$$

Současně ale z předpokladu omezenosti f v x vzhledem k M plyne:

$$\exists U(x)\ \exists k \in \mathbb{R}\ \forall y \in U(x) \cap M: |f(y)| \leq k \quad (**)$$

Ze vztahů $(*)$ a $(**)$ snadno usoudíme

$$\exists U(x)\ \exists k \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall \underset{n \geq n_0}{n \in \mathbb{N}}: |f(x_n)| \leq k,$$

a to je spor s předpokladem $\lim |f(x_n)| = \infty$.

Cbd.

Nyní si ukážeme jednu základní vlastnost kompaktních množin (a pomocí ní pak jiný důkaz věty ke str. 3).

Def. Systém $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nazýváme **otevřeným pokrytím** množiny $M\subset\mathbb{R}$, platí-li:

- $\forall \alpha\in A$: $G_\alpha\subset\mathbb{R}$ je otevřená množina,
- $M\subset\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$.

Věta! Nechť $M\subset\mathbb{R}$ je kompaktní. Pak z každého otevřeného pokrytí M lze vybrat **konečné podpokrytí** (tzn. existují $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A$ taková, že $M\subset\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$).

Důkaz. Předpokládejme, že množina A je nekonečná (jinak není co dokazovat...)

a) nejdříve ukážeme, že z pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lze vybrat **spočetné podpokrytí** (tzn. existují $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\in A$ tak, že $M\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{\alpha_i}$)

Buď $\mathbb{Q}=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$
↳ prostá posl.

$$U_{n,m} := U\left(x_n,\frac{1}{m}\right),\quad n,m\in\mathbb{N}$$

Pak

$$\boxed{\forall x\in M\ \exists \alpha\in A\ \exists m,n\in\mathbb{N} :\ x\in U_{n,m}\overset{\text{ozn.}}{=}U(x)\subset G_\alpha} \quad (\times)$$

Důkaz (x).

Buď $x \in M$ dáno.

Pak $\exists \alpha \in A : x \in G_\alpha$ ... otevřená

$$\Downarrow$$

$$\exists m \in \mathbb{N} : x \in U(x, \tfrac{2}{m}) \subset G_\alpha$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : |x - x_n| < \frac{1}{m}$$

$$(\Rightarrow x \in U(x_n, \tfrac{1}{m}) = U_{n,m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall y \in U_{n,m} : |x-y| \le \underbrace{|x-x_n|}_{<\frac{1}{m}} + \underbrace{|x_n-y|}_{<\frac{1}{m}} < \frac{2}{m} \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ \qquad\qquad y \in U(x, \tfrac{2}{m}) \subset G_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow U_{n,m} \subset G_\alpha$$

cbd (x)

Takže $M \subset \bigcup_{x \in M} U(x)$, kde $\forall x \in M : U(x) \in \{U_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ – těch je spočetně mnoho /

proto můžeme všechny koule $U(x)$, $x \in M$, seřadit do posloupnosti

$$U_1, U_2, U_3, \ldots$$

Ale pro každé n můžeme vybrat $\alpha = \alpha_n \in A$ tak, že $U_n \subset G_{\alpha_n}$ (viz (x)).

axiom výběru

Odtud $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_{\alpha_n}$

cbd a)

⇐) Můžeme tedy předpokládat:

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \quad , \text{ kde } G_n \text{ jsou otevřené množiny.}$$

Předpokládejme sporem, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x \in M \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_n), \text{ tzn. že}$$

existují

$$x_1 \in M \setminus G_1,$$
$$x_2 \in M \setminus (G_1 \cup G_2)$$
$$\vdots$$
$$x_n \in M \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n)$$
$$\vdots$$

Pak $(x_n) \subset M$, a proto existuje posloupnost (x_{n_k}) vybraná z (x_n) a $x \in M$ tak, že $x_{n_k} \to x$.

Ale $x \in M$, a proto $\exists m \in \mathbb{N} : x \in G_m$.

Odtud $\forall n_k > m$: $\quad x_{n_k} \in \underbrace{M \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_m)}_{\text{uzavřená množina neobsahující } x},$

navíc $\quad x_{n_k} \to x$

A to je spor. cbd ⇐)

CBD.

Jiný důkaz věty ze str. 3

Předpokládáme

$$\forall x \in M\ \exists U(x)\ \exists k_x \in \mathbb{R}\ \forall y \in U(x) \cap M : |f(y)| \leq k_x$$

Odtud
$$M \subset \bigcup_{x \in M} U(x)$$

Z tohoto otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí, tzn. existují $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ tak, že

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)$$

Zvolme $k = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_n}\} \in \mathbb{R}$.

Pak
$$\forall x \in M\ \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in U(x_i),$$

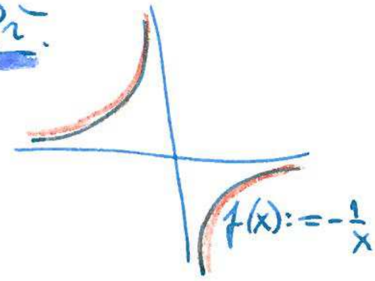
a proto
$$|f(x)| \leq k_{x_i} \leq k.$$

Cbd.

Def. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f je rostoucí v $x \in \mathbb{R}$ $\equiv$ $\boxed{\exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} x < y < x+\delta \Rightarrow f(x) < f(y), \\ x-\delta < y < x \Rightarrow f(y) < f(x) \end{array}}$

Př.



$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: f je rostoucí v x

(ale f není rostoucí na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$!!)

D.cv. Najděte funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že

- f je rostoucí v 0,
- $D_f = \mathbb{R}$,
- f není rostoucí na žádném intervalu.

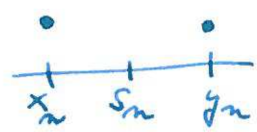
Věta. Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť $I \subset D_f$ je otevřený interval. Pak

f je rostoucí na I $\iff$ $[\forall x \in I: f$ je rostoucí v $x]$

Důkaz.

„$\Rightarrow$" ... zřejmé (stačí volit $\delta > 0$ tak, aby $U(x, \delta) \subset I$)

„$\Leftarrow$" Předpokládejme sporem, že $\forall x \in I: [f$ je rostoucí v $x]$ a že $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \geq f(b)$. Označme $x_0 = a$, $y_0 = b$, $s_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$ a definujme posloupnosti (x_n), (y_n) a (s_n) rekurentně:



$f(s_n) > f(x_n)$ ... $x_{n+1} = s_n$, $y_{n+1} = y_n$, $s_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{2}$

$f(s_n) \leq f(x_n)$ ... $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = s_n$, $s_{n+1} = \frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{2}$.

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$: $(x_n) \subset \langle a,b \rangle$, $(y_n) \subset \langle a,b \rangle$, $0 < |y_n - x_n| \to 0$,
$x_n \leq x_{n+1}$ $\quad$ $y_n \geq y_{n+1}$

$$\boxed{f(x_n) \geq f(y_n)}.$$

Buď $s \in \langle a,b \rangle \subset I$ takové, že $x_n \nearrow s$ a že $y_n \searrow s$ (takové existuje!). Pak (f je rostoucí v s)

$$\exists U(s,\delta)\ \forall y \in \mathbb{R}: \quad \begin{array}{l} s-\delta < y < s \Rightarrow f(y) < f(s) \\ s < y < s+\delta \Rightarrow f(s) < f(y) \end{array}$$

Navíc ale ($x_n \nearrow s$, $y_n \searrow s$, $x_n - y_n > 0$)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall \underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{n}} \geq n_0: \quad \begin{array}{c} s-\delta < x_n < s \leq y_n < s+\delta \\ \text{nebo} \\ s-\delta < x_n \leq s < y_n < s+\delta, \end{array}$$

a proto

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: \quad \begin{array}{c} f(x_n) < f(s) \leq f(y_n) \\ \text{nebo} \\ f(x_n) \leq f(s) < f(y_n), \end{array}$$

a to je spor s $f(x_n) \geq f(y_n)$.

Cbd.

Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v $x \in \mathbb{R}$ (tzn. $f'(x) \in \mathbb{R}$).

f je ryze konvexní v bodě x $\equiv$ $\boxed{\exists P(x)\ \forall y \in P(x):\ f(y) > f(x) + f'(x)(y-x)}$

(tzn. $\exists P(x)$: f je v $P(x)$ „nad tečnou")

Věta Nechť f je diferencovatelná v otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak

f je ryze konvexní na I $\iff$ $[\forall x \in I:$ f je ryze konvexní v $x]$

Důkaz

„$\Longrightarrow$" Předpokládejme sporem, že f je ryze konvexní na I a že $x_0 \in I$ a (např.) $x_0 < y_0 \in I$ tak, že

$$f(y_0) \leq f(x_0) + f'(x_0)(y_0 - x_0).$$

Pak z ryzí konvexity f na I plyne, že pro $y = \frac{x_0 + y_0}{2}$ platí:

$$f(y) < f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0)$$

$$\forall x \in (x_0, y):\ f(x) < f(x_0) + \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}(x - x_0)$$

Odtud

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} < f'(x_0),$$

a to je spor.

Cbd „$\Longrightarrow$"

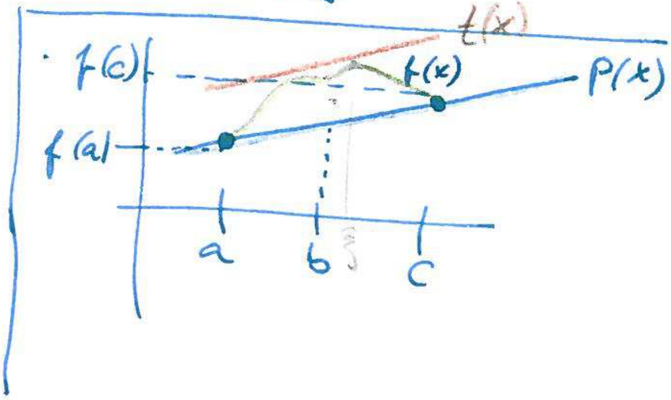
"⇐" Nechť $\forall x \in I: [f \text{ je ryze konvexní v } x]$

a buď $a, b, c \in I$, $a < b < c$

máme dokázat, že

$$f(b) < p(b), \text{ kde}$$

$$p(x) := f(a) + \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a).$$



Předpokládejme sporem, že $\boxed{f(b) \geq p(b)}$.

Pak spojitá funkce $\boxed{d(x) := f(x) - p(x)}$ nabývá na (kompaktu!) $\langle a, c\rangle$ svého maxima v nějakém bodě $\xi \in (a,b)$. Proto $d'(\xi) = f'(\xi) - p'(\xi) = 0$.

Uvažujme funkci $\boxed{t(x) := p(x) + f(\xi) - p(\xi)}$.

Pak $t(\xi) = f(\xi)$ a $t'(\xi) = p'(\xi) = f'(\xi)$

(tzn. t je tečnou f v bodě ξ), a proto

$$\exists U(\xi)\ \forall x \in U(\xi) \setminus \{\xi\}: \quad f(x) > t(x).$$

Současně ale

$$\forall x \in \langle a,b\rangle: \quad f(\xi) - p(\xi) = d(\xi) \geq d(x) = f(x) - p(x),$$

neboli

$$\forall x \in \langle a,b\rangle: \quad f(x) \leq p(x) + f(\xi) - p(\xi) = t(x),$$

a to je spor. ctd "⇐"

CBD.