Není kardinál jako kardinál aneb jak porovnávat nekonečna?

Pavel Drábek

Katedra matematiky a Evropské centrum NTIS (Nové technologie pro informační společnost)
Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni

VŠB – TU Ostrava, březen, 2013

"JAK POROVNÁVAT NEKONEČNÉ MNOŽINY?"

Kardinalita množiny M .... $|M|$

M má konečně mnoho prvků ... n $\Rightarrow$ $|M| = n$

$|M| = |N|$ počet prvků M = počet prvků N

M má nekonečně mnoho prvků ... tyto prvky „nespočítáme" ... "$|M| = \infty$"

Intuitivně „cítíme", že není nekonečno jako nekonečno!

Například přirozených čísel je "méně" než reálných čísel. Ale obojích je nekonečně mnoho.

Potřebujeme jiný nástroj pro jejich porovnávání než je spočítat počet prvků!

Myšlenkový experiment: Kdy je počet lidí nastupujících do autobusu stejný jako je počet sedadel?

Definice.

$$|M| = |N| \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, b : M \to N$$

b je bijekce

bijekce = vzájemně jednoznačné zobrazení

relace $|M| = |N|$ je ekvivalence

množiny ... třídy ekvivalence

každé třídě ekvivalence přiřadíme

kardinální číslo

Konečné množiny: $0, 1, 2, \dots, n, \dots$

$\forall N \subsetneq M \implies |N| < |M|$

(vlastní podmnožina)

Nekonečné množiny

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

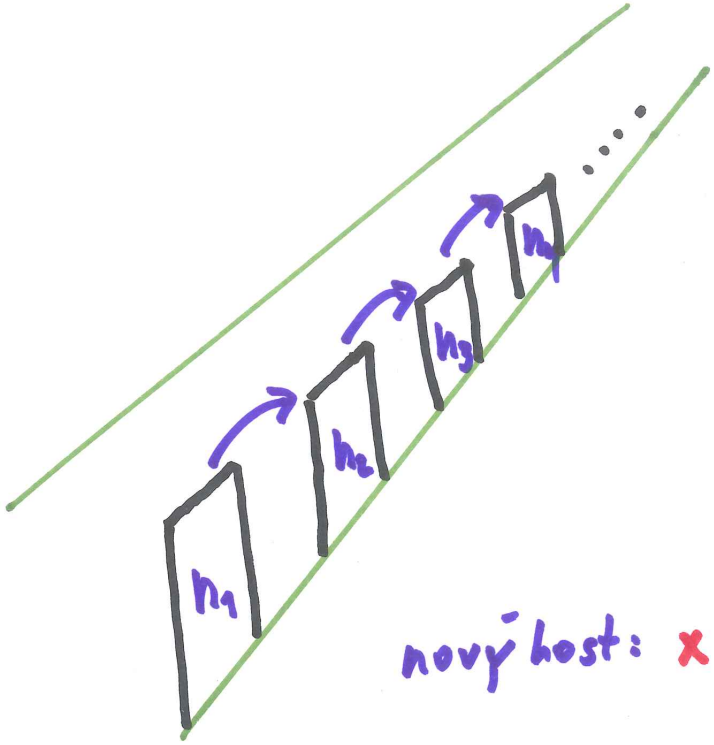
M je spočetná $\overset{\text{def.}}{\iff} \exists b : M \to \mathbb{N}$

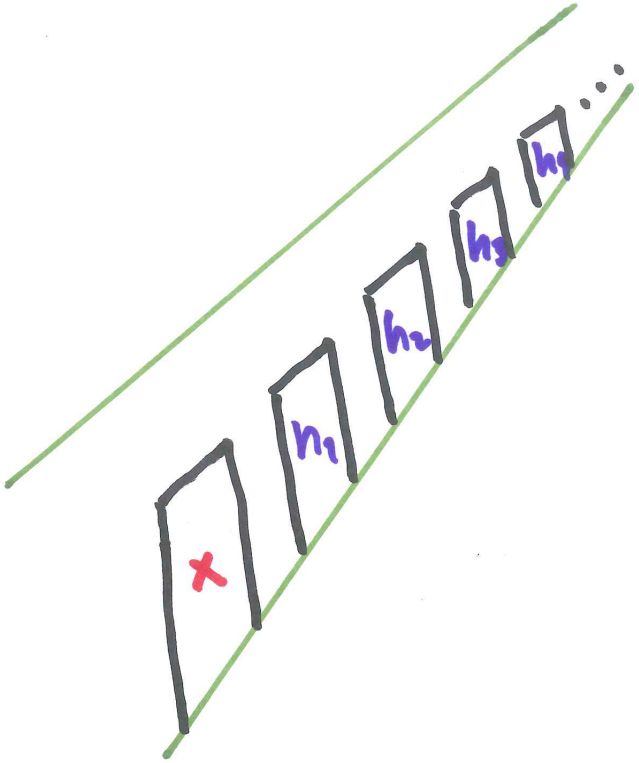
$M = \{m_1, m_2, \dots\}$

POZOR! Výše uvedená implikace neplatí!

$M \cup \{x\}$, $x \neq m_1, m_2, \dots$; $M \subsetneq M \cup \{x\}$ & $|M| = |M \cup \{x\}|$

Hilbertův hotel:





Charakteristický rys nekonečna:

Množina M má nekonečně mnoho prvků

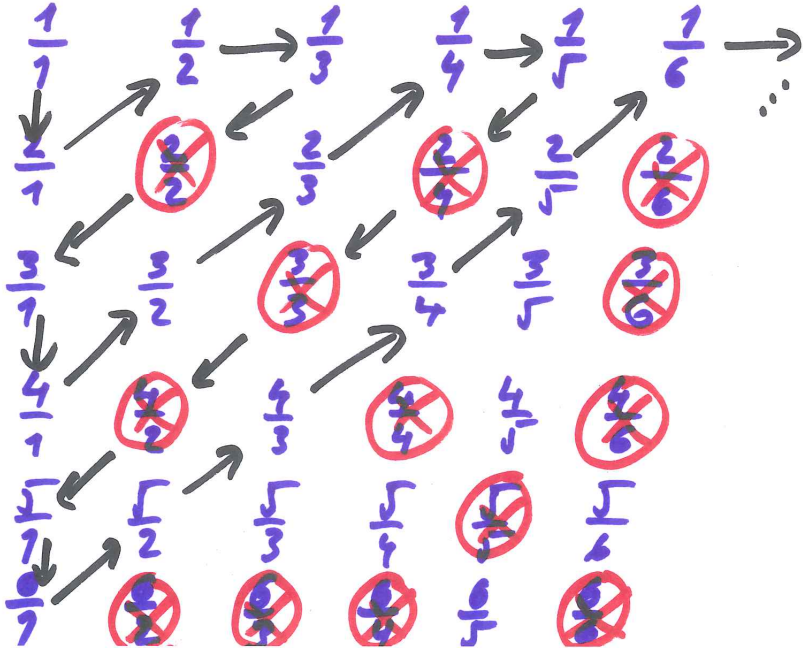
$$\Updownarrow$$

$$\exists N \subsetneq M : |N| = |M|$$

Další číselné množiny:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$ spočetná

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \dots\}$$ spočetná



JINÁ INTERPRETACE OBRÁZKU

Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je opět množina spočetná!

$$M_n = \{ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots \}$$ n-tý řádek

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \{ a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \dots \}$$

OTÁZKA: Je $\mathbb{R}$ množina spočetná?

ODPOVĚĎ: Ne. Důkaz Cantorovou diagonalizační metodou.

Lemma. M je spočetná, $N \subset M$. Potom N je spočetná.

$\Rightarrow \exists M \subset \mathbb{R}$, M není spočetná $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ není spočetná

Stačí ukázat, že $M = (0, 1]$ není spočetná.

Důkaz sporem: předpokládáme, že $M = (0,1]$ je spočetná:

$$M = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

$\forall r_n \in (0,1]$ má ∞-rozvoj:

$$r_n = 0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$

$$a_{ni} \in \{0,1,2,\dots,9\} \qquad \forall n,i$$

např. $0{,}7 = 0{,}6999\dots$ ∞-rozvoj

$$r_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots$$
$$r_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots$$
$$r_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \dots$$
$$\vdots$$

$$\forall n : \quad b_n \in \{1, \dots, 8\}, \quad b_n \neq a_{nn}$$

$$b = 0,\ b_1 b_2 b_3 \dots \quad \in (0,1]$$

$$\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : \quad b = r_k$$

$$0,\ b_1 b_2 b_3 \dots b_k\, b_{k+1} \dots = 0,\ a_{k1} a_{k2} \dots a_{kk}\, a_{kk+1} \dots$$

$$\neq$$

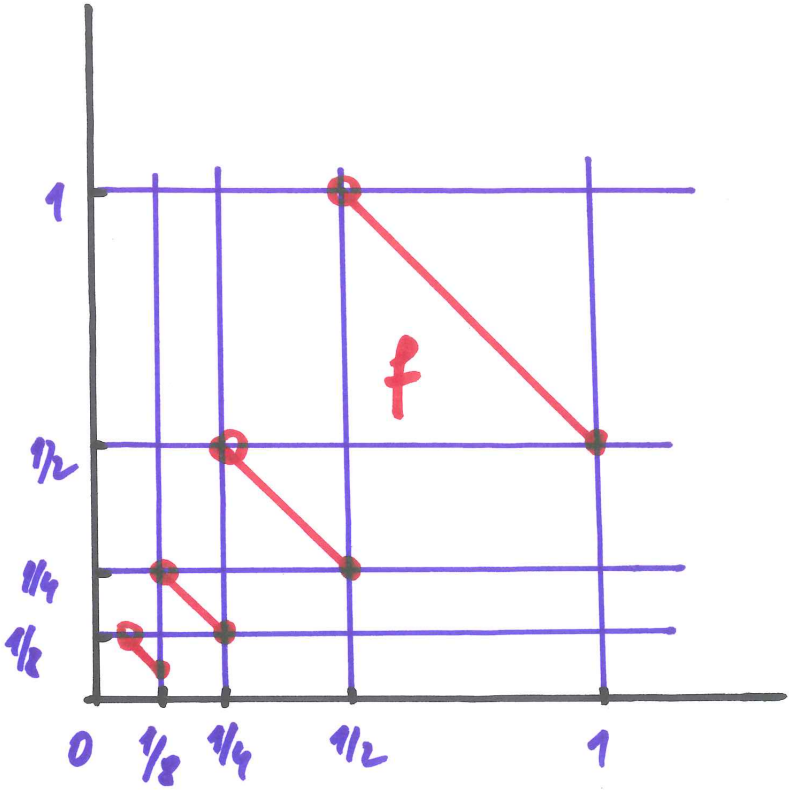
$\Rightarrow \quad |\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$

neexistuje bijekce $\mathbb{R}$ na $\mathbb{N}$!

z důkazu je patrné, že v $(0,1]$ (a tedy i v $\mathbb{R}$) je "více" prvků než v $\mathbb{N}$

$$|(0,1)| = |(0,1]| = |[0,1)| = |[0,1]|$$

Příklad: $f : (0,1] \to (0,1)$

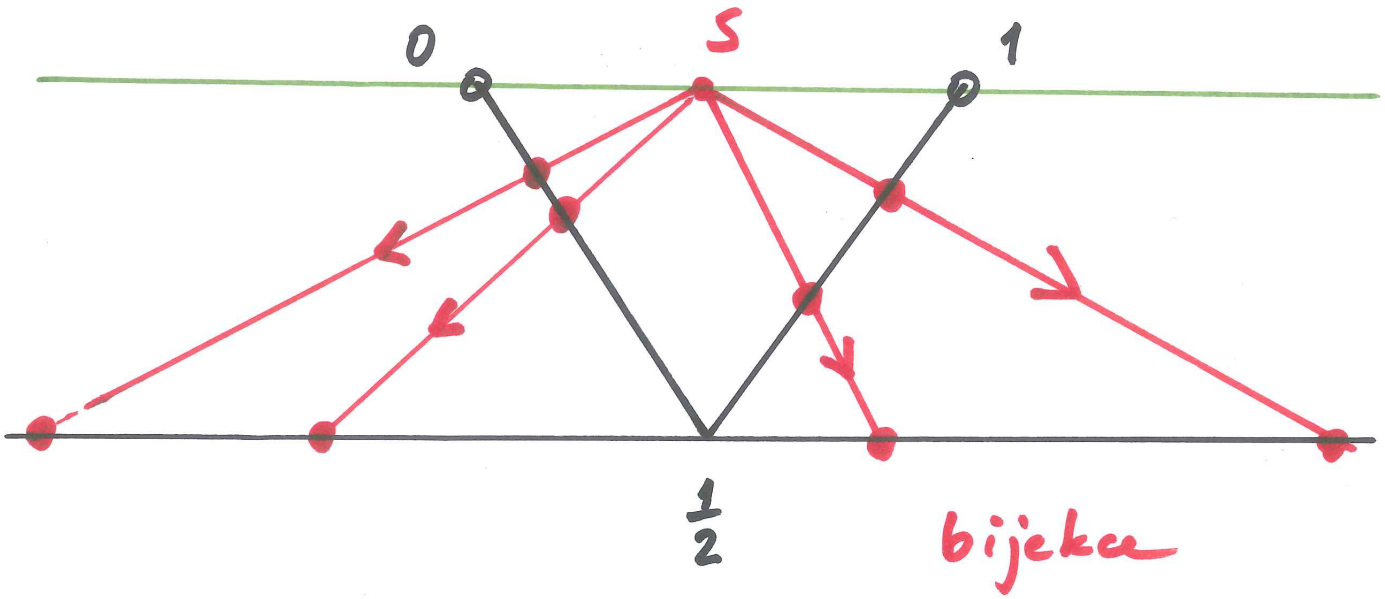


$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{3}{4} - x, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ \dots\dots \end{cases}$$

f je bijekce

Každé dva intervaly konečné délky mají stejnou mohutnost (mohutnost nesouvisí s délkou).

$|(0,1)| = |\mathbb{R}|$:



$\forall$ interval I : $|I| = |\mathbb{R}| \overset{\text{def.}}{=} c$

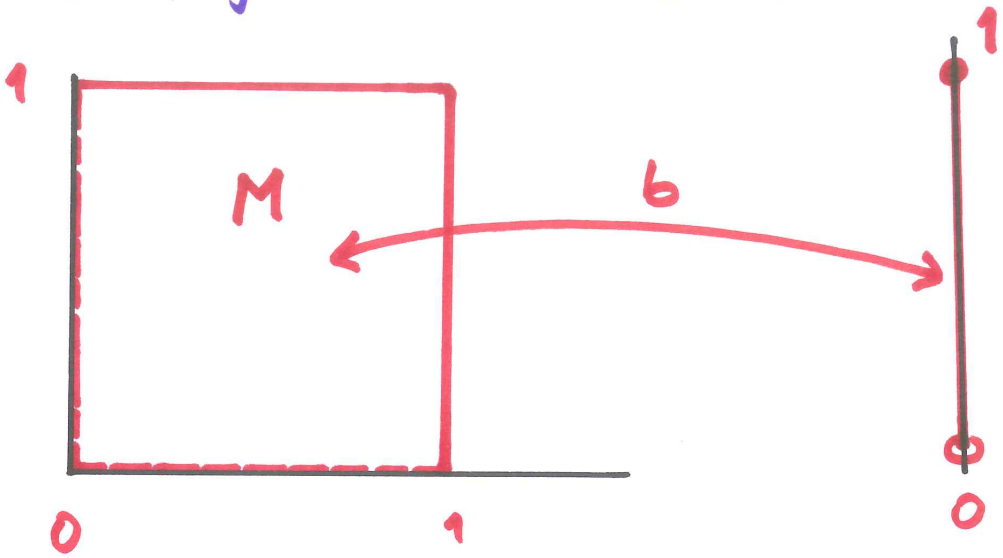
mohutnost kontinua

POZOR! Mohutnost nesouvisí s dimenzí!

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \ldots = |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{C}| = c$$

Bijektivní zobrazení nezachovává dimenzi!

$\exists$ bijekce $b : \{(x,y) : 0 < x, y \leq 1\} \to (0,1]$



$(x,y) \in M$ uvažujme desetinné rozvoje (∞) x a y

př. $x = 0{,}3\,01\,2\,007\,08\ldots$

$y = 0{,}009\,2\,05\,1\,0008\ldots$

$(x,y) \mapsto z$

$z = 0{,}3\,009\,01\,2\,2\,05\,007\,1\,08\,0008\ldots$

Pokud je bijektivní zobrazení b spojité a b^{-1} je také spojité, dimenze množiny se zachovává!

Uspořádání kardinálních čísel

$|M| = m$, $|N| = n$

$$m \leqq n \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists\, i : M \to N$$

prosté zobrazení

$m \le n \quad \& \quad n \le m \Rightarrow n = m$

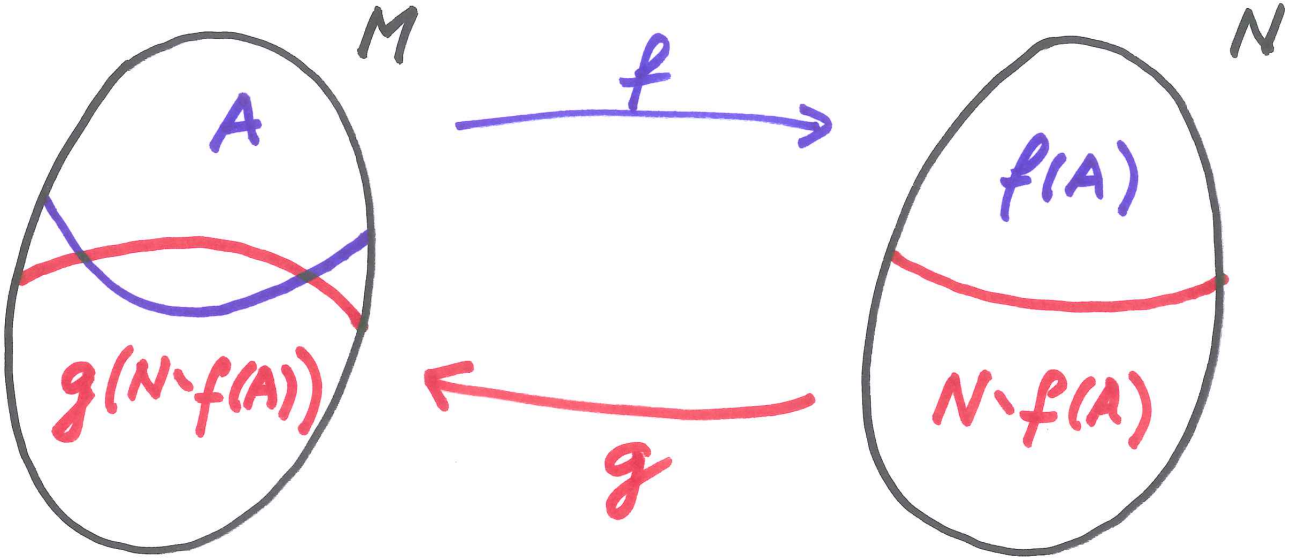
Schroeder-Bernsteinova věta:

$|M| \le |N| \qquad |N| \le |M|$

$\exists f : M \to N,\ g : N \to M$ prostá zobrazení

$\Rightarrow \exists b : M \to N$ bijektivní zobrazení

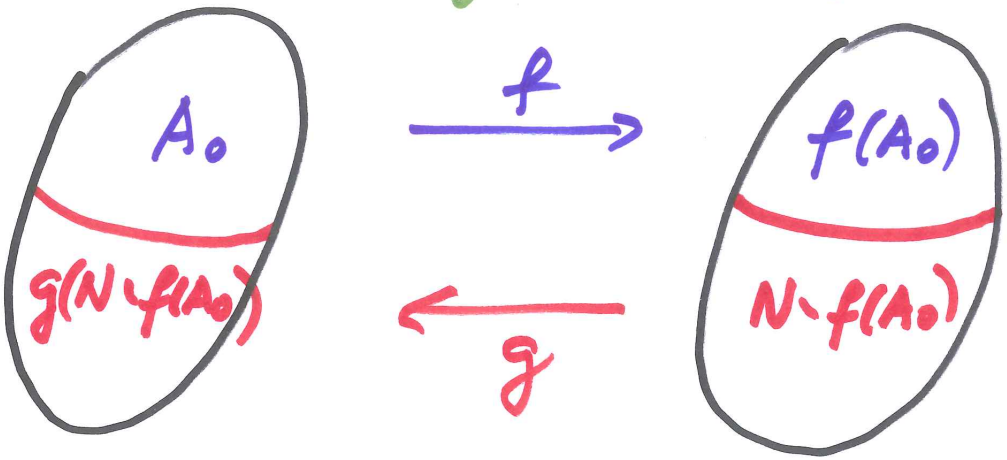
$|N| = |M|$



$$F(A) = M \setminus g(N \setminus f(A))$$

$$? \ \exists A_0 \subset M \ : \ F(A_0) = A_0$$

$$g(N \setminus f(A_0)) = M \setminus A_0$$



$$b(x) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in A_0 \\ g^{-1}(x), & x \notin A_0 \end{cases}$$

je bijekce M na N !

Stačí nalézt "pevný bod" A_0 zobrazení F : $A_0 = F(A_0)$

(1) $A_1, A_2, A_3, \dots \subset M \Rightarrow F(\bigcap A_i) = \bigcap F(A_i)$

(i) $f(\bigcap A_i) = \bigcap f(A_i) \Leftarrow f$ je prosté

(ii) $B_1, B_2, B_3, \dots \subset N \Rightarrow g(\bigcup B_i) = \bigcup g(B_i)$

Dk. (1): $F(\bigcap A_i) = M \setminus g(N \setminus f(\bigcap A_i))$

$$\overset{(i)}{=} M \setminus g(N \setminus \bigcap f(A_i))$$

$$\overset{\text{de Morgan}}{=} M \setminus g(\bigcup (N \setminus f(A_i)))$$

$$\overset{(ii)}{=} M \setminus \left(\bigcup g(N \setminus f(A_i)) \right)$$

$$\overset{\text{de Morgan}}{=} \bigcap \left(M \setminus g(N \setminus f(A_i)) \right)$$

$$= \bigcap F(A_i)$$

Existence A_0:

$$M \supseteq F(M) \supseteq \underbrace{F(F(M))}_{F^2(M)} \supseteq F^3(M) \supseteq \dots$$

$$A_0 \overset{\text{def.}}{=} M \cap F(M) \cap F^2(M) \cap \dots$$

$$(1) \Rightarrow F(A_0) = F(M) \cap F^2(M) \cap \dots = A_0$$

Další vlastnosti uspořádání:

- $m < n$ když $m \leq n$ & $m \neq n$
- $\forall m, n$ nastává právě jedna z možností:

  $m < n$ nebo $m = n$ nebo $n < m$
- Schroeder-Bernstein Theorem $\Rightarrow$

  $m < n$ & $n < p$ $\Rightarrow$ $m < p$

  (transitivita)

$\Rightarrow$ Kardinální čísla je možné lineárně uspořádat

počínaje konečnými kardinálními čísly

$0, 1, 2, 3, \ldots$

Každá nekonečná množina M obsahuje spočetnou (nekonečnou podmnožinu):

M je nekonečná $\Rightarrow \overset{\text{axiom výběru}}{\exists}\, m_1 \in M \Rightarrow M \setminus \{m_1\}$ je nekonečná $(\neq \emptyset) \overset{\text{axiom výběru}}{\Longrightarrow} \exists\, m_2 \in M \setminus \{m_1\}$

$\Rightarrow M \setminus \{m_1, m_2\}$ je nekonečná $(\neq \emptyset) \Rightarrow \exists\, m_3 \ldots$

$\Rightarrow$ velikost spočetné množiny je nejmenší nekonečné kardinální číslo $\aleph_0$ (aleph nula)

$\forall m$ nekonečné kardinální číslo, $m \geq \aleph_0$

$\Rightarrow$ pro m platí "Hilbertův hotel"

$$|M \cup \{x\}| = |M|$$

$\exists N \subset M$, $N = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$

$x \mapsto m_1$, $m_1 \mapsto m_2$, $m_2 \mapsto m_3, \dots$

ostatní prvky necháme na místě

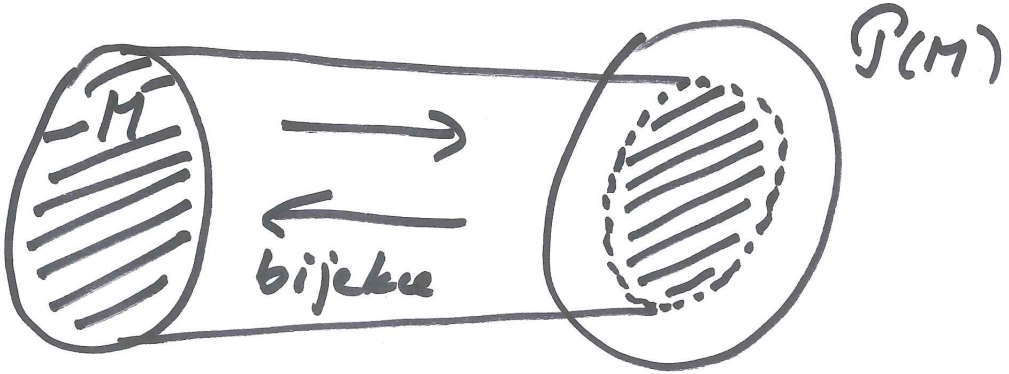
bijekce $M \cup \{x\}$ na M

Ke každému kardinálnímu číslu existuje větší kardinální číslo za ním bezprostředně následující.

$\forall m \ \exists n : \quad n > m$

$M \neq \emptyset \quad \mathcal{P}(M)$ množina všech podmnožin

$m \in M \longleftrightarrow \{m\} \in \mathcal{P}(M)$



$\Rightarrow |M| \leq |\mathcal{P}(M)|$

$\mathcal{P}(M)$ nemůže být bijektivně zobrazeno na podmnožinu $N \subset M$!

Sporem: $\exists$ bijekce $\varphi : N \longrightarrow \mathcal{P}(M)$

$U \subset N$ je podmnožina všech prvků N, které nejsou obsaženy ve svých obrazech:

$$U = \{ m \in N : m \notin \varphi(m) \}$$

φ je bijekce $\Rightarrow \exists u \in N : \varphi(u) = U$

1. $u \in U \Rightarrow u \notin \varphi(u) = U$ ↯
2. $u \notin U \Rightarrow u \notin \varphi(u) \Rightarrow u \in U$ ↯

Myšlenka důkazu je založena na

„Holič je muž, který holí všechny muže, kteří neholí sami sebe.
Holí holič sám sebe?"

1. Holič neholí sám sebe $\Rightarrow$ holí všechny takové muže $\Rightarrow$ holí sám sebe ↯

2. Holič holí sám sebe $\Rightarrow$ holí muže, kteří se sami neholí $\Rightarrow$ nemůže holit sám sebe ↯

Dosud známe

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \aleph_0 < c$$

Je c kardinální číslo, které následuje bezprostředně po $\aleph_0$?

Je $c = \aleph_1$?

HYPOTÉZA KONTINUA.

Kurt Gödel, Paul Cohen

může být $c = \aleph_1$ i $c \neq \aleph_1$!

Děkuji za pozornost!