Katedra aplikované matematiky

OSMA

OBČASNÝ SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

14. 5. 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Svět vědy
CZ 1.07/2.3.00/35.0018

ALGEBRAICKÁ ČÍSLA A MOROVÁ EPIDEMIE

DEFINICE

Číslo $a \in \mathbb{C}$ se nazývá algebraické, pokud existuje nenulový polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že
$$P(a) = 0.$$

Stupeň algebraického čísla a:
$$\text{st}\, a = \min\left\{ \text{st. } P \; : \; \begin{array}{l} P \text{ je nenul. pol. s celoč. koef.,} \\ P(a) = 0 \end{array} \right\}.$$

Číslo, které není algebraické, nazýváme transcendentní.

PŘÍKLADY

- Každé racionální číslo $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0)$ je algebraické (stupně 1), neboť takové číslo je kořenem polynomu $P(x) = qx - p$.
- $\sqrt{2}$ je algebraické číslo $\left(P(x) = x^2 - 2 \right)$.
- i je algebraické číslo $\left(P(x) = x^2 + 1 \right)$.

Množina $\mathbb{A}$ všech algebraických čísel je spočetná

$\Downarrow$ ($\mathbb{R}$ je nespočetná)

existuje (nespočetně mnoho) transcendentních čísel.

VĚTA

e a π jsou transcendentní.

[bez důkazu]

VLASTNOSTI ALGEBRAICKÝCH ČÍSEL

(viz [1])

POZOROVÁNÍ

Je-li číslo a algebraické stupně n, pak

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0): \quad a^k \in \underbrace{\mathrm{Lin}^{\mathbb{Q}}\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}}_{\text{množina všech lineárních kombinací s rac. koeficienty}}.$$

VĚTA

$$a, b \in \mathbb{A} \implies a+b \in \mathbb{A}, \quad a \cdot b \in \mathbb{A}.$$

$$a, b \in \mathbb{A},\ b \neq 0 \implies \frac{a}{b} \in \mathbb{A}.$$

DŮKAZ

Ukážeme, že součet dvou algebraických čísel je algebraické číslo.

Předpokládejme, že $a, b \in A$, $st(a) = m$, $st(b) = n$.
Ukážeme, že $a+b \in A$ a $st(a+b) \leq m \cdot n$.

Platí

$$\left.\begin{array}{l} (\forall k \in \mathbb{N}_0): \quad a^k \in \mathrm{Lin}^{\mathbb{Q}}\{1, a, \dots, a^{m-1}\} \\ (\forall l \in \mathbb{N}_0): \quad b^l \in \mathrm{Lin}^{\mathbb{Q}}\{1, b, \dots, b^{n-1}\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\forall k, l \in \mathbb{N}_0): \quad a^k b^l \in \mathrm{Lin}^{\mathbb{Q}} \underbrace{\left\{a^i b^j : \begin{array}{l} i \in \{0, \dots, m-1\} \\ j \in \{0, \dots, n-1\} \end{array}\right\}}_{\text{počet prvků této množiny je nejvýše } m \cdot n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{1, (a+b), (a+b)^2, \dots, (a+b)^{m \cdot n}}_{} \in \mathrm{Lin}^{\mathbb{Q}}\left\{a^i b^j : \begin{array}{l} i \in \{0, \dots, m-1\} \\ j \in \{0, \dots, n-1\} \end{array}\right\}$$

$(m \cdot n + 1)$ vektorů, každý lze vyjádřit jako lin. komb. výše zmíněných prvků, kterých je maximálně $m \cdot n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lin. závislost $\Rightarrow$ TVRZENÍ.

Podobně bychom ukázali i implikaci

$$a, b \in A \Rightarrow a \cdot b \in A.$$

Nechť nyní $b \neq 0$ je algebraické a platí

$$\underbrace{\alpha_n \cdot b^n + \ldots + \alpha_1 b + \alpha_0}_{P(b)} = 0.$$

$[:b^n]$

Pak $\underbrace{\alpha_n + \alpha_{n-1} \cdot \frac{1}{b} + \ldots + \alpha_1 \cdot \frac{1}{b^{n-1}} + \alpha_0 \cdot \frac{1}{b^n}}_{Q\left(\frac{1}{b}\right),\ \text{kde}\ Q(x) = \alpha_n + \alpha_{n-1} x + \ldots + \alpha_0 x^n} = 0.$

Odtud plyne, že $\frac{1}{b} \in \mathbb{A}$.

Je-li navíc $a \in \mathbb{A}$, pak $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \in \mathbb{A}$.

$\square$

POZNÁMKA

Výše uvedený <u>důkaz je konstruktivní.</u>

Uvažujme číslo $\underline{a = \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ a hledejme nenulový polynom P s celočíselnými koeficienty, pro který

$$\underline{P(a) = 0.}$$

<u>Platí</u>

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot \sqrt{6} =$$

$$= \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = 0\cdot 1 + 1\cdot\sqrt{2} + 1\cdot\sqrt{3} + 0\cdot\sqrt{6} =$$

$$= \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2+2\cdot\sqrt{6}+3 = 5+2\cdot\sqrt{6} =$$

$$= 5\cdot 1 + 0\cdot\sqrt{2} + 0\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{6} =$$

$$= \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3 = \ldots\ldots = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} =$$

$$= 0\cdot 1 + 11\cdot\sqrt{2} + 9\cdot\sqrt{3} + 0\cdot\sqrt{6} =$$

$$= \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\11\\9\\0\end{pmatrix},$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4 = \ldots\ldots = 49 + 20\cdot\sqrt{6} =$$

$$= 49\cdot 1 + 0\cdot\sqrt{2} + 0\cdot\sqrt{3} + 20\cdot\sqrt{6} =$$

$$= \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)\cdot\begin{pmatrix}49\\0\\0\\20\end{pmatrix}.$$

Odtud $\left[a=\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$

$$(1, a, a^2, a^3, a^4) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 49 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 20 \end{pmatrix}}_{M}.$$

Uvažujme soustavu s maticí M.

Netriviálním řešením je např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (1, a, a^2, a^3, a^4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a^4 - 10a^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ hledaný polynom je $\underline{P(x) = x^4 - 10x^2 + 1}$.

JINÉ ŘEŠENÍ (bez použití matic)

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad /^2$$

$$a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$a^2 - 5 = 2\sqrt{6} \quad /^2$$

$$(a^2-5)^2 = 24$$

$$a^4 - 10a^2 + 25 = 24$$

$$\boxed{a^4 - 10a^2 + 1 = 0.}$$

DOMÁCÍ CVIČENÍ

- Najděte nenulový polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že
$$P(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}) = 0.$$

- Již víme, že čísla e a π jsou transcendentní. Ukažte, že mezi čísly
$$\pi+e,\ \pi-e,\ \pi\cdot e,\ \frac{\pi}{e}$$
je nejvýše jedno algebraické.

A JAK TO TEDY CELÉ SOUVISÍ S MOREM?

(viz [2])

V roce 430 před naším letopočtem sužoval starořecké Athény mor. Athéňané se vydali na ostrov Délos v Egejském moři (na tomto ostrově se podle pověstí narodil bůh Apollón, do jehož resortu všechny problémy s morem spadaly), aby od místních věštců získali informaci, jak se s morem vypořádat. Bylo jim řečeno, že mají ve svém domovském chrámu postavit nový oltář, jehož objem bude dvojnásobkem objemu současného oltáře. Protože tento oltář měl přesně krychlový tvar, byli Athéňané (z matematického pohledu) postaveni před úkol zkonstruovat krychli o dvojnásobném objemu než je zadaná krychle. Provést v oné době nějakou geometrickou konstrukci navíc znamenalo provést ji pouze s pomocí pravítka a kružítka.

[Umíme-li nějakou délku zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka, je tato délka algebraické číslo stupně 2^n. (lze dokázat)]

DOMÁCÍ CVIČENÍ

$\sqrt[3]{2}$ je algebraické číslo stupně 3. Dokažte.

[Nyní uvedeme další věty týkající se algebraických a transcendentních čísel.
(viz [1])]

POZOROVÁNÍ

$z \in \mathbb{C}$ je algebraické $\Longleftrightarrow$ $\begin{matrix}\mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z\end{matrix}$ jsou algebraická.

DŮKAZ

Tvrzení plyne z toho, že

- $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$,
- $z = \mathrm{Re}\, z + i \cdot \mathrm{Im}\, z$,
- z algebraické $\Rightarrow$ $\bar{z}$ algebraické (promyslete),
- čísla i a 2 jsou algebraická. $\square$

Stačí tedy, budeme-li se zabývat pouze reálnými algebraickými / transcendentními čísly.

VĚTA (Liouvilleova, 1844)

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je algebraické číslo stupně nejvýše n. Pak existuje číslo $c > 0$ takové, že

$$(\forall p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{N}) : \frac{p}{q} \neq \alpha \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{c \cdot q^n}.$$

DŮKAZ

Nechť $P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nenulový polynom s celočíselnými koeficienty splňující

$$\boxed{P(\alpha) = 0.}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby polynom P měl v intervalu

$$I = \langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle$$ pouze kořen α.

[P má pouze konečný počet kořenů.]

Položme $M = \max\limits_{x \in I} |P'(x)|$, $\boxed{c = \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}, M\right\}.}$

Nechť nyní $\frac{p}{q} \neq \alpha$. $[p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}]$

Jestliže $\frac{p}{q} \in I$, pak

$[\xi \in I]$

$$\underbrace{\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right|}_{>0} = \left|P\left(\frac{p}{q}\right) - P(\alpha)\right| = |P'(\xi)| \cdot \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq$$

$$\leq M \cdot \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|.$$

Zároveň ale platí

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{\left|\alpha_m p^n + \alpha_{m-1} p^{n-1} q + \ldots + \alpha_1 p q^{n-1} + \alpha_0 q^n\right|}{q^n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{q^n} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M \cdot q^n} \geq \frac{1}{C \cdot q^n}.$$

Jestliže $\frac{p}{q} \notin I$, pak

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \varepsilon \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{C \cdot q^n}.$$

$\square$

DOMÁCÍ CVIČENÍ

Najděte všechny dvojice $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, pro které platí $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^3}$.

Řešení se opírá o Liouvilleovu větu a o fakt, že $\sqrt{2}$ je algebraické číslo stupně 2.

DEFINICE

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme Liouvilleovým číslem, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existují čísla $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \geq 2$, taková, že

$$0 < \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

VĚTA

Každé Liouvilleovo číslo je transcendentní.

DŮKAZ

Předpokládejme sporem, že a je Liouvilleovo číslo, které je algebraické stupně $k \in \mathbb{N}$.

Uvažujme posloupnosti (p_n), (q_n) z definice Liouvilleova čísla.
Pak podle Liouvilleovy věty

$$(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N}): \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{c \cdot q_n^k}.$$

Zároveň ale $(\forall n \in \mathbb{N}): \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k): 2^{n-k} \leq q_n^{n-k} < c,$$

což je spor, neboť $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{n-k} = +\infty$. $\square$

POZNÁMKA

Číslo $\quad a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ je Liouvilleovo.

[a tedy transcendentní]

Stačí totiž zvolit

$$q_n = 10^{n!}, \quad p_n = 10^{n!} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{i!}}.$$

Pak

$$0 < \left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} <$$

$$< \underbrace{\frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+1)!+1}} + \dots\dots}_{\text{geom. řada}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^{(n+1)!}} <$$

$$< \frac{1}{10^{(n+1)!-1}} \leqslant \frac{1}{10^{n!\cdot n}} = \frac{1}{q_n^n}.$$

POZNÁMKA

Předpokládejme, že

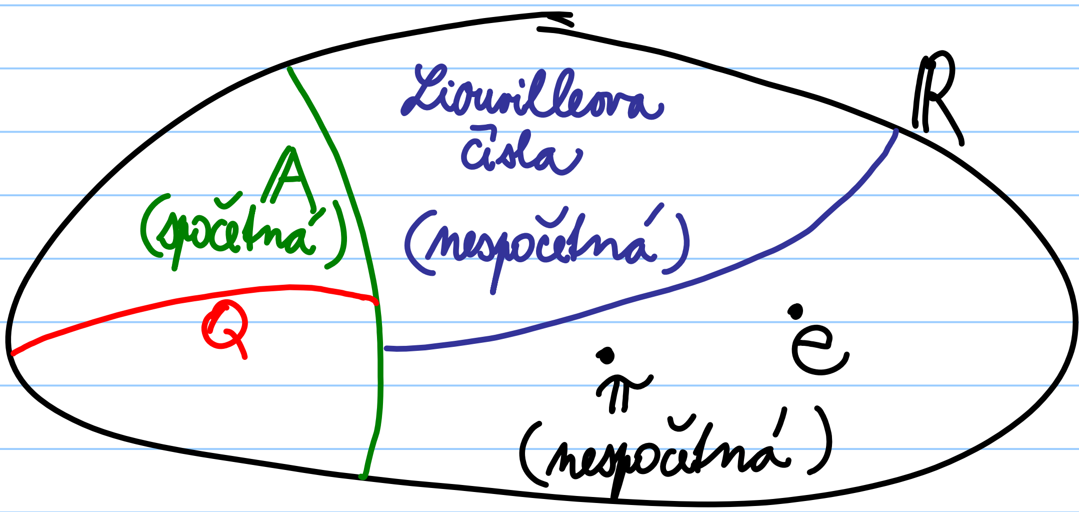
$$(\forall i \in \mathbb{N}) : \alpha_i \in \{0, 1\}$$

a uvažujme číslo $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1+\alpha_i}{10^{i!}}$.

Stejně jako v předchozí poznámce bychom dokázali, že toto číslo je Liouvilleovo.

Odtud vyplývá, že množina všech Liouvilleových čísel je nespočetná.

Dále lze ukázat (viz [3]), že množina všech Liouvilleových čísel má nulovou Lebesgueovu míru.



LITERATURA

[1] NIVEN, I. : Irrational Numbers.
The Mathematical Association of America, 1956.

[2] ROKYTA, M. : Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a podobné „nemožné úlohy".

[3] NOVÁK, B. : O sedmém Hilbertově problému.
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 17 (1972), No. 5, 245 – 256.