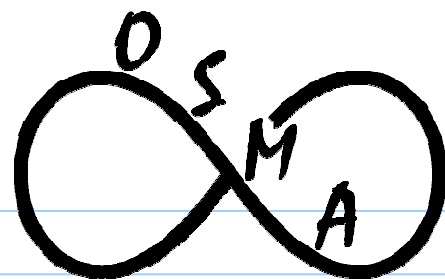




Katedra  
aplikované  
matematiky



# OBČASNÝ SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

10. 12. 2013



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Svět vědy

CZ 1.07/2.3.00/35.0018

# ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

## DEFINICE

Řetězovým zlomkem rozumíme výraz

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad \left( \stackrel{\text{ozn.}}{=} [a_0; a_1, a_2, \dots] \right)$$

kde  $a_0 \in \mathbb{R}, a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}^+$ .

Řetězový zlomek může být ukončený nebo neukončený.

## HODNOTA ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

Je-li zlomek ukončený, je vše jasné:

$$\begin{aligned} [1; 35, 6, 2] &= 1 + \frac{1}{35 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{35 + \frac{1}{\frac{13}{2}}} = 1 + \frac{1}{35 + \frac{2}{13}} = \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{457}{13}} = 1 + \frac{13}{457} = \frac{470}{457}$$

Je-li zlomek nekonečný, klademe

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$$

víme, co to je

Není přitom vůbec jisté, zda uvedená limita existuje. Tělo odskče se budeme věnovat později.

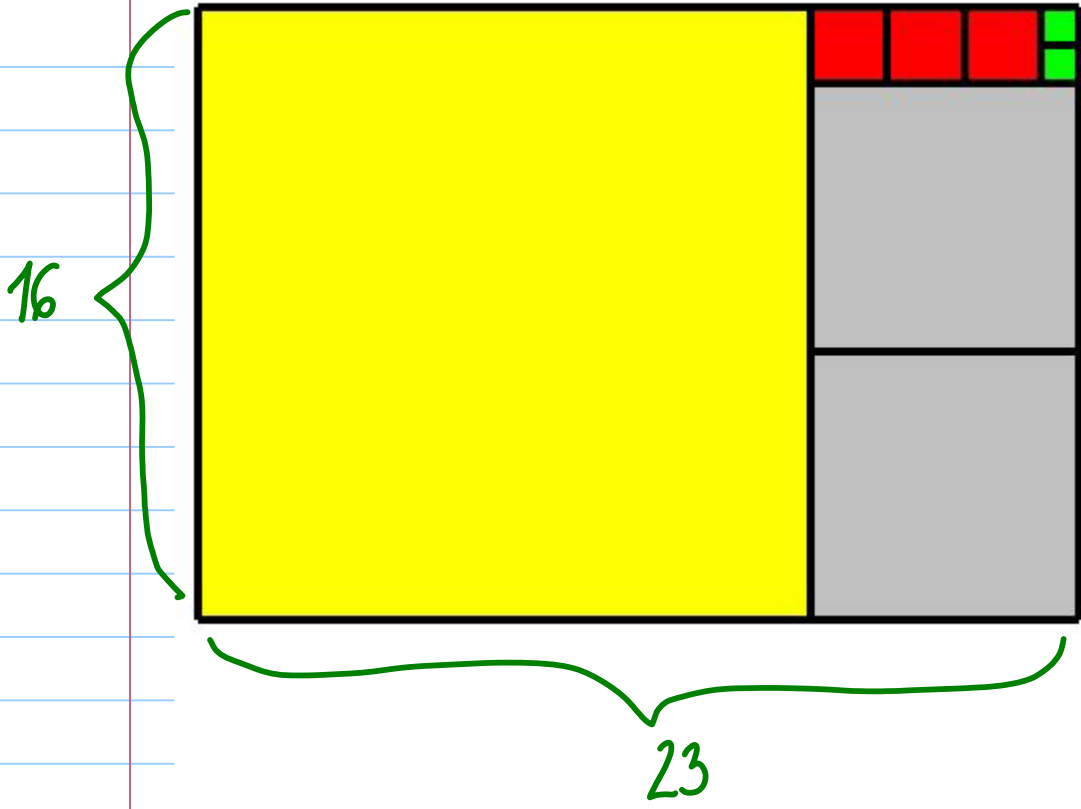
## GEOMETRICKÁ INTERPRETACE UKONČENÉHO ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

Uvažujme např. zlomek  $\frac{23}{16}$ .

Tento zlomek lze vyjádřit pomocí řetězového zlomku  $[1; 2, 3, 2]$ , tzn.

$$\frac{23}{16} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$$

[ověřte]



Čísla 1, 2, 3, 2  
 z rekurzivního  
 zlomku  
 odpovídají  
 počtu čtverců  
 (viz obrázek).

## SBLIŽENÉ ZLOMKY

Uvažujme rekurzivní zlomek  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$   
 (ukončený nebo neukončený).

Zkoumejme tyto výrazy:

[POZOR, toto  
 není celá  
 část.]

- $[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$

Položíme-li  $p_0 = a_0, q_0 = 1$ , můžeme psát

$$[a_0] = \frac{p_0}{q_0}$$

- $[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$

Položime-li  
 bude platit  $p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1,$   
 $[a_0; a_1] = \frac{p_1}{q_1}.$

$\bullet [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} =$   
 $= a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} =$   
 $= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 \cdot a_1 + 1} =$   
 $= \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0}.$

Položime-li  $p_2 = a_2 p_1 + p_0,$   
 $q_2 = a_2 q_1 + q_0,$

obdržíme  $[a_0; a_1, a_2] = \frac{p_2}{q_2}.$

⋮

Vyšše uvedená úvaha lze zobecnit.

Definujeme  $p_n$  a  $q_n$  rekurentně.

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1,$$

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

$$[n \in \mathbb{N}, n \geq 2]$$

### VĚTA

Uvažujme řadkový zlomek  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ . [ukončený nebo nekonečný]

Pro každé  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  [konečná nebo nekonečná množina]

platí

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}. \quad \otimes$$

### DŮKAZ INDUKCÍ

Pro  $k \in \{0, 1, 2\}$  tvrzení platí. [viz výše]

Předpokládejme, že vztah  $\otimes$  platí pro  $k = n$  [ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ]  
a dokážeme ho pro  $k = n + 1$ .

Průběžným výpočtem zjistíme, že platí následující.

$$[a_0; a_1, \dots, a_m, a_{m+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_{m-1}, \overbrace{a_m + \frac{1}{a_{m+1}}}^{\tilde{a}_m}]$$

indukční předpoklad  $\frac{\tilde{p}_m}{\tilde{q}_m}$  rek. vztahy  $\odot$   $\frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) \cdot p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) \cdot q_{m-1} + q_{m-2}} =$

$$= \frac{(a_m a_{m+1} + 1) p_{m-1} + a_{m+1} p_{m-2}}{(a_m a_{m+1} + 1) q_{m-1} + a_{m+1} q_{m-2}} =$$

$$= \frac{a_{m+1} \cdot \overbrace{(a_m p_{m-1} + p_{m-2})}^{p_m} + p_{m-1}}{a_{m+1} \cdot \underbrace{(a_m q_{m-1} + q_{m-2})}_{q_m} + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  TVRZENÍ  $\square$

## DEFINICE

zlomkům  $\frac{p_0}{q_0} (= [a_0])$ ,  $\frac{p_1}{q_1} (= [a_0; a_1])$ ,

$\frac{p_2}{q_2} (= [a_0; a_1, a_2])$ ,  $\dots$

řekneme sbližovací zlomky řetězového zlomku

$[a_0; a_1, a_2, \dots]$ .

# VÝPOČET SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

Pro výpočet sblížených zlomků budeme využívat rekurenční vztahy  $*$ .  
Je výhodné položit

$$p_{-1} = 1, q_{-1} = 0.$$

Pak totiž rekurenční vztahy  $*$  platí i pro  $n = 1$ .

## PŘÍKLAD

Je dán řetězový zlomek

$$1 + \frac{1}{35 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}} \quad \left( = [1; 35, 6, 2] \right)$$

[víme, že hodnota je  $\frac{470}{457}$ ]

Určete posloupnost jeho sblížených zlomků.

## ŘEŠENÍ

Použijeme následující výpočetní schéma. (PROMYSLETE SI)

		1	35	6	2
p	1	1	36	217	470
q	0	1	35	211	457

*Handwritten annotations: A purple circle around '1' in the top row. Orange arrows show the addition of 1 to the previous p and q values. Blue arrows show the multiplication of the previous p and q values by the current denominator. Green text in the table cells shows the calculations: [1+36·6] and [36+217·2] for p, and [1+35·6] and [35+211·2] for q.*

Sblížené zlomky tedy jsou  $\frac{1}{1} | \frac{36}{35} | \frac{217}{211} | \frac{470}{457}$ . □



# VLASTNOSTI SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

## VĚTA

Pro každé dva sousední sblížené zlomky platí

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

## DŮKAZ

Stačí ukázat, že platí

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

$$\begin{aligned} \underline{n=0}: \quad p_1 q_0 - p_0 q_1 &= (a_0 a_1 + 1) \cdot 1 - a_0 \cdot a_1 = \\ &= 1 = (-1)^0. \end{aligned}$$

Dále platí ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )

$$(p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2}) \stackrel{\text{rekur. vztahy}}{=} =$$

$$\begin{aligned} &= (\cancel{a_{n+2} p_{n+1}} + p_n) \cdot q_{n+1} - p_{n+1} (\cancel{a_{n+2} q_{n+1}} + q_n) = \\ &= - (p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}) \Rightarrow \underline{\text{TVRZENÍ!}} \quad \square \end{aligned}$$

# DŮSLEDEK

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

sblížené zlomky sudého řádu
sblížené zlomky lichého řádu

# DŮKAZ

Uvznemí plyne z předchozí věty a z toho, že

$$q_n q_{n+1} < q_{n+1} q_{n+2} \quad [n \in \mathbb{N} \cup \{0\}]$$

Platí totiž  $q_{n+2} = \underbrace{a_{n+2} q_{n+1}}_{> 0} + q_n > q_n$ . □

Vraťme se nyní zpět k problému hodnoty nekonečného řadového zlomku.

Víme, že

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$\frac{p_n}{q_n}$

Z předchozích úvah je jasné, že limita existuje [a je konstanta] právě když platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n q_{n+1} = +\infty$$

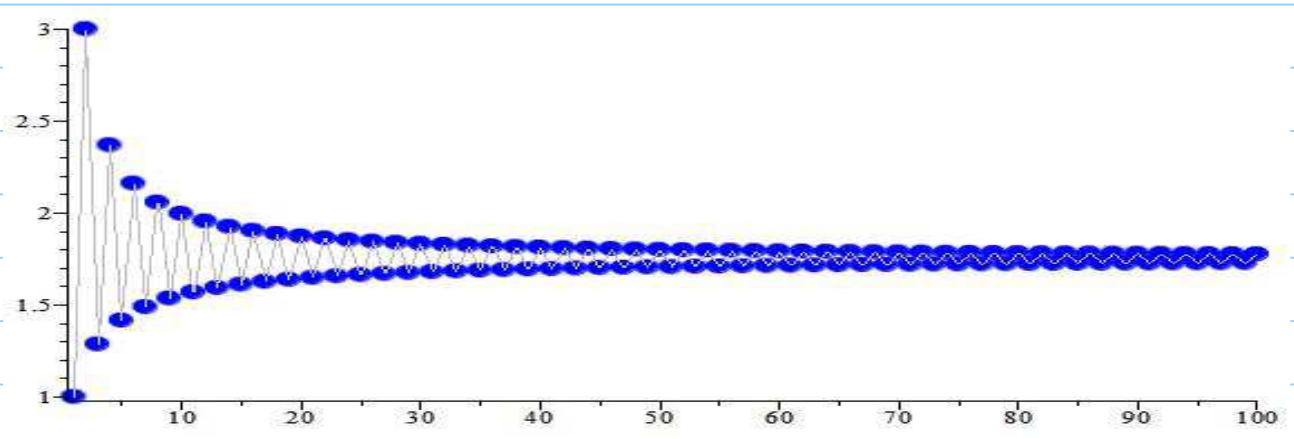
Le ukázat, že to nastane právě tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

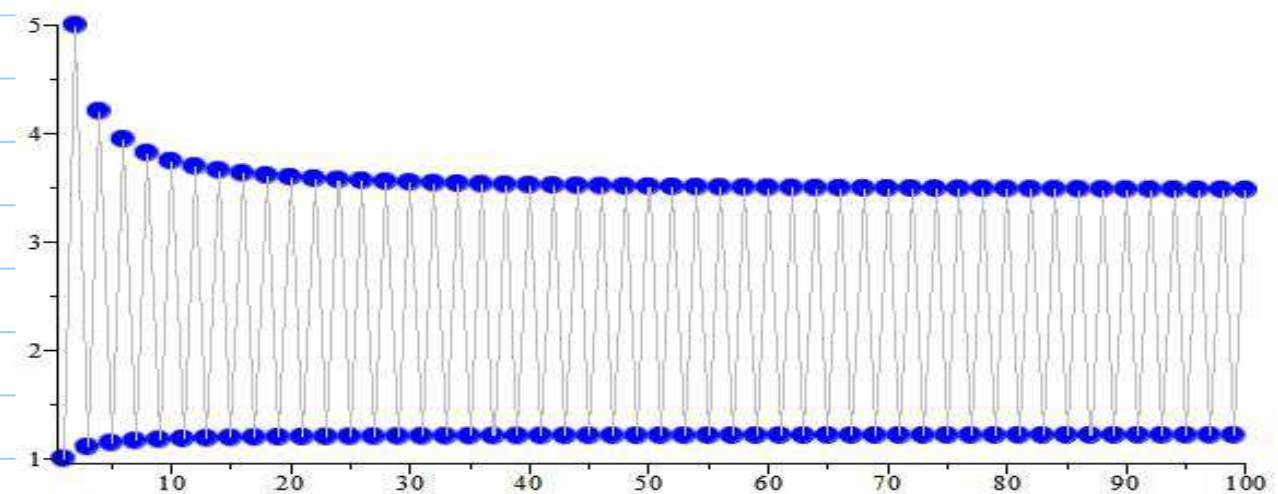
Je-li  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$  neexistuje.

OBRAZKY

Graf sbližených zlomků (konvergentního) řetězového zlomku  $[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots]$ :



Graf sbližených zlomků (divergentního) řetězového zlomku  $[0; 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots]$ :



# ŘETĚZOVÉ ZLOMKY S CELOČÍSELNÝMI PRVKY

Od tohoto okamžiku budeme uvažovat pouze řetězové zlomky s celočíselnými prvky, tzn. budeme předpokládat, že

$$a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{N}.$$

Každý (neukončený) řetězový zlomek je konvergentní, neboť  $(q_n)$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q_n q_{n+1} = +\infty$ .

Každý řetězový zlomek (s celočíselnými prvky) tedy představuje jisté reálné číslo.

## PŘÍKLAD

Určete hodnotu řetězového zlomku

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

$$([1; 2, 3, 2, 3, \dots])$$

ŘEŠENÍ

Označme  $\alpha = [2; 3, 2, 3, 2, 3, \dots]$ .

Pak  $x = [1; \alpha]$ .

$$\text{Dáleřejmě } \boxed{\alpha} = [2; 3, \alpha] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\alpha}} =$$

$$= 2 + \frac{\alpha}{3\alpha + 1} = \boxed{\frac{7\alpha + 2}{3\alpha + 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 + \alpha = 7\alpha + 2 \Rightarrow \alpha = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}. \quad [\alpha > 0]$$

$$\text{Odtud } x = [1; \alpha] = 1 + \frac{1}{\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{3}{\sqrt{15} + 3} = 1 + \frac{\sqrt{15} - 3}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{15} - 1}{2}}. \quad \square$$

Zajímavá je však opačná otázka:

Je každé reálné číslo vyjádřitelné řetězovým zlomkem?

Odpověď na tuto otázku je kladná.

Uvažujme tedy libovolné  $x \in \mathbb{R}$ .

Definujme

$$\boxed{a_0 = \lfloor x \rfloor} \quad (\in \mathbb{Z}) \quad [\text{dolní celá část}]$$

Pak  $a_0 \leq x < a_0 + 1$ .

<sup>řetěz zlomků</sup>  
 Je-li  $a_0 = x$ , pak  $x = [a_0]$ . → KONEC  
 Je-li  $a_0 < x$ , pak položíme  $\mu_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$ .

Pak ale platí  $x = [a_0; \mu_1] = a_0 + \frac{1}{\mu_1}$ .

Dále položíme  $a_1 = \lfloor \mu_1 \rfloor$ . ( $\in \mathbb{N}$ )

Je-li  $a_1 = \mu_1$ , pak  $x = [a_0; a_1]$ . → KONEC  
 V opačném případě položíme  $\mu_2 = \frac{1}{\mu_1 - a_1} > 1$ .

Pak platí  $x = [a_0; a_1, \mu_2]$ .

Dále položíme  $a_2 = \lfloor \mu_2 \rfloor$ .

Je-li  $a_2 = \mu_2$ , pak  $x = [a_0; a_1, a_2]$ . → KONEC  
 V opačném případě položíme  $\mu_3 = \frac{1}{\mu_2 - a_2} > 1$ .

Pak ale  $x = [a_0; a_1, a_2, \mu_3]$ .  
 $\vdots$

Zajímavý je tedy pouze případ, kdy algoritmus nekonečně pokračuje v nekonečné řadě kroků.

Dokážeme, že pak

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Vzhledem k výše popsané konstrukci máme, že

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_m, K_{m+1}] = \frac{\tilde{p}_{m+1}}{\tilde{q}_{m+1}} = \frac{K_{m+1} \cdot p_m + p_{m-1}}{K_{m+1} \cdot q_m + q_{m-1}} \quad [p_m, q_m \text{ jsou dány rekursivně} \odot]$$

Odkud

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| &= \left| \frac{K_{m+1} \cdot p_m + p_{m-1}}{K_{m+1} \cdot q_m + q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} \right| = \\ &= \left| \frac{\cancel{K_{m+1} p_m q_m} + p_{m-1} q_m - \cancel{K_{m+1} p_m q_m} - p_m q_{m-1}}{(K_{m+1} q_m + q_{m-1}) \cdot q_m} \right| = \\ &= \frac{|p_{m-1} q_m - p_m q_{m-1}|}{(K_{m+1} q_m + q_{m-1}) \cdot q_m} = \frac{1}{(K_{m+1} q_m + q_{m-1}) \cdot q_m} < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow [K_{m+1} > 1] \frac{1}{(q_m + q_{m-1}) \cdot q_m} \leftarrow [q_m > 0] \frac{1}{q_m^2} \end{aligned}$$

Máme tedy

$$\left| x - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{1}{q_m^2}$$

Protože  $q_m \rightarrow +\infty$ , dostáváme  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{q_m} = x$ , což jsme chtěli.  $\square$

PŘÍKLAD

Číslo  $\sqrt{7}$  vyjádřete řetězovým zlomkem.

ŘEŠENÍ

$$a_0 = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = \boxed{2}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - a_0} = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

$$a_1 = \lfloor r_1 \rfloor = \boxed{1}$$

$$r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1} = \frac{3}{\sqrt{7} - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{2}$$

$$a_2 = \lfloor r_2 \rfloor = \boxed{1}$$

$$r_3 = \frac{1}{r_2 - a_2} = \frac{2}{\sqrt{7} - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{3}$$

$$a_3 = \lfloor r_3 \rfloor = \boxed{1}$$

$$r_4 = \frac{1}{r_3 - a_3} = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = \sqrt{7} + 2$$

$$a_4 = \lfloor r_4 \rfloor = \boxed{4}$$

$$r_5 = \frac{1}{r_4 - a_4} = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

$$a_5 = a_1, a_6 = a_2, \dots$$

periodická



Pročto platí

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}}$$

□

POZNÁMKA

Je-li číslo x racionální, pak je řetězcový zlomek (křískaný myšle uvedeným algoritmem) ukončený. V případě iracionálního x je neukončený.

PŘÍKLAD ( $x = \frac{470}{457}$ )

470 : 457	=	1	zbytek 13
457 : 13	=	35	zbytek 2
13 : 2	=	6	zbytek 1
2 : 1	=	2	zbytek 0 → KONEC

$$\frac{470}{457} = 1 + \frac{1}{35 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}$$

□

## JEDNOZNAČNOST VYJÁDRĚNÍ

Dohodneme se, že u ukončených řetězových zlomků  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_m]$  ( $m \in \mathbb{N}$ )

budeme předkládat  $a_m \neq 1$ . To si můžeme dovolit, neboť (poslední prvek řet. zlomku)

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 1] = [a_0; a_1, \dots, \underbrace{a_{m-1} + 1}_{\neq 1}].$$

Když dodržíme výše uvedenou podmínku, lze každé reálné číslo vyjádřit řetězovým zlomkem právě jedním způsobem. (PROMYSLETE SI)

## PERIODICKÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Periodickým řetězovým zlomkem rozumíme řetězový zlomek tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_m}_{\text{perioda}}, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_m, \dots}_{\text{perioda}}] =$$

$$\text{ozn.} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m}].$$

## PŘÍKLAD

Víme, že

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]. \quad (\text{periodický řetězový zlomek})$$

# PROBLÉM

jak vypadá množina

$$P = \{ x \in \mathbb{R} : \text{řetězový zlomek čísla } x \text{ je periodický} \} ?$$

Např. již víme, že  $\sqrt{7} \in P$ .

# VĚTA

$$P = \left\{ \frac{a + \sqrt{b}}{c} : \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, \\ b \in \mathbb{N}, \sqrt{b} \notin \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

# DŮKAZ - náznak

Jedna inkluze je snadná.  $[ \subseteq ]$   
Podívejte se na příklad, ve kterém jsme hledali hodnotu periodického řetězového zlomku

$$[1; 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots] = [1; \overline{2, 3}].$$

V jistý okamžik jsme se dostali ke kvadratické rovnici, jejíž řešení je tvaru  $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$ .

Tyto rovnice lze zobecnit na libovolný periodický řetězový zlomek.

Opacná inkluze  $[ \supseteq ]$  je složitější.

# NĚKTERÉ APLIKACE ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ

- Hledání řešení rovnice

$$ax + by = c \quad [a, b, c \in \mathbb{Z}]$$

v oboru celých čísel.

**Pr:**  $470x + 457y = 1.$  [víme, že  $\frac{470}{457} = [1; 35, 6, 2]$ ]

	1	35	6	2
1	1	36	217	470
0	1	35	211	457

Platí:  $470 \cdot 211 - 457 \cdot 217 = 1.$   
[viz vlastnosti obléžených zlomků]

- Nalezení „dobrých“ racionálních aproximací reálného čísla.

**Pr:**  $\sqrt{2} = [1; 2],$  (lze počítat)

$$[1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}.$$

$$\left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right| < \frac{1}{12^2}.$$

nerovnost vyplývá z  
teorie

↑ velmi dobrá  
aproximace čísla  $\sqrt{2}$

# ZAJÍMAVOST NA ZÁVĚR

Lze ukázat, že platí

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]$$

## LITERATURA

- [1] **A. J. CHINČIN** - Řetězové zlomky, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.
- [2] **PAVEL VÍT** - Řetězové zlomky, Mladá fronta, Praha, 1982.