FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ

Def. $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $\quad (a,b \in \mathbb{R};\ a<b)$

$D: \ a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ... dělení $\langle a,b\rangle$

$$v_f(D) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \in \langle 0,\infty)$$

$V(f;a,b) := \sup_D \{v_f(D)\}$ ... variace funkce f na $\langle a,b\rangle$

$$\left(0 \le |f(b)-f(a)| \le V(f;a,b) \le \infty \right)$$

Def. $BV(a,b) := \{ f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} : V(f;a,b) < \infty \}$

... množina funkcí s konečnou variací (na $\langle a,b\rangle$).

Pozorování $\quad V(f;a,b) = 0 \iff f$ je konstantní na $\langle a,b\rangle$

Příklady

a) $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$ (Dirichletova funkce)

$\forall \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R} : \quad V(f;a,b) = \infty$

Dk. volme $\forall n \in \mathbb{N}$
$D_n: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tak,
aby $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ bylo jedno z čísel ~~racion~~ x_{k-1}, x_k racionální a jedno iracionální.

Pak $v_f(D_n) \ge n-1$, a proto $V(f;a,b) = \infty$

cbd.

b) $$\boxed{f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0. \end{cases} \qquad \text{Pak } V(f;0,1) = \infty.}$$

spojitá v $\mathbb{R}$

Dk. Volme $\forall n \in \mathbb{N}$:

D_n: $0 < \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} < \dots < \sqrt{\frac{1}{2\pi}} < \sqrt{\frac{1}{\pi}} < 1$

Pak

$$v_f(D_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\cos[(k+1)\pi]}{(k+1)\pi} - \frac{\cos(k\pi)}{k\pi} \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi} - \frac{(-1)^k}{k\pi} \right| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \longrightarrow \infty$$

cbd.

Pozn. Tedy – spojitost funkce na $\langle a,b\rangle$ nezaručuje konečnost variace.
Zajímavě však platí – je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$ a její graf – tj. křivka $k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a,b\rangle \wedge y = f(x)\}$ – má konečnou délku, pak $f \in BV(a,b)$.

Pozorování:

(i) $f \in BV(a,b) \Rightarrow f$ je omezená na $\langle a,b\rangle$

(ii) f je monotónní na $\langle a,b\rangle \Rightarrow f \in BV(a,b)$,
$V(f;a,b) = |f(b) - f(a)|$

(**Dk.** $v_f(D) = \sum |\underbrace{f(x_k) - f(x_{k-1})}_{\text{vždy stejné znaménko}}| = |\sum f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f(b) - f(a)|$)

cbd.

(iii) $$\left.\begin{aligned} & a < c < b \\ & f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(f;a,b) = V(f;a,c) + V(f;c,b)$$

Odtud:

- $f \in BV(a,b) \iff [f \in BV(a,c) \wedge f \in BV(c,b)]$
- $a \le c < d \le b \implies V(f;c,d) \le V(f;a,b)$
- každá po částech monotónní funkce má konečnou variaci

(iv) $\left.\begin{array}{l} f,g \in BV(a,b) \\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies V(\alpha f + \beta g; a,b) \le |\alpha| V(f;a,b) + |\beta| V(g;a,b)$

Def. Buď $f \in BV(a,b)$

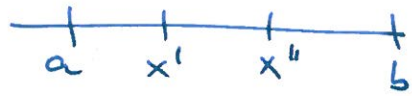
$$V_f(x) := \begin{cases} 0, & x = a, \\ V(f;a,x), & \text{je-li } x \in (a,b\rangle. \end{cases}$$

... variace s proměnnou horní mezí

Tvrz. Nechť $f \in BV(a,b)$. Pak V_f je neklesající v $\langle a,b\rangle$

Navíc:

- V_f je konstantní v $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$ právě tehdy, je-li f konstantní v $\langle c,d\rangle$.
- Není-li f konstantní v žádném intervalu obsaženém v $\langle a,b\rangle$, je funkce V_f rostoucí v $\langle a,b\rangle$

(

$V_f(x'') - V_f(x') = V(f; x', x'') \ge 0$)

Věta Nechť $f \in BV(a,b)$, $x_0 \in (a,b\rangle$.

Pak

$$\boxed{V_f \text{ je spoj. v } x_0 \text{ zleva} \iff f \text{ je spoj. v } x_0 \text{ zleva}}$$

(analogicky pro spoj. zprava)

Dk. „$\Longrightarrow$" $\quad a \le x < x_0 \le b$

$$|f(x)-f(x_0)| \le V(f; x, x_0) = V_f(x_0) - V_f(x) \to 0 \text{ pro } x \to x_0-$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)-f(x_0) \to 0 \text{ pro } x \to x_0-$$

cbd.

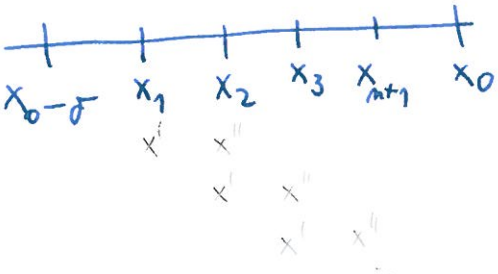
„$\Longleftarrow$" Předpokládejme sporem, že f je spoj. zleva v x_0 a že

$$\boxed{V_f(x_0) - \underbrace{V_f(x_0-)}_{\substack{\text{existuje} \\ \text{(z monot.)}}} \overset{\text{ozn.}}{=} 3\Delta > 0}$$

Odtud plyne:

$$(*) \quad \boxed{\exists \delta > 0 \ \forall x' \in (x_0-\delta, x_0) \ \exists x'' \in (x', x_0) : V(f; x', x'') > \Delta}$$

a proto $\quad V(f; x_1, x_0) \ge V(f; x_1, x_{n+1}) =$



$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{V(f; x_k, x_{k+1})}_{> \Delta} > n \cdot \Delta \to \infty$$

$$\Downarrow$$

$$V(f; a, b) \ge V(f; x_1, x_0) = \infty$$

SPOR.

Zbývá dokázat tvrzení (*)

f spoj. v x_0 zleva $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0): \ |f(x) - f(x_0)| < \Delta$

Buď $x' \in (x_0 - \delta, x_0)$ dáno (chceme určit x'' ...)

$$V_f(x') \leq V_f(x_0-) \underset{3\Delta}{<} V_f(x_0) \Rightarrow \underbrace{V_f(x_0) - V_f(x')}_{= V(f; x', x_0)} \geq 3\Delta \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists D: \quad x' = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_q = x_0$ taký, že

$$2\Delta < v_f(D) = \sum_{k=1}^{q} |f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})| = \underbrace{\sum_{k=1}^{q-1} |\cdots|}_{\leq V(f; x', \xi_{q-1})} + \underbrace{|f(x_0) - f(\xi_{q-1})|}_{< \Delta}.$$

Volme $x'' = \xi_{q-1}$

cbd

CBD.

Věta

$$\boxed{f \in BV(a,b) \Rightarrow f \text{ je rozdílem dvou neklesajících funkcí}}$$

Dodatek.

$$\left.\begin{array}{l} f \in C(\langle a, b \rangle) \\ f \in BV(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ je rozdílem dvou spojitých neklesajících funkcí}$$

Dk. $f = V_f - (V_f - f)$

už víme, že je neklesající

$a \leq x' < x'' \leq b$

$|f(x'') - f(x')| \leq V(f; x', x'')$

$\Downarrow$

$V(f; x', x'') = V_f(x'') - V_f(x') \geq f(x'') - f(x')$

$\Downarrow$

$V_f(x'') - f(x'') \geq V_f(x') - f(x')$

CBD.

(Dk. dodatku - viz předchozí věta)

Věta. Nechť f je monotónní v $\langle a,b\rangle$.

Pak
- $f'(x)$ existuje s.v. v $\langle a,b\rangle$
- $\forall x \in \langle a,b) \ \exists f(x+) \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in (a,b\rangle \ \exists f(x-) \in \mathbb{R}$
- $\exists N$... spočetná $\forall x \in (a,b)\setminus N$: f je spojitá v x (tzn. $f(x+)=f(x-)$)

Věta Nechť f je neklesající v $\langle a,b\rangle$.

Pak $$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b)-f(a).}$$

↳ Lebesgueův integrál

(Odtud $f' \in \mathcal{L}^1(a,b)$)

Důsledek. Buď $f \in BV(a,b)$. Pak f' existuje s.v. v (a,b) a navíc $f' \in \mathcal{L}^1(a,b)$

Příklad Cantorova stupňovitá funkce

$$\int_a^b f'(x)\,dx = 0 < f(1)-f(0) = 1$$

Dk. f' existuje s.v., $f' \geq 0$ ($\Leftarrow$ monotonie)

def. $f(x) := f(b)$ v (b,∞)

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} \quad \text{s.v.}$$

f je měřitelná (monotónní je limitou spojitých)

$\Downarrow$

f' je měřitelná

$\Downarrow$

$\int_a^b f'\,dx$ existuje, ≥ 0

$$\int_a^b \underbrace{n\left(f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)\right)}_{=:\, f_n(x)} dx = n\int_a^b f(x+\tfrac{1}{n})\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$y = x+\tfrac{1}{n}$$

$$= n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(y)\,dy - n\int_a^b f(x)\,dx = n\Big[\underbrace{\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}_{=f(b)} - \underbrace{\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx}_{\geq f(a)}\Big] \leq$$

$\leq f(b)-f(a)$; takže $\int_a^b f_n(x) \leq f(b)-f(a)$.

Fatouovo lemma:

$$\int_a^b \liminf f_n \leq \liminf \int_a^b f_n$$

$$\int_a^b \liminf f_n = \int_a^b \lim f_n = \int_a^b f'\,dx, \qquad \liminf \int_a^b f_n \leq f(b)-f(a)$$

Cbd.

Věta $\boxed{f\in AC(\langle a,b\rangle) \Rightarrow f \in BV(a,b)}$

Dk. $f\in AC(\langle a,b\rangle)$, tzn.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \left.\begin{array}{l} a\leq a_1<b_1\leq a_2<b_2\leq\ldots\leq a_n<b_n\leq b \\ \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

Buď $\varepsilon = 1 \leadsto \delta>0$ ...

Zvolme $m\in\mathbb{N}$ takové, aby $\frac{b-a}{m}<\delta$ a uvažujme ekvidistantní dělení o normou $\frac{b-a}{m}$.

Pak $V(f;a,b) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{V(f;x_{k-1},x_k)}_{<1} < \sum_{k=1}^{m} 1 = m$

Cbd.

Věta $f \in AC(\langle a,b\rangle)$ právě tehdy, existuje-li funkce $g \in \mathcal{L}^1(a,b)$ taková, že

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt}.$$

Dodatek. Navíc pak platí: $f'(x) = g(x)$ pro s. v. $x \in \langle a,b\rangle$

$$\left(f \in AC(\langle a,b\rangle) \ \dots \ \boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt} \right)$$

Příklad Cantorova schodovitá funkce

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = 0 \ , \quad f(x) \neq f(0) + \int_a^x f'(t)\,dt = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f \notin AC(\langle 0,1\rangle)$$

Pozn.

$$W^{1,2}(a,b) = H^1(a,b) = \{ f \in AC(\langle a,b\rangle) : f' \in L^2(a,b) \}$$

Shrnutí!

f má <u>omezenou derivaci</u> v $\langle a,b\rangle$

$$\Downarrow$$

f je <u>lipschitzovsky</u> spoj. v $\langle a,b\rangle$

$$\Downarrow$$

<u>$f \in AC(\langle a,b\rangle)$</u>

$\swarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$

<u>$f \in BV(a,b)$</u> $\qquad\qquad$ f je <u>stejnoměrně spojitá</u> v $\langle a,b\rangle$

(žádnou z implikací nelze obrátit.)

Několik poznámek k Fourierovým řadám

Def. $P_{2\pi} := \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : f \text{ má periodu } 2\pi \}$

$$f \in P_{2\pi} \approx \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))},$$

kde $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \in \mathbb{R}$

... Fourierova řada f

Pozn.

- $\exists f \in P_{2\pi}$: Fourierova řada f diverguje v každém $x \in \mathbb{R}$
- $f \in P_{2\pi} \cap L^2(0, 2\pi) \Rightarrow$ F. řada f konverguje s.v. v $\mathbb{R}$
  (speciálně $f \in P_{2\pi} \cap C(\mathbb{R}) \Rightarrow$ —"—)
- $\exists f \in P_{2\pi} \cap C(\mathbb{R})$: F. řada f diverguje v každém bodě nespočetné hustí podmnožiny $\mathbb{R}$
- $f \in P_{2\pi} \cap L^2(0, 2\pi)$: $\underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}_{=: A_n(x)} \to f(x)$ v $L^2(0, 2\pi)$

  (tzn. $\|A_n - f\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0$)

Věta (Dirichlet–Jordanovo kritérium)

Nechť $f \in P_{2\pi} \cap BV(0,2\pi)$.

Pak

a) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad s_n(x) \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$,

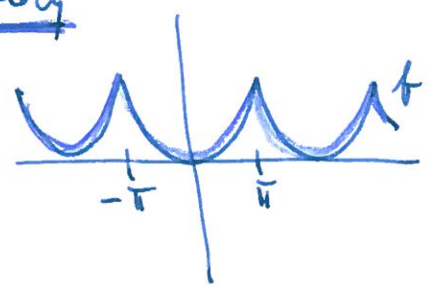
tzn. $\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}}$;

b) je-li f navíc spojitá v $(a,b) \subset \mathbb{R}$,

je $\boxed{s_n \overset{loc.}{\rightrightarrows} f \text{ v } (a,b).}$

Příklady

a)



$$\left.\begin{array}{l} \boxed{f \in P_{2\pi}} \\ f(x) = x^2 \text{ v } \langle -\pi, \pi \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \in BV(0,2\pi)}$$

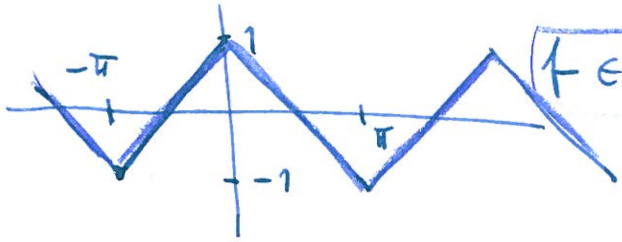
$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\cos(nx)}{n^2} = x^2 \quad \forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$\Downarrow x = \pi$$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

b)



$\boxed{f \in P_{2\pi} \cap BV(0,2\pi)}$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \overset{x=0}{\Longrightarrow} 1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

... součet lichých členů

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{=:S}$$

... součet sudých členů

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Literatura

- přednášky prof. J. Černého (1984 – 1986)
- přednášky prof. L. Picka
  (WWW.KARLIN.MFF.CUNI.CZ/~PICK/
- V. Jarník – Integrální počet II., Diferenciální p. II
  (DML.CZ)
- J. Bouchala – O různých typech spojitosti
  (AM.VSB.CZ/OSMA)

Domácí úkol (nejen pro Petra Todošrčila)

Buď
$$\boxed{f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \\ & m, n \dots \text{nesoudělná} \\ & m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{(Riemannova funkce)}}$$

Rozhodněte, zda
$$f \in BV(0,1)\ ?$$
$$f^2 \in BV(0,1)\ ?$$

(případně: určete všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro něž $f^\alpha \in BV(0,1)$.)