NENÍ SPOJITOST JAKO SPOJITOST

JIŘÍ BOUCHALA

21.4.2015

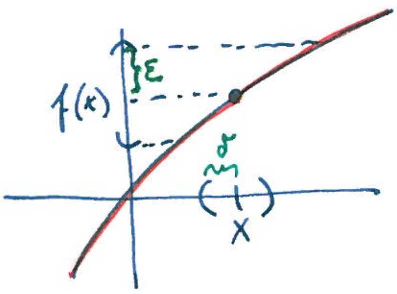
Def. $\underline{f \text{ je spojitá v } x \in \mathbb{R}} \equiv \lim_{y \to x} f(y) = f(x)$

$$\Updownarrow$$

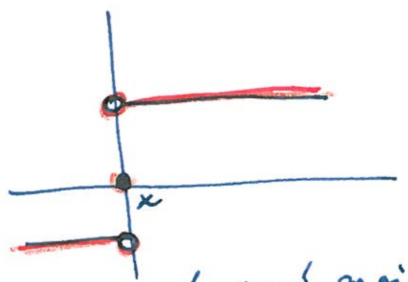
$$\forall (y_n) \subset \mathbb{R} : \left[y_n \to x \implies f(y_n) \to f(x) \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} : \left[|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right]}$$



f spoj. v x



f není spoj. v x

($\underline{f \text{ spojitá zprava v } x} \equiv \lim_{y \to x+} f(y) = f(x)$,

$\underline{f \text{ spojitá zleva v } x} \equiv \lim_{y \to x-} f(y) = f(x)$)

Př.
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ kde } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ m, n \ldots \text{nesoudělná} \end{cases}$$

(Riemannova funkce)

Pak

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: f je spojitá v x

$\forall x \in \mathbb{Q}$: f není spojitá v x

$$\left(\implies \forall a, b \in \mathbb{R} : \ (R)\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{=\,0} \in \mathbb{R} \right)$$

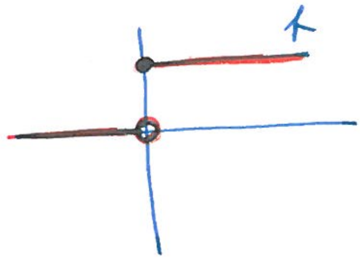
Def. Buď $I \subset \mathbb{R}$ interval

f je spoj. v I $\equiv \left[\forall x \in I\ \forall (y_n) \subset I:\ y_n \to x \Rightarrow f(y_n) \to f(x)\right]$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I:\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

Př. $f(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$



f je spoj. v $\langle 0, \infty)$, f je spojitá v $(-\infty, 0)$

f není spoj. v $(-\infty, 0\rangle$

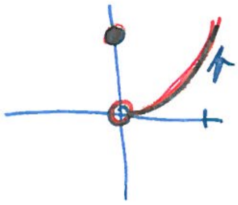
Věta $\boxed{f \text{ monotónní na } (a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b):\ \lim_{y \to x+} f(y) \in \mathbb{R},\ \lim_{y \to x-} f(y) \in \mathbb{R}}$

Důsledek. Množina bodů nespojitosti f na (a,b) je nejvýše spočetná

Dk. cvičení

Věta $\boxed{\text{Je-li } f \text{ konvexní na } (a,b), \text{ je } f \text{ spojitá na } (a,b).}$

Př.



f je konvexní na $\langle 0, \infty)$,

ale f není spojitá na $\langle 0, \infty)$

(f je spojitá na $(0, \infty)$)

Kde je dobrá spojitost:

- Weierstrassova věta
- Darbouxova vlastnost

...

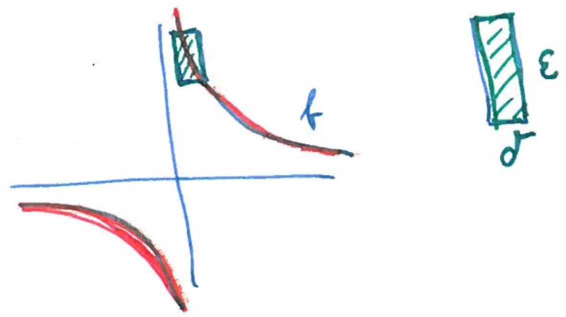
Def.

f je stejnoměrně spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\equiv$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I : \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

Př. $f(x) := \frac{1}{x}$



f je spojitá v $(0,1)$

f není stejnoměrně spojitá v $(0,1)$

Zřejmě platí:

f je stejnoměrně spojitá v I $\Longrightarrow$ f je spojitá v I

Věta. f spoj. v $\langle a,b \rangle$ $(a,b \in \mathbb{R};\ a<b)$ $\Longrightarrow$ f je stejnoměrně spojitá v $\langle a,b \rangle$

Dk. Předpokládejme opak, tj.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in \langle a,b \rangle : \ |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$$\Big\Downarrow \ \delta = \tfrac{1}{n}$$

$$(*) \quad \boxed{\exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in \langle a,b \rangle : \ |x_n - y_n| < \tfrac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon}$$

Bol. $(x_n) \subset \langle a,b \rangle \Longrightarrow \left[\exists x \in \langle a,b \rangle : \ x_{n_k} \to x \right]$ $(**)$

$$|y_{n_k} - x| \leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{\leq\ \frac{1}{n_k} \to 0} + \underbrace{|x_{n_k} - x|}_{\to 0} \to 0 \Longrightarrow y_{n_k} \to x \quad (***)$$

$$\left.\begin{matrix}(*)\\(**)\\(***)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$|f(x) - f(x)| = 0$$, a to je spor.

Cbd.

Pozn. f spoj. v $\langle a,b\rangle \Rightarrow f$ stejn. spoj. v $\langle a,b\rangle$

$$\Downarrow$$

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Věta Buď $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

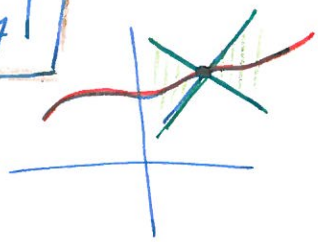
Pak f je stejnoměrně spojitá v (a,b) právě tehdy, existuje-li spojité rozšíření f na $\langle a,b\rangle$

Dk. cvičení

Def. f je lipschitzovsky spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\exists L>0\ \forall x,y \in I:\quad |f(x)-f(y)| \leq L\cdot|x-y|}$$



Věta

$$\exists M>0\ \forall x \in I:\ |f'(x)| \leq M$$

$$\Downarrow$$

f je lipschitzovsky spojitá v I $(L=M)$

Dk. $\forall x,y \in I$:

$$|f(x)-f(y)| \underset{\text{Lagrange}}{=} |f'(\xi)\cdot(x-y)| \leq M\cdot|x-y|$$

Cbd.

Věta.

$$f \text{ lipschitzovsky spoj. v } I \implies f' \text{ existuje s. v. v } I \quad (a\ |f'| \le L)$$

Def. f je <u>absolutně spojitá v intervalu</u> $I \subset \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \left[\begin{array}{c} I \ni a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_n < b_n \in I \\ \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \\ \Downarrow \\ \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \end{array} \right]$$

Věta.

$$\begin{array}{c} f \text{ je a. s. na intervalu } I \\ \Downarrow \\ f \text{ je stejnoměrně spoj. na } I \end{array}$$

Dk. zřejmý (volme $n=1$)

Věta.

$$\begin{array}{c} f \text{ je lipschitzovsky spojitá na } I \\ \Downarrow \\ f \text{ je a. s. na } I \end{array}$$

Dk. stačí si uvědomit, že

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \le \sum_{k=1}^{n} L \cdot |b_k - a_k| < L \cdot \delta,$$

a pro dané $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta \le \frac{\varepsilon}{L} \dots$

cbd

Shrnutí a plán:

f má <u>omezenou derivaci</u> v I

$\Downarrow$ $\qquad$ $\not\Uparrow$ $\quad$ $f(x) := |x|$, $I = (-1,1)$

f je <u>lipschitzovsky spoj.</u> v I

$\Downarrow$ $\qquad$ $\not\Uparrow$ $\quad$ $f(x) := \sqrt{x}$, $I = (0,1)$

f je <u>absolutně spoj.</u> v I

$\Downarrow$ $\qquad$ $\not\Uparrow$ $\quad$ f … Cantorova st. fun., $I = \langle 0,1 \rangle$

f je <u>stejnoměrně spoj.</u> v I

$I = \langle a,b \rangle$ $\Uparrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\qquad$ $\not\Uparrow$ $\quad$ $f(x) := \frac{1}{x}$, $I = (0,1)$

f je <u>spojitá</u> v I

Př. Funkce $f(x) := \sqrt{x}$ je na $(0,1)$ absolutně spojitá, ale ne lipschitzovsky spojitá.

Dk. f má na $(0,1)$ neomezenou derivaci, proto není lipsch. spojitá

Ukažme, že f je a.s. na $(0,1)$.

Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Zvolme $\delta^* > 0$ takové, aby

$$\sqrt{\delta^*} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

f má na $\langle \delta^*, 1\rangle$ omezenou derivaci, je tedy na $\langle \delta^*, 1\rangle$ lipschitzovská, a proto i absolutně spojitá.

Odtud plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že

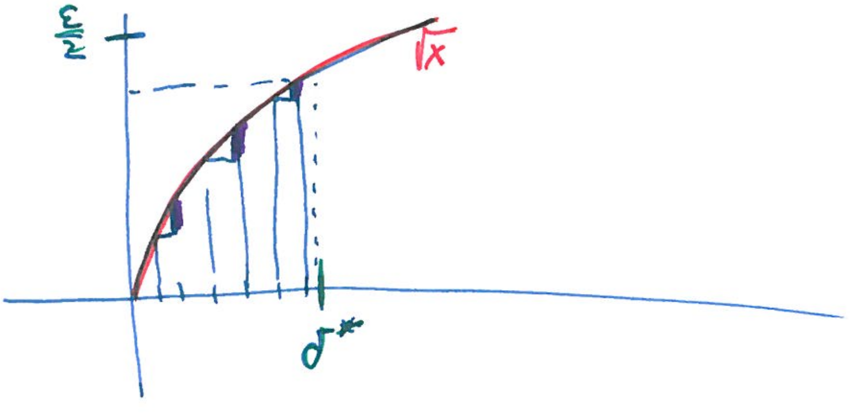
$$\delta^* \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq 1$$

$$\sum (b_k - a_k) < \delta \qquad (**)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

... k dokončení důkazu stačí zkombinovat $(*)$ a $(**)$



cbd.

Věta Funkce f je a.s. na $\langle a,b\rangle$ právě tehdy, existuje-li funkce $g \in \mathcal{L}^1(a,b)$ taková, že

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

Důsledek. Navíc pak platí: $f'(x) = g(x)$ pro s.v. $x \in (a,b)$

(tzn. $\boxed{f \text{ je a.s. na } \langle a,b\rangle \;\ldots\; f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt}$)

Lebesgueův integrál

Věta

$$W^{1,2}(a,b) = H^1(a,b) = \{ f \in L^2(a,b) : f' \in L^2(a,b) \} =$$

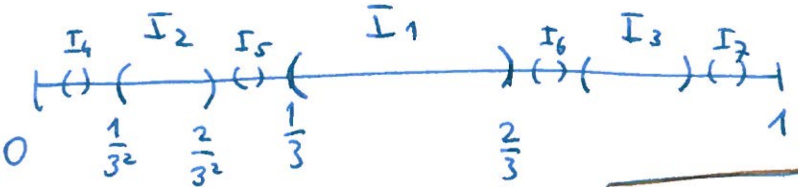
derivace ve smyslu distribucí

$$= \{ f \in AC(\langle a,b\rangle) : f' \in L^2(a,b) \}$$

množina všech a.s. funkcí na $\langle a,b\rangle$

klasická derivace

Př. Cantorovo diskontinuum a Cantorova stupňovitá funkce



Cantorovo diskontinuum $\boxed{D = \langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}$

... nespočetné

... řídká

... uzavřená

... $\lambda(D) = 0$

$$x \in D \iff x \overset{\text{lze}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}, \quad i_n \in \{0,2\}$$

$$\| $$

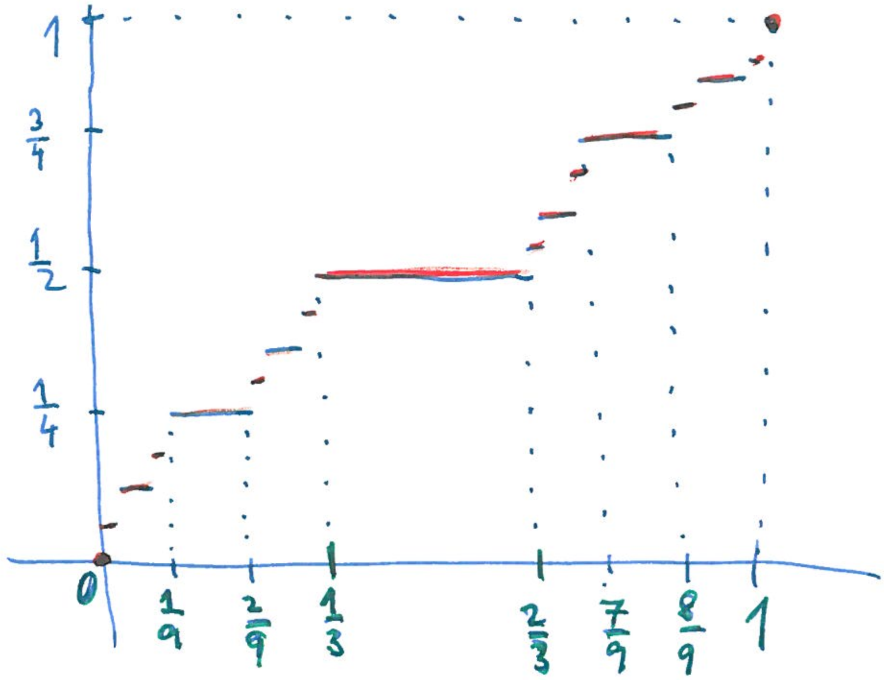
$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n}, \quad j_n \in \{0,1\}$$

Cantorova stupňovitá funkce S

$$x = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} \in D \quad \ldots\ldots \quad \boxed{S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{2^n}}$$

$$x = 2 \cdot \underbrace{0{,}j_1 j_2 j_3 \ldots}_{\text{triadický}} \quad \ldots \quad S(x) = \underbrace{0{,}j_1 j_2 j_3 \ldots}_{\text{dyadický}}$$

dodefinujeme S na $\langle 0,1\rangle \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ tak, aby S byla konstantní na každém $\overline{I}_n$.



$S : \langle 0,1 \rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,1 \rangle$

... spojitá (a proto i stejnoměrně spojitá !!) na $\langle 0,1 \rangle$

... neklesající na $\langle 0,1 \rangle$

... $S'(x) = 0$ s. v. v $(0,1)$

$$\Downarrow$$

$$S(x) \neq S(0) + \int_0^x S'(t)\,dt = 0,$$

a proto S není a. s. (a tedy ani lipschitzovská) na $\langle 0,1 \rangle$

A hezký příklad na závěr

Definujme $\varphi : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{t} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} = 2 \cdot \left(\frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3} + \dots \right) \boxed{\in D} \qquad (j_i \in \{0,1\})$$

$$\boxed{\varphi(t) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{2n-1}}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{2n}}{2^n} \right)} = \left(\frac{j_1}{2} + \frac{j_3}{2^2} + \frac{j_5}{2^3} + \dots, \frac{j_2}{2} + \frac{j_4}{2^2} + \frac{j_6}{2^3} + \dots \right)$$

$$\boxed{t \in I_k = (\alpha, \beta)}$$

$$\boxed{\varphi(t) := \frac{\beta - t}{\beta - \alpha} \varphi(\alpha) + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \varphi(\beta)}$$

Pak
- $\varphi : \langle 0,1\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$
- φ je spojité na $\langle 0,1\rangle$
- $\varphi(D) = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

A hezká věta na závěr:

Věta. Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, je-li spojitým obrazem Cantorova diskontinua

Literatura.
- V. Jarník – Diferenciální počet I, II (DML.cz)
- P.S. Aleksandrov – Úvod do obecné teorie množin a funkcí