

Matematika malého

Pavel Ludvík

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TUO



15. prosince 2015
Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Důkazy existence

Důkazy existence

Důkaz myšlenou konstrukcí

Je metodou dokazování existence matematického objektu X s určitými vlastnostmi, při níž se tento objekt přímo zkonstruuje. Tento druh důkazu se také nazývá *důkaz uvedením příkladu*.

Důkazy existence

Důkaz myšlenou konstrukcí

Je metodou dokazování existence matematického objektu X s určitými vlastnostmi, při níž se tento objekt přímo zkonstruuje. Tento druh důkazu se také nazývá *důkaz uvedením příkladu*.

Nekonstruktivní (existenční) důkaz

Je metodou dokazování existence matematického objektu X s určitými vlastnostmi, která sice prokáže existenci takového X , ale nelze z ní žádným způsobem získat ani jediný příklad objektu, který by za X mohl být zvolen.

Důkaz myšlenkovou konstrukcí

Příklad

Existuje funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která nemá v jednom bodě derivaci.

Důkaz myšlenkovou konstrukcí

Příklad

Existuje funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která nemá v jednom bodě derivaci.

Definujeme funkci f jako

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}.$$

Důkaz myšlenkovou konstrukcí

Příklad

Existuje funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která nemá v jednom bodě derivaci.

Definujeme funkci f jako

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Důkaz myšlenkovou konstrukcí

Příklad

Existuje funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která nemá v jednom bodě derivaci.

Definujeme funkci f jako

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0 \end{cases}.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \quad \text{neexistuje!}$$

Funkce f je tedy spojitá na $\mathbb{R}$ a v bodě 0 nemá derivaci.

Nekonstruktivní (existenční) důkaz

Příklad

Existuje nekonečně mnoho prvočísel (čísel dělitelných pouze sebou samými a číslem 1).

Nekonstruktivní (existenční) důkaz

Příklad

Existuje nekonečně mnoho prvočísel (čísel dělitelných pouze sebou samými a číslem 1).

- Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že prvočísla tvoří konečnou množinu $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$.

Nekonstruktivní (existenční) důkaz

Příklad

Existuje nekonečně mnoho prvočísel (čísel dělitelných pouze sebou samými a číslem 1).

- Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že prvočísla tvoří konečnou množinu $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$.
- Sestrojíme číslo $C = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{M-1} \cdot p_M + 1$, které není dělitelné žádným prvočíslem.

Nekonstruktivní (existenční) důkaz

Příklad

Existuje nekonečně mnoho prvočísel (čísel dělitelných pouze sebou samými a číslem 1).

- Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že prvočísla tvoří konečnou množinu $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$.
- Sestrojíme číslo $C = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{M-1} \cdot p_M + 1$, které není dělitelné žádným prvočíslem.
- Číslo C není prvočíslem (protože je větší než každé prvočíslo), proto je dělitelné číslem $1 < C_1 < C$. Číslo C_1 nemůže být prvočíslo (protože C_1 není dělitelné žádným prvočíslem), takže je opět dělitelné číslem $1 < C_2 < C_1$. Číslo C_2 nemůže být prvočíslem, proto je dělitelné číslem $1 < C_3 < C_2$. Tímto způsobem vytvoříme klesající posloupnost přirozených čísel (C_n) , což není možné. Dostáváme spor.

Hlavní otázky dne

- Jak poznáme, že je množina malá a velká?

- Jak poznáme, že je množina malá a velká?
- Je možné takové rozlišení nějak využít?

Kdo je to?



Georg Cantor



Mohutnost množin

- **Mohutnost** množiny A je stejná jako **mohutnost** množiny C (značíme $|A| = |B|$), pokud existuje bijekce (tj. prostá surjekce) mezi A a B .

Mohutnost množin

- **Mohutnost** množiny A je stejná jako **mohutnost** množiny C (značíme $|A| = |B|$), pokud existuje bijekce (tj. prostá surjekce) mezi A a B .
- Nekonečná množina A je **spočetná**, pokud má stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. To znamená, že se její prvky dají zapsat do posloupnosti $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Mohutnost množin

- **Mohutnost** množiny A je stejná jako **mohutnost** množiny B (značíme $|A| = |B|$), pokud existuje bijekce (tj. prostá surjekce) mezi A a B .
- Nekonečná množina A je **spočetná**, pokud má stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. To znamená, že se její prvky dají zapsat do posloupnosti $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.
- Mohutnost množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ se nazývá **kontinuum**.

Příklady spočetných množin

- Množina celých čísel $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ je spočetná.

Příklady spočetných množin

- Množina celých čísel $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ je spočetná.
- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Pro každé přirozené číslo k totiž existuje jen konečný počet racionálních čísel $\frac{p}{q}$ (přičemž $q \in \mathbb{Z}^+$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná) splňujících $|p| + q = k$. Vypíšeme nejprve ta, pro něž $k = 1$, pak ta, pro něž $k = 2$ a tak dále:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \right\}$$

Příklady spočetných množin

- Množina celých čísel $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ je spočetná.
- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Pro každé přirozené číslo k totiž existuje jen konečný počet racionálních čísel $\frac{p}{q}$ (přičemž $q \in \mathbb{Z}^+$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná) splňujících $|p| + q = k$. Vypíšeme nejprve ta, pro něž $k = 1$, pak ta, pro něž $k = 2$ a tak dále:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \right\}$$

- Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je opět spočetná množina.

Příklady spočetných množin



A grid of fractions arranged in 6 rows and 6 columns, with an ellipsis at the end of each row. Red arrows are drawn diagonally from the bottom-left to the top-right, starting from the first column and moving to the right. The arrows indicate a sequence of fractions: 1/1, 2/1, 3/1, 4/1, 5/1, 6/1, 1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, 6/2, 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3, 6/3, 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, 5/4, 6/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5, 6/5, 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 6/6. Below the grid, there are six vertical ellipses, one under each column.

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	...
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	...
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	...
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	...
1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Cantorova věta

Věta (Cantor, 1874)

Pro každou posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, x_3, \dots$ existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $x \neq x_n$ pro všechna n . Jinak řečeno: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Cantorova věta

Věta (Cantor, 1874)

Pro každou posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, x_3, \dots$ existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $x \neq x_n$ pro všechna n . Jinak řečeno: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Alternativní důkaz nevyužívající „diagonální argument“.

- Necht' je I_1 uzavřený interval takový, že $x_1 \notin I_1$.

Cantorova věta

Věta (Cantor, 1874)

Pro každou posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, x_3, \dots$ existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $x \neq x_n$ pro všechna n . Jinak řečeno: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Alternativní důkaz nevyužívající „diagonální argument“.

- Necht' je I_1 uzavřený interval takový, že $x_1 \notin I_1$.
- Necht' je I_2 uzavřený podinterval I_1 takový, že $x_2 \notin I_2$.

Cantorova věta

Věta (Cantor, 1874)

Pro každou posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, x_3, \dots$ existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $x \neq x_n$ pro všechna n . Jinak řečeno: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Alternativní důkaz nevyužívající „diagonální argument“.

- Necht' je I_1 uzavřený interval takový, že $x_1 \notin I_1$.
- Necht' je I_2 uzavřený podinterval I_1 takový, že $x_2 \notin I_2$.
- Indukcí definujeme klesající posloupnost uzavřených intervalů (I_n) . Indukční krok: Necht' I_n je uzavřený podinterval I_{n-1} takový, že $x_n \notin I_n$.

Cantorova věta

Věta (Cantor, 1874)

Pro každou posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, x_3, \dots$ existuje takové $x \in \mathbb{R}$, že $x \neq x_n$ pro všechna n . Jinak řečeno: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Alternativní důkaz nevyužívající „diagonální argument“.

- Necht' je I_1 uzavřený interval takový, že $x_1 \notin I_1$.
- Necht' je I_2 uzavřený podinterval I_1 takový, že $x_2 \notin I_2$.
- Indukcí definujeme klesající posloupnost uzavřených intervalů (I_n) . Indukční krok: Necht' I_n je uzavřený podinterval I_{n-1} takový, že $x_n \notin I_n$.
- Z analýzy víme, že klesající posloupnost uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Existuje tedy $x \in \bigcap I_n$, kde $x \neq x_n$ pro všechna n .

Algebraická a transcendentní čísla

Algebraická čísla

Komplexní číslo z nazveme **algebraickým**, pokud vyhovuje rovnici

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0$$

s celými koeficienty, přičemž aspoň jeden je nenulový.

Stupeň algebraického čísla z je nejmenší přirozené číslo n , že z je kořenem polynomiální rovnici stupně n .

Racionální čísla jsou algebraická stupně 1, číslo $\sqrt{2}$ je algebraické stupně 2.

Algebraická a transcendentní čísla

Algebraická čísla

Komplexní číslo z nazveme **algebraickým**, pokud vyhovuje rovnici

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0$$

s celými koeficienty, přičemž aspoň jeden je nenulový.

Stupeň algebraického čísla z je nejmenší přirozené číslo n , že z je kořenem polynomiální rovnici stupně n .

Racionální čísla jsou algebraická stupně 1, číslo $\sqrt{2}$ je algebraické stupně 2.

Transcendentní čísla

Komplexní číslo nazveme **transcendentním**, pokud není algebraické.

Existují transcendentní čísla?

Věta

Množina reálných algebraických čísel je spočetná.

Existují transcendentní čísla?

Věta

Množina reálných algebraických čísel je spočetná.

- Definujeme **váhu polynomu** $f(x) = \sum_0^n a_i x^i$ jako číslo $n + \sum_0^n |a_i|$. Každý polynom má váhu alespoň 2.

Existují transcendentní čísla?

Věta

Množina reálných algebraických čísel je spočetná.

- Definujeme **váhu polynomu** $f(x) = \sum_0^n a_i x^i$ jako číslo $n + \sum_0^n |a_i|$. Každý polynom má váhu alespoň 2.
- Existuje jen konečně mnoho polynomů dané váhy. Ty uspořádáme (například lexikograficky).

Existují transcendentní čísla?

Věta

Množina reálných algebraických čísel je spočetná.

- Definujeme **váhu polynomu** $f(x) = \sum_0^n a_i x^i$ jako číslo $n + \sum_0^n |a_i|$. Každý polynom má váhu alespoň 2.
- Existuje jen konečně mnoho polynomů dané váhy. Ty uspořádáme (například lexikograficky).
- Vezmeme nejprve polynomy váhy 2, pak 3 atd. Získáme tak posloupnost polynomů $f_1, f_2, \dots$, v níž se každý polynom stupně alespoň 1 objeví právě jednou.

Existují transcendentní čísla?

Věta

Množina reálných algebraických čísel je spočetná.

- Definujeme **váhu polynomu** $f(x) = \sum_0^n a_i x^i$ jako číslo $n + \sum_0^n |a_i|$. Každý polynom má váhu alespoň 2.
- Existuje jen konečně mnoho polynomů dané váhy. Ty uspořádáme (například lexikograficky).
- Vezmeme nejprve polynomy váhy 2, pak 3 atd. Získáme tak posloupnost polynomů $f_1, f_2, \dots$, v níž se každý polynom stupně alespoň 1 objeví právě jednou.
- Každý polynom má nejvýše konečně mnoho reálných nulových bodů. Protože sjednocení spočetně mnoha konečných množin je spočetná množina, je množina reálných algebraických čísel spočetná.

Algebraická a transcendentní čísla

Protože všech reálných čísel je kontinuum a algebraických čísel je jen spočetně, existují transcendentní čísla a je jich v smyslu mohutností dokonce většina.

To můžeme tvrdit, aniž bychom našli byt' jedno jediné transcendentní číslo.

Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

V rovině existují body, které nemohou být zkonstruovány z jednotkové úsečky pouze pomocí kružítká a pravítka.

Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

V rovině existují body, které nemohou být zkonstruovány z jednotkové úsečky pouze pomocí kružítká a pravítka.

- Konstrukci začínáme se dvěma body a zajímají nás pouze konstrukce s konečným počtem kroků.

Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

V rovině existují body, které nemohou být zkonstruovány z jednotkové úsečky pouze pomocí kružítká a pravítka.

- Konstrukci začínáme se dvěma body a zajímají nás pouze konstrukce s konečným počtem kroků.
- Pokud je po n -tém kroku k dispozici konečně mnoho zkonstruovaných bodů a konečně mnoho křivek, další konstrukcí kružítkem nebo pravítkem získáme opět jen konečně mnoho zkonstruovaných bodů nebo křivek.

Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

V rovině existují body, které nemohou být zkonstruovány z jednotkové úsečky pouze pomocí kružítká a pravítka.

- Konstrukci začínáme se dvěma body a zajímají nás pouze konstrukce s konečným počtem kroků.
- Pokud je po n -tém kroku k dispozici konečně mnoho zkonstruovaných bodů a konečně mnoho křivek, další konstrukcí kružítkem nebo pravítkem získáme opět jen konečně mnoho zkonstruovaných bodů nebo křivek.
- Zkonstruovatelných bodů je tedy spočetně mnoho.

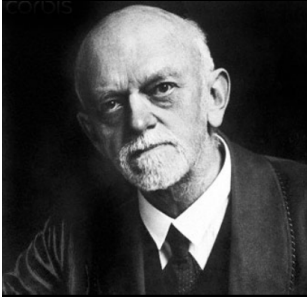
Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

V rovině existují body, které nemohou být zkonstruovány z jednotkové úsečky pouze pomocí kružítká a pravítka.

- Konstrukci začínáme se dvěma body a zajímají nás pouze konstrukce s konečným počtem kroků.
- Pokud je po n -tém kroku k dispozici konečně mnoho zkonstruovaných bodů a konečně mnoho křivek, další konstrukcí kružítkem nebo pravítkem získáme opět jen konečně mnoho zkonstruovaných bodů nebo křivek.
- Zkonstruovatelných bodů je tedy spočetně mnoho.
- Bodů v rovině je však kontinuum, a proto existují nezkonstruovatelné body.

CORDIS



**Aus dem Paradies, das Cantor
uns geschaffen, soll uns
niemand vertreiben können.**

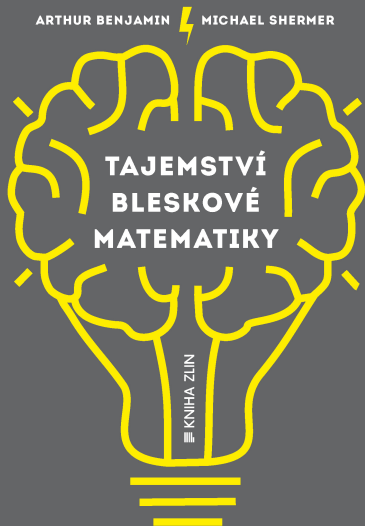
David Hilbert



PŘESTÁVKA

Přednáška Matematika malého bude pokračovat po reklamní vsuvce

Tajemství bleskové matematiky



Jednoduché matematické triky a tajemství uvedená v této publikaci jednou provždy změní váš pohled na svět čísel. Kniha vás zasvěťí do metod, jaké používají skuteční zázrační počtáři. Ve velmi krátkém čase dokážete z hlavy provádět úžasné výpočty, které byste dříve považovali za zcela nemožné. Osvojíte si metody uznávaného „matemagika“ Arthura Benjamina, který se zde dělí o své zkušenosti s bleskovým počítáním a odhaluje ohromující triky pro zacházení s čísly. Tato publikace také dramaticky zlepší vaši numerickou paměť a naučí vás - možná vůbec poprvé - mít z matematiky radost.



KONEC PŘESTÁVKY

Přednáška Matematika malého může pokračovat

Ošklivé spojité funkce

Problém

Existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě?

Ošklivé spojité funkce

Problém

Existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě?

- Otázku zodpověděl kladně Bernard Bolzano kolem roku 1831, ale své výsledky nepublikoval publikovány.

Ošklivé spojité funkce

Problém

Existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě?

- Otázku zodpověděl kladně Bernard Bolzano kolem roku 1831, ale své výsledky nepublikoval publikovány.
- Problém nezávisle vyřešil Karl Weierstrass roku 1872. Šlo o důležitý moment protože mezi matematiky stále panovalo přesvědčení, že každá spojitá funkce může být bez derivace jen na množině izolovaných bodů.

Ošklivé spojité funkce

Problém

Existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě?

- Otázku zodpověděl kladně Bernard Bolzano kolem roku 1831, ale své výsledky nepublikoval publikovány.
- Problém nezávisle vyřešil Karl Weierstrass roku 1872. Šlo o důležitý moment protože mezi matematiky stále panovalo přesvědčení, že každá spojitá funkce může být bez derivace jen na množině izolovaných bodů.
- „Mohutnostní argument“ nelze použít!

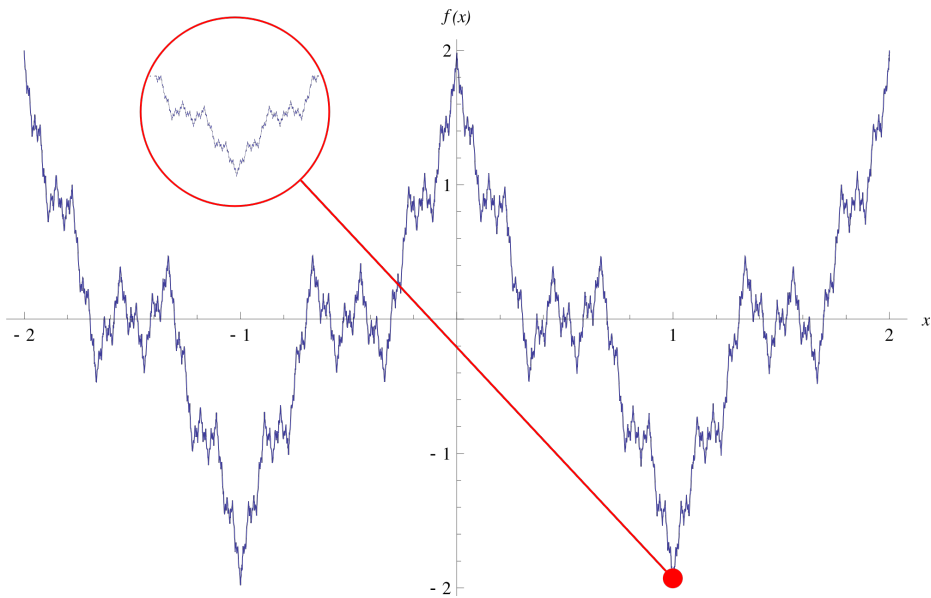
Ošklivé spojité funkce

Problém

Existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě?

- Otázku zodpověděl kladně Bernard Bolzano kolem roku 1831, ale své výsledky nepublikoval publikovány.
- Problém nezávisle vyřešil Karl Weierstrass roku 1872. Šlo o důležitý moment protože mezi matematiky stále panovalo přesvědčení, že každá spojitá funkce může být bez derivace jen na množině izolovaných bodů.
- „Mohutnostní argument“ nelze použít!
- Není možné namísto mohutnosti použít odlišný koncept?

Weierstrassovo monstrum



Weierstrassovo monstrum

- Dnes je známa celá řada spojitých funkcí, které nemají nikde derivaci. Mezi prvními takovou funkci zkonstruoval Karl Weierstrass předpisem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

kde $0 < a < 1$, b je liché přirozené číslo a $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Weierstrassovo monstrum

- Dnes je známa celá řada spojitých funkcí, které nemají nikde derivaci. Mezi prvními takovou funkci zkonstruoval Karl Weierstrass předpisem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

kde $0 < a < 1$, b je liché přirozené číslo a $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

- Je dosti obtížné dokázat, že Weierstrassova funkce nemá nikde derivaci.

Weierstrassovo monstrum

- Dnes je známa celá řada spojitých funkcí, které nemají nikde derivaci. Mezi prvními takovou funkci zkonstruoval Karl Weierstrass předpisem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

kde $0 < a < 1$, b je liché přirozené číslo a $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

- Je dosti obtížné dokázat, že Weierstrassova funkce nemá nikde derivaci.
- Uvedené požadavky na konstanty jsou poměrně nepřírozené. Člověk by očekával, že bude stačit, aby $ab > 1$. Tato hypotéza odolávala přes čtyřicet let a až v roce 1916 dokázal G. H. Hardy, že funkce f nemá nikde derivaci, jakmile $ab \geq 1$.

Proč nelze použít mohutnostní argument?

Mohutnost množiny spojitých funkcí

- Protože konstanty jsou spojité funkce, a je jich kontinuum, má množina spojitých funkcí mohutnost alespoň kontinuum.

Mohutnost množiny spojitých funkcí

- Protože konstanty jsou spojitě funkce, a je jich kontinuum, má množina spojitých funkcí mohutnost alespoň kontinuum.
- Spojitá funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině racionálních čísel, kterých je spočetně mnoho. Proto má množina spojitých funkcí mohutnost nejvýše $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \text{kontinuum}$.

Mohutnost množiny spojitých funkcí

- Protože konstanty jsou spojitě funkce, a je jich kontinuum, má množina spojitých funkcí mohutnost alespoň kontinuum.
- Spojitá funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině racionálních čísel, kterých je spočetně mnoho. Proto má množina spojitých funkcí mohutnost nejvýše $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \text{kontinuum}$.
- Podle Cantorovy-Bernsteinovy věty mají proto spojitě funkce mohutnost kontinuum.

Mohutnost množiny spojitých funkcí

- Protože konstanty jsou spojitě funkce, a je jich kontinuum, má množina spojitých funkcí mohutnost alespoň kontinuum.
- Spojitá funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině racionálních čísel, kterých je spočetně mnoho. Proto má množina spojitých funkcí mohutnost nejvýše $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \text{kontinuum}$.
- Podle Cantorovy-Bernsteinovy věty mají proto spojitě funkce mohutnost kontinuum.

Mohutnost množiny diferencovatelných funkcí

- Konstanty jsou diferencovatelné funkce a je jich kontinuum, proto je diferencovatelných funkcí alespoň kontinuum.

Mohutnost množiny spojitých funkcí

- Protože konstanty jsou spojitě funkce, a je jich kontinuum, má množina spojitých funkcí mohutnost alespoň kontinuum.
- Spojitá funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině racionálních čísel, kterých je spočetně mnoho. Proto má množina spojitých funkcí mohutnost nejvýše $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}| = \text{kontinuum}$.
- Podle Cantorovy-Bernsteinovy věty mají proto spojitě funkce mohutnost kontinuum.

Mohutnost množiny diferencovatelných funkcí

- Konstanty jsou diferencovatelné funkce a je jich kontinuum, proto je diferencovatelných funkcí alespoň kontinuum.
- Diferencovatelné funkce jsou spojitě a těch je kontinuum, proto mají diferencovatelné funkce mohutnost nejvýše kontinuum.

Mohutnost množiny spojitých funkcí

- Protože konstanty jsou spojitě funkce, a je jich kontinuum, má množina spojitých funkcí mohutnost alespoň kontinuum.
- Spojitá funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině racionálních čísel, kterých je spočetně mnoho. Proto má množina spojitých funkcí mohutnost nejvýše $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}| = \text{kontinuum}$.
- Podle Cantorovy-Bernsteinovy věty mají proto spojitě funkce mohutnost kontinuum.

Mohutnost množiny diferencovatelných funkcí

- Konstanty jsou diferencovatelné funkce a je jich kontinuum, proto je diferencovatelných funkcí alespoň kontinuum.
- Diferencovatelné funkce jsou spojitě a těch je kontinuum, proto mají diferencovatelné funkce mohutnost nejvýše kontinuum.
- Podle Cantorovy-Bernsteinovy věty mají proto diferencovatelné funkce mohutnost kontinuum.

Kdo je to?



René-Luis Baire



- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **hustá v intervalu I** , pokud má A neprázdný průnik s každým neprázdným podintervalem I . Dále říkáme, že je **hustá**, pokud je hustá v každém intervalu.

Bairovy kategorie

- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **hustá v intervalu I** , pokud má A neprázdný průnik s každým neprázdným podintervalem I . Dále říkáme, že je **hustá**, pokud je hustá v každém intervalu.
- Obecně: podmnožina A topologického prostoru X je **hustá**, pokud protíná každou neprázdnou otevřenou podmnožinu X .

Bairovy kategorie

- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **hustá v intervalu I** , pokud má A neprázdný průnik s každým neprázdným podintervalem I . Dále říkáme, že je **hustá**, pokud je hustá v každém intervalu.
- Obecně: podmnožina A topologického prostoru X je **hustá**, pokud protíná každou neprázdnou otevřenou podmnožinu X .
- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **řidká**, pokud není hustá v žádném intervalu. Jinými slovy, pokud v každém intervalu najdeme podinterval, který leží v doplňku A .

Bairovy kategorie

- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **hustá v intervalu I** , pokud má A neprázdný průnik s každým neprázdným podintervalem I . Dále říkáme, že je **hustá**, pokud je hustá v každém intervalu.
- Obecně: podmnožina A topologického prostoru X je **hustá**, pokud protíná každou neprázdnou otevřenou podmnožinu X .
- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **řidká**, pokud není hustá v žádném intervalu. Jinými slovy, pokud v každém intervalu najdeme podinterval, který leží v doplňku A .
- Obecně: podmnožina A topologického prostoru X je **řidká**, pokud každá neprázdná otevřená podmnožina X obsahuje neprázdnou otevřenou podmnožinu ležící v doplňku A .

Poznámky k hustotě a řídkosti

Příklady

- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná a hustá.

Poznámky k hustotě a řídkosti

Příklady

- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná a hustá.
- Cantorova množina má mohutnost kontinua a je řídká.

Poznámky k hustotě a řídkosti

Příklady

- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná a hustá.
- Cantorova množina má mohutnost kontinua a je řídká.
- Závěr: Mohutnost a hustota spolu obecně nesouvisí.

Poznámky k hustotě a řídkosti

Příklady

- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná a hustá.
- Cantorova množina má mohutnost kontinua a je řídká.
- Závěr: Mohutnost a hustota spolu obecně nesouvisí.

Pozorování

- Libovolná podmnožina řídké množiny je také řídká množina.

Poznámky k hustotě a řídkosti

Příklady

- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná a hustá.
- Cantorova množina má mohutnost kontinua a je řídká.
- Závěr: Mohutnost a hustota spolu obecně nesouvisí.

Pozorování

- Libovolná podmnožina řídké množiny je také řídká množina.
- Sjednocení konečně mnoha řídkých množin je opět řídká množina.

Poznámky k hustotě a řídkosti

Příklady

- Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná a hustá.
- Cantorova množina má mohutnost kontinua a je řídká.
- Závěr: Mohutnost a hustota spolu obecně nesouvisí.

Pozorování

- Libovolná podmnožina řídké množiny je také řídká množina.
- Sjednocení konečně mnoha řídkých množin je opět řídká množina.
- Uzávěr řídké množiny je znovu řídká množina.

Baireva věta

Definice

- Říkáme, že množina je **první kategorie**, pokud ji lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

Bairova věta

Definice

- Říkáme, že množina je **první kategorie**, pokud ji lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.
- Říkáme, že množina je **druhé kategorie**, pokud není první kategorie.

Bairova věta

Definice

- Říkáme, že množina je **první kategorie**, pokud ji lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.
- Říkáme, že množina je **druhé kategorie**, pokud není první kategorie.
- Doplněk množiny první kategorie nazýváme **reziduální** množinou.

Bairova věta

Definice

- Říkáme, že množina je **první kategorie**, pokud ji lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.
- Říkáme, že množina je **druhé kategorie**, pokud není první kategorie.
- Doplněk množiny první kategorie nazýváme **reziduální** množinou.

Věta (Baire, 1899)

Každá neprázdňá otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je množinou druhé kategorie, nemůže tedy být zapsána jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

Důkaz Bairovy věty

Věta (Baire, 1899)

Každá neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je množinou druhé kategorie, nemůže tedy být zapsána jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

Důkaz Bairovy věty

Věta (Baire, 1899)

Každá neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je množinou druhé kategorie, nemůže tedy být zapsána jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

- Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že $G = \bigcup_n A_n$, kde G je neprázdná otevřená množina a každá A_n je řídká. Zvolme interval $I_0 \subset G$.

Důkaz Bairovy věty

Věta (Baire, 1899)

Každá neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je množinou druhé kategorie, nemůže tedy být zapsána jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

- Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že $G = \bigcup_n A_n$, kde G je neprázdná otevřená množina a každá A_n je řídká. Zvolme interval $I_0 \subset G$.
- Pak zvolíme uzavřený podinterval $I_1 \subset I_0$, který neprotíná A_1 . Dále zvolíme uzavřený podinterval $I_2 \subset I_1$, který neprotíná A_2 . A tak dále.

Důkaz Bairovy věty

Věta (Baire, 1899)

Každá neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je množinou druhé kategorie, nemůže tedy být zapsána jako sjednocení spočetně mnoha řídkých množin.

- Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že $G = \bigcup_n A_n$, kde G je neprázdná otevřená množina a každá A_n je řídká. Zvolme interval $I_0 \subset G$.
- Pak zvolíme uzavřený podinterval $I_1 \subset I_0$, který neprotíná A_1 . Dále zvolíme uzavřený podinterval $I_2 \subset I_1$, který neprotíná A_2 . A tak dále.
- Průnik $\bigcap_n I_n$ je neprázdný a má prázdný průnik s každou množinou A_n . To je ovšem spor, protože $\bigcap_n I_n \subset I_0 \subset G$.

Aplikace Bairovy věty

- Mějme funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech řádů a předpokládejme, že pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x) = 0$. Pak je f polynom.

Aplikace Bairovy věty

- Mějme funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech řádů a předpokládejme, že pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x) = 0$. Pak je f polynom.
- Uzavřený interval v $\mathbb{R}$ nemůže být vyjádřen jako spočetné sjednocení disjunktních neprázdných uzavřených intervalů.

Aplikace Bairovy věty

- Mějme funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech řádů a předpokládejme, že pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x) = 0$. Pak je f polynom.
- Uzavřený interval v $\mathbb{R}$ nemůže být vyjádřen jako spočetné sjednocení disjunktních neprázdných uzavřených intervalů.
- Každý metrický prostor bez izolovaných bodů je nespočetný (proto jsou $\mathbb{R}$ a Cantorova množina nespočetné).

Aplikace Bairovy věty

- Mějme funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech řádů a předpokládejme, že pro každé $x \in [0, 1]$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n)}(x) = 0$. Pak je f polynom.
- Uzavřený interval v $\mathbb{R}$ nemůže být vyjádřen jako spočetné sjednocení disjunktních neprázdných uzavřených intervalů.
- Každý metrický prostor bez izolovaných bodů je nespočetný (proto jsou $\mathbb{R}$ a Cantorova množina nespočetné).
- Banachova-Steinhausova věta jako jeden z pilířů funkcionální analýzy.

Baireva věta jinak: Banachova-Mazurova hra

Hráč (I) dostal nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$. Hra probíhá následovně:

Bairova věta jinak: Banachova-Mazurova hra

Hráč (I) dostal nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$. Hra probíhá následovně:

- Hráč (I) vybere nějaký uzavřený interval I_1 .

Bairova věta jinak: Banachova-Mazurova hra

Hráč (I) dostal nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$. Hra probíhá následovně:

- Hráč (I) vybere nějaký uzavřený interval I_1 .
- Hráč (II) vybere uzavřený podinterval $I_2 \subset I_1$.

Bairova věta jinak: Banachova-Mazurova hra

Hráč (I) dostal nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$. Hra probíhá následovně:

- Hráč (I) vybere nějaký uzavřený interval I_1 .
- Hráč (II) vybere uzavřený podinterval $I_2 \subset I_1$.
- Hráč (I) vybere uzavřený podinterval $I_3 \subset I_2$.

Bairova věta jinak: Banachova-Mazurova hra

Hráč (I) dostal nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$. Hra probíhá následovně:

- Hráč (I) vybere nějaký uzavřený interval I_1 .
- Hráč (II) vybere uzavřený podinterval $I_2 \subset I_1$.
- Hráč (I) vybere uzavřený podinterval $I_3 \subset I_2$.
- A tak dále. Oba hráči společně vytvoří klesající posloupnost uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, přičemž hráč (I) určil intervaly s lichými indexy a hráč (II) se sudými.

Bairova věta jinak: Banachova-Mazurova hra

Hráč (I) dostal nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{R}$. Hra probíhá následovně:

- Hráč (I) vybere nějaký uzavřený interval I_1 .
- Hráč (II) vybere uzavřený podinterval $I_2 \subset I_1$.
- Hráč (I) vybere uzavřený podinterval $I_3 \subset I_2$.
- A tak dále. Oba hráči společně vytvoří klesající posloupnost uzavřených intervalů $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, přičemž hráč (I) určil intervaly s lichými indexy a hráč (II) se sudými.
- Pokud je průnik množiny A a $\bigcap_n I_n$ neprázdný, vyhrává hráč (I), v opačném případě vyhrává (II).

Kdo zvítězí v Banachově-Mazurově hře?

Otázka

Který z hráčů si dokáže chytrou volbou svých intervalů zajistit výhru bez ohledu na tahy svého oponenta? Jinými slovy: který z hráčů má „vyhrávající strategii“?

Kdo zvítězí v Banachově-Mazurově hře?

Otázka

Který z hráčů si dokáže chytrou volbou svých intervalů zajistit výhru bez ohledu na tahy svého oponenta? Jinými slovy: který z hráčů má „vyhrávající strategii“?

Odpověď

Hráč (II) má vyhrávající strategii, právě když je množina A první kategorie.

Kdo zvítězí v Banachově-Mazurově hře?

Otázka

Který z hráčů si dokáže chytrou volbou svých intervalů zajistit výhru bez ohledu na tahy svého oponenta? Jinými slovy: který z hráčů má „vyhrávající strategii“?

Odpověď

Hráč (II) má vyhrávající strategii, právě když je množina A první kategorie.

Hráč (II) nemůže mít vyhrávající strategii, pokud A obsahuje interval. Speciálním případem množin obsahujících intervaly jsou neprázdné otevřené množiny. Ty jsou proto množinami druhé kategorie.

Banach-Mazurova hra proto implikuje Bairovu větu.

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:
 - $d(x, y) > 0$ pro všechny $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:
 - $d(x, y) > 0$ pro všechny $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$
 - $d(x, y) = d(y, x)$

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:
 - $d(x, y) > 0$ pro všechny $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$
 - $d(x, y) = d(y, x)$
 - $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:
 - $d(x, y) > 0$ pro všechny $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$
 - $d(x, y) = d(y, x)$
 - $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)
- Posloupnost (x_n) bodů X **konverguje** k bodu $x \in X$, pokud $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Posloupnost nazveme **konvergentní**, pokud konverguje k nějakému bodu.

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:
 - $d(x, y) > 0$ pro všechny $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$
 - $d(x, y) = d(y, x)$
 - $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)
- Posloupnost (x_n) bodů X **konverguje** k bodu $x \in X$, pokud $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Posloupnost nazveme **konvergentní**, pokud konverguje k nějakému bodu.
- Posloupnost bodů (x_n) se nazývá **Cauchyovská posloupnost**, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ pro všechna $i, j \geq n$.

Úplné metrické prostory

- **Metrický prostor** je množina X vybavená **metrikou** $d(x, y)$ (funkcí vzdálenosti dvou bodů) definovanou na dvojicích bodů X , která má vlastnosti:
 - $d(x, y) > 0$ pro všechny $x \neq y$, a $d(x, y) = 0$
 - $d(x, y) = d(y, x)$
 - $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)
- Posloupnost (x_n) bodů X **konverguje** k bodu $x \in X$, pokud $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Posloupnost nazveme **konvergentní**, pokud konverguje k nějakému bodu.
- Posloupnost bodů (x_n) se nazývá **Cauchyovská posloupnost**, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ pro všechna $i, j \geq n$.
- Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská, ale naopak to obecně pravda není. Prostory, ve kterých to pravda je, se nazývají **úplné**.

Bairova věta v úplných metrických prostorech

- Množinu $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$ nazveme **koulí** se středem x a poloměrem r .

Bairova věta v úplných metrických prostorech

- Množinu $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$ nazveme **koulí** se středem x a poloměrem r .
- Množina $G \subset X$ je **otevřená**, pokud pro každé $x \in G$ obsahuje G nějakou kouli se středem v x . Koule $B(x, r)$ jsou otevřené množiny, jejich libovolná sjednocení a konečné průniky také. Doplnky otevřených množin nazýváme **uzavřenými** množinami. Množina $F \subset X$ je uzavřená, právě když pro každou posloupnost (x_n) bodů v F konvergující k x platí $x \in F$.

Bairova věta v úplných metrických prostorech

- Množinu $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$ nazveme **koulí** se středem x a poloměrem r .
- Množina $G \subset X$ je **otevřená**, pokud pro každé $x \in G$ obsahuje G nějakou kouli se středem v x . Koule $B(x, r)$ jsou otevřené množiny, jejich libovolná sjednocení a konečné průniky také. Doplnky otevřených množin nazýváme **uzavřenými** množinami. Množina $F \subset X$ je uzavřená, právě když pro každou posloupnost (x_n) bodů v F konvergující k x platí $x \in F$.
- Pojmy otevřené a uzavřené množiny nám umožní definovat husté množiny, množiny první a druhé kategorie v obecnějším kontextu.

Bairova věta v úplných metrických prostorech

- Množinu $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$ nazveme **koulí** se středem x a poloměrem r .
- Množina $G \subset X$ je **otevřená**, pokud pro každé $x \in G$ obsahuje G nějakou kouli se středem v x . Koule $B(x, r)$ jsou otevřené množiny, jejich libovolná sjednocení a konečné průniky také. Doplnky otevřených množin nazýváme **uzavřenými** množinami. Množina $F \subset X$ je uzavřená, právě když pro každou posloupnost (x_n) bodů v F konvergující k x platí $x \in F$.
- Pojmy otevřené a uzavřené množiny nám umožní definovat husté množiny, množiny první a druhé kategorie v obecnějším kontextu.

Věta (Baire)

Každá neprázdná otevřená množina v úplném metrickém prostoru je množina druhé kategorie.

Cvičení

Necht' A je uzavřená množina v X , která neobsahuje žádnou otevřenou množinu. Pak je A řídká.

Cvičení

Necht' A je uzavřená množina v X , která neobsahuje žádnou otevřenou množinu. Pak je A řídká.

- Necht' U je neprázdná otevřená množina v X . Abychom ukázali, že A je řídká, je třeba nalézt neprázdnou otevřenou podmnožinu $V \subset U$, která má s A prázdný průnik.

Cvičení

Necht' A je uzavřená množina v X , která neobsahuje žádnou otevřenou množinu. Pak je A řídká.

- Necht' U je neprázdná otevřená množina v X . Abychom ukázali, že A je řídká, je třeba nalézt neprázdnou otevřenou podmnožinu $V \subset U$, která má s A prázdný průnik.
- Pokud je $(X \setminus A) \cap U$ neprázdná, jsme hotovi, protože právě toto je naše hledaná otevřená (protože A je uzavřená) množina V .

Cvičení

Necht' A je uzavřená množina v X , která neobsahuje žádnou otevřenou množinu. Pak je A řídká.

- Necht' U je neprázdná otevřená množina v X . Abychom ukázali, že A je řídká, je třeba nalézt neprázdnou otevřenou podmnožinu $V \subset U$, která má s A prázdný průnik.
- Pokud je $(X \setminus A) \cap U$ neprázdná, jsme hotovi, protože právě toto je naše hledaná otevřená (protože A je uzavřená) množina V .
- Pokud je $(X \setminus A) \cap U = \emptyset$, znamená to, že $U \subset A$, což není možné, protože A neobsahuje neprázdnou otevřenou množinu.

Kdo je to?



Stefan Banach



Typická spojitá funkce

Věta (Banach)

Množina spojitých funkcí, které mají nemají derivaci v žádném bodě, je reziduální.

Typická spojitá funkce

Věta (Banach)

Množina spojitých funkcí, které mají nemají derivaci v žádném bodě, je reziduální.

- To znamená, že množina množina funkcí, které mají alespoň v jednom bodě derivaci, je množina první kategorie, tj. velice malá.

Typická spojitá funkce

Věta (Banach)

Množina spojitých funkcí, které mají nemají derivaci v žádném bodě, je reziduální.

- To znamená, že množina množina funkcí, které mají alespoň v jednom bodě derivaci, je množina první kategorie, tj. velice malá.
- To znamená, že spojitá funkce, která nemá nikde derivaci existuje a je jich dokonce „většina“.

Typická spojitá funkce

Věta (Banach)

Množina spojitých funkcí, které mají nemají derivaci v žádném bodě, je reziduální.

- To znamená, že množina množina funkcí, které mají alespoň v jednom bodě derivaci, je množina první kategorie, tj. velice malá.
- To znamená, že spojitá funkce, která nemá nikde derivaci existuje a je jich dokonce „většina“.
- Říkáme, že vlastnost T je **typická**, pokud je množina $\{f \in C[0, 1] : f \text{ má vlastnost } T\}$ reziduální v $C[0, 1]$.

Typická spojitá funkce

Věta (Banach)

Množina spojitých funkcí, které mají nemají derivaci v žádném bodě, je reziduální.

- To znamená, že množina množina funkcí, které mají alespoň v jednom bodě derivaci, je množina první kategorie, tj. velice malá.
- To znamená, že spojitá funkce, která nemá nikde derivaci existuje a je jich dokonce „většina“.
- Říkáme, že vlastnost T je **typická**, pokud je množina $\{f \in C[0, 1] : f \text{ má vlastnost } T\}$ reziduální v $C[0, 1]$.

Označíme množinu všech spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ jako $C[0, 1]$, definujeme metriku $d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Takto definovaný metrický prostor je úplný, proto můžeme na $C[0, 1]$ použít Bairovu větu.

Důkaz Banachovy věty

Řekneme, že funkce f je **lokálně rostoucí** v bodě x , pokud existuje otevřený interval obsahující x , ve kterém $f(y) \leq f(x)$ pro $y \leq x$ a $f(y) \geq f(x)$ pro všechny $y \geq x$. Důkaz Banachovy věty je založen na následujícím lemmatu:

Důkaz Banachovy věty

Řekneme, že funkce f je **lokálně rostoucí** v bodě x , pokud existuje otevřený interval obsahující x , ve kterém $f(y) \leq f(x)$ pro $y \leq x$ a $f(y) \geq f(x)$ pro všechny $y \geq x$. Důkaz Banachovy věty je založen na následujícím lemmatu:

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

Důkaz Banachovy věty

Řekneme, že funkce f je **lokálně rostoucí** v bodě x , pokud existuje otevřený interval obsahující x , ve kterém $f(y) \leq f(x)$ pro $y \leq x$ a $f(y) \geq f(x)$ pro všechny $y \geq x$. Důkaz Banachovy věty je založen na následujícím lemmatu:

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

Posunutím reziduální množiny dostaneme opět reziduální množinu, proto platí:

Důsledek

Necht' $g \in C[0, 1]$ a $f \in C[0, 1]$ je typická spojitá funkce (z určité konkrétní reziduální množiny). Pak funkce $f + g$ není lokálně rostoucí v žádném bodě.

Důkaz Banachovy věty

Řekneme, že funkce f je **lokálně rostoucí** v bodě x , pokud existuje otevřený interval obsahující x , ve kterém $f(y) \leq f(x)$ pro $y \leq x$ a $f(y) \geq f(x)$ pro všechny $y \geq x$. Důkaz Banachovy věty je založen na následujícím lemmatu:

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

Posunutím reziduální množiny dostaneme opět reziduální množinu, proto platí:

Důsledek

Necht' $g \in C[0, 1]$ a $f \in C[0, 1]$ je typická spojitá funkce (z určité konkrétní reziduální množiny). Pak funkce $f + g$ není lokálně rostoucí v žádném bodě.

Definujeme-li $g(x) = nx$ (kde $n \in \mathbb{N}$ je libovolné), z předchozího důsledku plyne, že $f(x) + nx$ není lokálně rostoucí v žádném bodě pro typickou spojitou funkci f . Z toho vyvodíme, že f nemůže mít derivaci $f'(x) > -n$ v žádném bodě.

Důkaz Lemmatu - náznak

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

Důkaz Lemmatu - náznak

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

- Označíme jako A_n množinu těch spojitých funkcí f , pro něž existuje x takové, že f je lokálně rostoucí na $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.

Důkaz Lemmatu - náznak

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

- Označíme jako A_n množinu těch spojitých funkcí f , pro něž existuje x takové, že f je lokálně rostoucí na $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.
- Stačí ukázat, že množiny A_n jsou uzavřené a neobsahují žádnou otevřenou množinu.

Důkaz Lemmatu - náznak

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

- Označíme jako A_n množinu těch spojitých funkcí f , pro něž existuje x takové, že f je lokálně rostoucí na $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.
- Stačí ukázat, že množiny A_n jsou uzavřené a neobsahují žádnou otevřenou množinu.
- Z dříve dokázaného cvičení pak plyne, že množiny A_n jsou řídké.

Důkaz Lemmatu - náznak

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

- Označíme jako A_n množinu těch spojitých funkcí f , pro něž existuje x takové, že f je lokálně rostoucí na $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.
- Stačí ukázat, že množiny A_n jsou uzavřené a neobsahují žádnou otevřenou množinu.
- Z dříve dokázaného cvičení pak plyne, že množiny A_n jsou řídké.
- Sjednocením množin A_n dostaneme množinu všech spojitých funkcí, které jsou lokálně rostoucí alespoň v jednom bodě.

Důkaz Lemmatu - náznak

Lemma

Typická spojitá funkce není lokálně rostoucí v žádném bodě.

- Označíme jako A_n množinu těch spojitých funkcí f , pro něž existuje x takové, že f je lokálně rostoucí na $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.
- Stačí ukázat, že množiny A_n jsou uzavřené a neobsahují žádnou otevřenou množinu.
- Z dříve dokázaného cvičení pak plyne, že množiny A_n jsou řídké.
- Sjednocením množin A_n dostaneme množinu všech spojitých funkcí, které jsou lokálně rostoucí alespoň v jednom bodě.
- Množina $\bigcup_n A_n$ je ale množinou první kategorie a proto je množina $C[0, 1] \setminus \bigcup_n A_n$ spojitých funkcí, které nejsou lokálně rostoucí v žádném bodě, reziduální.

Kdo je to?



Henri Lebesgue



Množiny nulové míry

Intervalem $I \subset \mathbb{R}^n$ nazveme pravoúhlý rovnoběžnostěn se stranami rovnoběžnými s osami. Jinými slovy jde o kartézský součin n jednorozměrných intervalů. Obsah I značíme $||I||$.

Množiny nulové míry

Intervalem $I \subset \mathbb{R}^n$ nazveme pravoúhlý rovnoběžnostěn se stranami rovnoběžnými s osami. Jinými slovy jde o kartézský součin n jednorozměrných intervalů. Obsah I značíme $||I||$.

Infimum součtů $\sum_k |I_k|$ přes všechny posloupnosti (I_k) otevřených intervalů, který pokrývají množinu E nazveme **vnější Lebesgueovou mírou** množiny E . Značíme ji $\lambda^*(E)$.

Množiny nulové míry

Intervalem $I \subset \mathbb{R}^n$ nazveme pravoúhlý rovnoběžnostěn se stranami rovnoběžnými s osami. Jinými slovy jde o kartézský součin n jednorozměrných intervalů. Obsah I značíme $|I|$.

Infimum součtů $\sum_k |I_k|$ přes všechny posloupnosti (I_k) otevřených intervalů, který pokrývají množinu E nazveme **vnější Lebesgueovou mírou** množiny E . Značíme ji $\lambda^*(E)$.

Definice

Množina E je **množinou nulové míry**, pokud $\lambda^*(E) = 0$.

Množinou nulové míry je například množina $\mathbb{Q}$ nebo Cantorova množina (proč?).

Množiny nulové míry

Intervalem $I \subset \mathbb{R}^n$ nazveme pravoúhlý rovnoběžnostěn se stranami rovnoběžnými s osami. Jinými slovy jde o kartézský součin n jednorozměrných intervalů. Obsah I značíme $|I|$.

Infimum součtů $\sum_k |I_k|$ přes všechny posloupnosti (I_k) otevřených intervalů, který pokrývají množinu E nazveme **vnější Lebesgueovou mírou** množiny E . Značíme ji $\lambda^*(E)$.

Definice

Množina E je **množinou nulové míry**, pokud $\lambda^*(E) = 0$.

Množinou nulové míry je například množina $\mathbb{Q}$ nebo Cantorova množina (proč?).

Paradox

Množinu $\mathbb{R}$ můžeme vyjádřit jako sjednocení množiny první kategorie a množiny nulové míry.

Kdo je to?



Abram Samojlovič Bezikovič



Bezиковičova prapodivná množina

Bezikovičova množina je každá taková podmnožina $\mathbb{R}^n$, která obsahuje úsečku v každém směru.

Bezикови́чова праподи́вна мно́жина

Bezикови́чова мно́жина je každá taková podmnožina $\mathbb{R}^n$, která obsahuje úsečku v každém směru.

Věta (Bezikovič, 1917)

Existuje Bezikovičova množina nulové míry.

Bezикови́чова прapодивна́ мно́žина

Bezикови́чова мно́žina je každá taková podmnožina $\mathbb{R}^n$, která obsahuje úsečku v každém směru.

Věta (Bezikovič, 1917)

Existuje Bezikovičova množina nulové míry.

- Konstrukční důkaz je dosti komplikovaný a existuje také nekonstruktivní verze důkazu s využitím Bairovy věty.

Bezикови́чова прapодивná množina

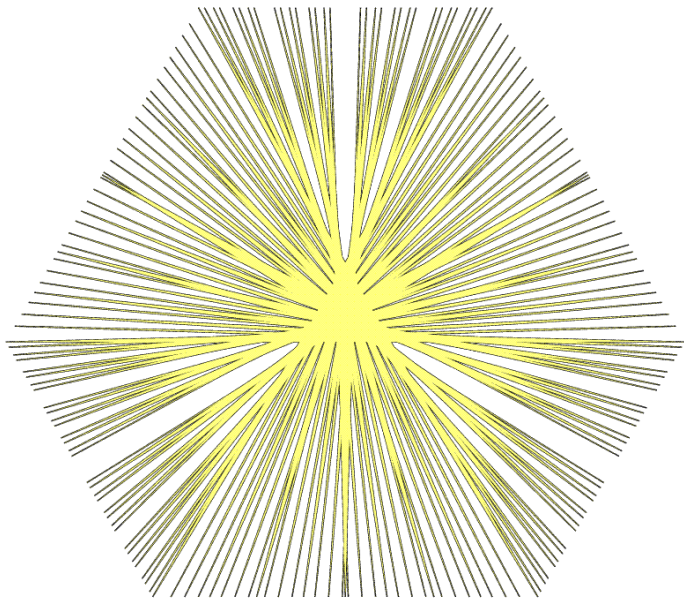
Bezикови́чова množina je každá taková podmnožina $\mathbb{R}^n$, která obsahuje úsečku v každém směru.

Věta (Bezikovič, 1917)

Existuje Bezikovičova množina nulové míry.

- Konstrukční důkaz je dosti komplikovaný a existuje také nekonstruktivní verze důkazu s využitím Bairovy věty.
- Platí dokonce víc: **Typická Bezikovičova množina má míru nula!**

Bezиковiĉova prapodivná množina



Návrat ke kalkulu s mírou I

Věta (Lebesgue)

Monotónní funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech množiny $[a, b]$ až na množinu míry nula.

Návrat ke kalkulu s mírou I

Věta (Lebesgue)

Monotónní funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech množiny $[a, b]$ až na množinu míry nula.

Důsledek

Lipschitzovská funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech množiny $[a, b]$ až na množinu míry nula.

Návrat ke kalkulu s mírou I

Věta (Lebesgue)

Monotónní funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech množiny $[a, b]$ až na množinu míry nula.

Důsledek

Lipschitzovská funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci ve všech bodech množiny $[a, b]$ až na množinu míry nula.

Pro L -lipschitzovskou funkci stačí uvažovat monotónní funkci $g : x \rightarrow f(x) + Lx$.

Návrat ke kalkulu s mírou II

Věta (Zahorski, 1946)

Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je množinou bodů bez derivace nějaké lipschitzovské funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, právě když je A množinou míry nula a typu $G_{\delta\sigma}$.

Návrat ke kalkulu s mírou II

Věta (Zahorski, 1946)

Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je množinou bodů bez derivace nějaké lipschitzovské funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, právě když je A množinou míry nula a typu $G_{\delta\sigma}$.

Věta (Rademacher, 1919)

Lipschitzovská funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci všude až na množinu míry nula.

Návrat ke kalkulu s mírou II

Věta (Zahorski, 1946)

Podmnožina $A \subset \mathbb{R}$ je množinou bodů bez derivace nějaké lipschitzovské funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, právě když je A množinou míry nula a typu $G_{\delta\sigma}$.

Věta (Rademacher, 1919)

Lipschitzovská funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci všude až na množinu míry nula.

Věta (Lebesgue)

Mějme funkci $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Následující tvrzení jsou pak ekvivalentní:

- A** *f má Riemannův integrál,*
- B** *f je omezená a spojitá až na množinu míry nula.*

Bibliografie



Oxtoby, J.C.

Measure and category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces. 2a ed. New York. Springer-Verlag, 1980.



Rmoutil, M.

Exceptional Sets in Mathematical Analysis. Disertační práce, 2014.



Csörnyei, M.

Measure and Category. Přednášky.