Motivace: $y' = ay$ s $y(0) = y_0$ má pro $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ řešení $y = y_0 \exp(ax)$.
Mohlo by platit něco podobného pro soustavu
$$\vec{y}\,' = Ay \text{ s } \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \,?$$

Připomenutí: Matice $n\times n$: tabulky čísel, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.
M_n … množina matic $n \times n$.
Chceme matice lineárních zobrazení, definujeme
pro $A, B \in M_n$ $A+B$ jako $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ a
pro $B \in M_n, \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot B$ jako $(\lambda B)_{ij} = \lambda b_{ij}$.

S těmito operacemi je M_n vektorový prostor dimenze n^2.
Navíc definujeme násobení předpisem
$A, B \in M_n$ $$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Takto definované násobení je asociativní a má jednotku $\mathbb{E}$:
$\exists\, \mathbb{E}\ \forall A \quad A\mathbb{E} = \mathbb{E}A = A$.
Pro některé matice existuje inverze tak, že $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{E}$.

M_n je vektorový prostor konečné dimenze $\to$ víme, že všechny normy na něm jsou ekvivalentní.

Obzvláště příjemná je norma definovaná předpisem:
$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}},$$ kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ je norma na $\mathbb{R}^n$ (libovolná)

Pro takovou normu totiž platí:
$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\| \quad \text{pro } \forall A, B \in M_n$$
Speciálně pak $\|A^2\| \le \|A\|^2 \to \|A^n\| \le \|A\|^n$.

Exp jako funkce z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Chceme použít takovou definici či formu, která bude přirozeně přenositelná na matice. Ideálně tedy pouze pomocí operací sčítání, násobení a pomocí limity. (Mu je VP s normou.)

Žhavým favoritem, kterého se budeme držet, je definice

$$\exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

O této řadě víme, že je absolutně konvergentní s poloměrem konvergence ∞. (Můžeme tedy přerovnat či derivovat člen po členu.)

exp má velice pěknou vlastnost:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{pro } \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Zkusme ji dokázat prostým výpočtem:

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{x^l y^{n-l}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \frac{x^l}{l!}\frac{y^{n-l}}{(n-l)!}$$

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}$$

Teď nezbývá než nahlédnout, že obě sumy jsou stejné. A to buď vzpomenutím vztahu pro součin řad nebo přímo řady vynásobit a uspořádat tak, aby ve výrazech $x^i y^j$ platilo $i+j=l$.

Klíčové tedy bylo využití binomické věty.

Pozn. Víme také, že $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Analogicky jako exp může i s cos a sin pracovat jako se součty řad.

Exp jako funkce $M_n \to M_n$.

exp definujeme formálně stejným předpisem:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Nyní je na místě vyšetřit, jestli má taková řada vůbec smysl a jestli konverguje.

Použité operace jsou jen sčítání, násobení a limita, takže ok.

Řada je navíc absolutně konvergentní, neboť:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = \exp(\|A\|)$$ netriviální

Analogicky, tj. převedením na $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lze dokázat, že poloměr konvergence je ∞, je spojitá atd.

Zůstala zachována také hezká vlastnost $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$?

Pro reálný případ bylo možné použít binom. větu.

Pro matice ale:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \quad \text{a}$$

obecně $AB \neq BA$.

Dospíváme tedy k závěru:

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \quad \text{právě tehdy,}$$

když $AB = BA$.

Zaveďme ještě značení $[A,B] := AB - BA$.

Kdy bude platit $[A,B] = 0$? Zřejmě pro $B = \lambda \cdot A$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dále také pro $B = \lambda \cdot E$ platí $[A,B] = 0$ pro $\forall A \in M_n$.

(Na druhou stranu, pokud $[X,A] = 0$ pro $\forall A \in M_n$, pak $X = \lambda E$) Netriviálně!

Pro nekomutativní matice platí různé formule, např.:

a) Baker–Campbell–Hausdorff: $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \dots)$

b) $\exp(x)\exp(y) = \exp(y + [x,y] + \frac{1}{2!}[x,[x,y]] + \dots)\exp(x)$

Pro $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí, že $\exp(a)$ je invertibilní pro $\forall a \in \mathbb{R}$.
Co pro matice?

Zřejmě $\exp(\mathbb{0}) = \mathbb{E}$. Dále

$$\mathbb{E} = \exp(\mathbb{0}) = \exp(A - A) \overset{[A,A]=0}{=} \exp(A)\exp(-A)$$
$$= \exp(-A)\exp(A).$$

Inverzní matici k $\exp(A)$ tedy je $\exp(-A)$. (Stejně jako pro $\mathbb{R}$.)

Příklady: Výpočet $\exp(A\varphi)$ pro $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Pozorujeme, že $A^2 = -\mathbb{E}$, $A^3 = -A$, $A^4 = \mathbb{E}$ takže:

$$\exp(A\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\varphi)^n}{n!} = \mathbb{E} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \mathbb{E}\cos(\varphi) + A\sin\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R_\varphi$$

Rotace v $\mathbb{R}^2$ o úhel φ.

Výpočet $\exp(B\rho)$ pro $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho \in \mathbb{R}$.

Pozorování $B^2 = \mathbb{E}$ takže

$$\exp(B\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B\rho)^n}{n!} = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{2k}}{(2k)!} + B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \mathbb{E}\cosh\rho + B\sinh\rho = \begin{pmatrix} \cosh\rho & \sinh\rho \\ \sinh\rho & \cosh\rho \end{pmatrix}.$$

(Substitucí $\tanh\rho = \frac{v}{c}$ lze v matici $\exp(B\rho)$ poznat Lorentzovu transformaci!)

Systematičtější metody výpočtu:

Pozorování: Velice dobře lze exp počítat pro diagonální matice, neboť pro $D = \mathrm{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ zřejmě platí

$$D^k = \mathrm{diag}\{d_1^k, \dots, d_n^k\} \quad \text{a tedy}$$

$$\exp(D) = \mathrm{diag}\{\exp(d_1), \dots, \exp(d_n)\}.$$

Víme, že matice A je diagonalizovatelná v bázi z vlastních vektorů právě tehdy, když je normální ($AA^T = A^TA$, resp. $AA^+ = A^+A$). Existují tedy matice B a D takové, že

$$A = BDB^{-1} \quad \text{a navíc } D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice A.

Pozorování: Jestliže $A = BDB^{-1}$, pak

$$A^2 = BDB^{-1}BDB^{-1} = BD^2B^{-1}.$$

Indukcí pak dostaneme

$$A^k = BD^kB^{-1}, \text{ takže}$$

Toto navíc umožňuje dobrou definici exp pro lineární zobrazení pomocí jeho matice v nějaké bázi.

$$\exp(A) = \exp(BDB^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BDB^{-1})^k}{k!} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} B^{-1} =$$

$$= B \exp(D) B^{-1}.$$

Pokud je tedy matice diagonalizovatelná, pak máme spolehlivý i když pracný (vlastní čísla a vektory) návod na výpočet exp.

Diagonalizovatelné budou např. matice v diferenciálních rovnicích v kvantové mechanice ($y' = Hy$), případně v konečných prvcích $y' = Ay$, kde A je diskretizace Δ.

Použití exp pro řešení soustav diferenciálních rovnic.

Mějme $\vec{y} = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ a $A \in M_n$ „konstantní" a soustavu dif. rovnic

$$\vec{y}\,' = Ay \quad \text{a} \quad y(0) = y_0 ..$$

Tato soustava má řešení v explicitním tvaru

$$y = \exp(Ax)\, y_0, \text{ neboť}$$

$$y' = \left[\exp(Ax) y_0\right]' = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!} y_0\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k x^{k-1}}{(k-1)!} y_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{A^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} y_0 = A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l x^l}{l!} y_0 = A \cdot \exp(Ax)\, y_0 = Ay.$$

a $y(0) = y_0$, zřejmě. (Nicméně je třeba si promyslet, jak vypadá derivace matice podle „parametru" x!)

(Zatím známe návod na výpočet exp jen pro normální matice.)

Příkládek:
$$y_1' = -y_2 \qquad y(0) = (c_1; c_2)$$
$$y_2' = y_1$$
$$\longrightarrow y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y, \ \exp(Ax) \text{ už známe.}$$

(Tento příklad má tu hodnotu, že úloha odpovídá fyzikálně zajímavé situaci, a sice pohybu nabité částice v homogenním magnetickém poli, do kterého vletí kolmo na něj. $ma = \vec{F}$; $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.)

Případně možno spočíst vlastní čísla: char. pol. $\lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$.
Vlastní vektory $v_1 = (1; -i)$ pro $\lambda_1 = i$
$v_2 = (1; i)$ pro $\lambda_2 = -i$, takže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \exp(Ax) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & \\ & e^{ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Jak spočíst exp pro matici, která není normální?
Víme, že pro každou matici A existují matice J a B takové, že

$$A = BJB^{-1}, \text{ kde } J \text{ má blokovou strukturu}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix} \quad \text{a jednotlivé bloky}$$

jsou $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$ λ_i na diagonále, 1 nad ní.
J_i je matice $\ell \times \ell$

λ_i jsou kořeny charakteristického polynomu matice A.
(tedy $\det(A - \lambda \mathbb{I})$)

Pro výpočet $\exp(A)$ tedy efektivně stačí vědět, jak vypadá $\exp(J_i)$ bloku J_i.

Všimněme si, že je-li J blok velikosti $k \times k$, pak je možné jej zapsat jako

$$J = \lambda \mathbb{I} + N \quad \text{a } N \text{ je nilpotentní.}$$

Vskutku, $N^{k-1} = 0$. Takže:

$$\exp(J) = \exp(\lambda \mathbb{I} + N) = \exp(\lambda \mathbb{I}) \exp(N).$$

$\exp(\lambda \mathbb{I})$ známe, stačí spočíst $\exp(N)$, resp. $\exp(Nx)$.

$$\exp(Nx) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(Nx)^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(Nx)^\ell}{\ell!} = \text{(mocnění } N \text{ posunuje pás jedniček nahoru (resp. doprava))}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \cdots & \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{x}{1!} \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exponenciála derivace (na prostoru polynomů stupně nejvýše 4). $= P_4(x)$.

Derivace je zjevně lineární zobrazení $P_4(x) \to P_4(x)$.
Zvolme v $P_4(x)$ bázi: $\left\{\frac{x^k}{k!}\right\}_{k=0}^4 = \left\{1; x; \frac{x^2}{2!}; \frac{x^3}{3!}; \dots; \frac{x^4}{4!}\right\}$.

Vůči této bázi má derivace matici A takovou, že

$$a_{ij} = 1 \quad \text{pokud } j = i+1$$
$$a_{ij} = 0 \quad \text{jinak.}$$

Je to tedy přesně matice N (nilpotentní) o rozměru $4+1 \times 4+1$.
Jak vypadá $\exp(Nt)$ už tedy víme.

Porovnejme se zobrazením $T_a : P_4(x) \to P_4(x)$ definovaným předpisem:

$$T_a(p(x)) = p(x+a), \quad \text{kde}$$

$p(x)$ je polynom z $P_4(x)$. (Jde tedy o „posunutí".)
Toto zobrazení je lineární, najděme jeho matici vůči bázi $\left\{\frac{x^k}{k!}\right\}_{k=0}^4$.

$$T_a\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{1}{k!}(x+a)^k = \frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} x^\ell a^{k-\ell} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \cdot \frac{a^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

Odsud můžeme nahlédnout, že matice T_a bude mít tvar:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & \frac{a^k}{k!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a tedy}$$

$$T_a = \exp(Na) = „\exp\left(a \cdot \frac{d}{dx}\right)".$$

Shrnutí: exp dává explicitní formuli pro řešení soustav dif. rovnic.
K výpočtu je vhodné znát nějaký rozklad typu $A = BJB^{-1}$.
Navíc exp vhodně zvolených matic generuje zajímavá zobrazení, operátory otočení, Lorentzovy transformace (boost), posunutí či časového vývoje ($\exp(At)$ pro $y' = Ay$). Vše má příslušná zobecnění!