Katedra aplikované matematiky

OSMA

OBČASNÝ SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

25. 10. 2016

KOUZLA SE SPOČETNOSTÍ

- Množina M se nazývá spočetná, jestliže existuje mezi M a $\mathbb{N}$ bijekce.
- M je nejvýše spočetná, je-li spočetná, nebo konečná.
- Množina, která není ani konečná, ani spočetná, se nazývá nespočetná.

VĚTA

$\boxed{f: A \longrightarrow B,\ D_f = A,\ f \text{ prosté},\ B \text{ nejvýše spočetná}} \Longrightarrow \boxed{A \text{ je nejvýše spočetná}}$

DŮKAZ je snadným cvičením. □

VĚTA

$\mathbb{Q}$ je spočetná množina.

DŮKAZ

Existuje posloupnost obsahující všechna racionální čísla.

$$
\begin{array}{llllll}
0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \dots \\
\frac{0}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & -\frac{2}{2}, & \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ existuje prosté zobr. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ TVRZENÍ □

VĚTA
Je-li $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pak interval (a, b) je množina nespočetná.

DŮKAZ
Lze provést např. diagonální metodou pomocí desetinných rozvojů, popř. pomocí principu do sebe vnořených uzavřených intervalů. $\square$

VĚTA
Spočetné sjednocení nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina.

DŮKAZ je snadným cvičením. $\square$

VĚTA
Nechť $\mathcal{S}$ je systém po dvou disjunktních otevřených (jednorozměrných) intervalů. Pak $\mathcal{S}$ je nejvýše spočetný.

DŮKAZ
Využijeme hustoty racionálních čísel na reálné ose. Definujme zobrazení $f: \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$ takto:

Je-li $I \in \mathcal{S}$ otevřený interval, pak $f(I) \in \mathbb{Q}$ definujme jako nějaké racionální číslo, které leží v intervalu I, tzn. $f(I) \in I$.
Díky disjunktnosti intervalů v systému $\mathcal{S}$ snadno dostaneme, že zobrazení f je prosté $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ TVRZENÍ. $\square$

VĚTA

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak množina

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

je nejvýše spočetná.

DŮKAZ

Stačí, když ukážeme, že množina

$$M_{max.} = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ má v bodě } x \text{ ostré lok. maximum}\}$$

je nejvýše spočetná.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu

$$M_n = \{x \in \mathbb{R} : (\forall y \in \mathbb{R}, 0 < |y - x| < \tfrac{1}{n}) : f(y) < f(x)\}.$$

Pak zřejmě

$$\boxed{M_{max.} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n.}$$

[z definice ostrého lok. maxima]

Proto stačí ukázat, že každá z množin M_n je nejvýše spočetná.

Definujme zobrazení, které každému $x \in M_n$ přiřadí otevřený interval $\boxed{\left(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}\right).}$

Ukážeme, že platí implikace

$$x, y \in M_n, x \neq y \implies$$

$$\Longrightarrow \left(x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}\right) \cap \left(y-\frac{1}{2n}, y+\frac{1}{2n}\right) = \emptyset.$$

Kdyby byl průnik $\left(x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}\right) \cap \left(y-\frac{1}{2n}, y+\frac{1}{2n}\right)$ neprázdný, muselo by nutně platit

$$\boxed{0 < |y-x| < \frac{1}{n}.}$$

$x \in M_n$ $\qquad$ $y \in M_n$

$$\boxed{f(y) < f(x)} \qquad \boxed{f(x) < f(y)},$$

což by byl spor.

To ale znamená, že jsme namapovali množinu M_n na systém po dvou disjunktních otevřených intervalů, který musí být nejvýše spočetný. [příslušné zobrazení je prosté] $\square$

POZNÁMKA – Pro neostré extrémy podobná věta neplatí.

VĚTA

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak je množina

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to x-} f(y) \neq \lim_{y \to x+} f(y) \right\}$$

[V bodě x existují obě jednostranné limity a jsou různé.]

nejvýše spočetná.

DŮKAZ

Stačí ukázat, že množina

$$M_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to x-} f(y) < \lim_{y \to x+} f(y) \right\}$$

je nejvýše počitatelná.

Definujme pro každé $r \in \mathbb{Q}$ množinu

$$M_r = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to x-} f(y) < r < \lim_{y \to x+} f(y) \right\}.$$

Jistě $\boxed{M_1 = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} M_r}$, a proto stačí ukázat, že každá z množin M_r je nejvýše spočetná.

Každému $x \in M_r$ lze (plyne z def. limity) přiřadit interval $(x, x+\delta_x)$ tak, aby $(\forall y \in (x, x+\delta_x)) : f(y) > r$. ⊛

Ukážeme, že různým číslům z M_r jsou takto přiřazeny disjunktní intervaly.

Nechť např. $x_1, x_2 \in M_r$, $x_1 < x_2$ a intervaly $(x_1, x_1+\delta_{x_1})$, $(x_2, x_2+\delta_{x_2})$ nejsou disjunktní.

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_1 < x_2 < x_1 + \delta_{x_1}.}$$

$x_1 \in M_r$, ⊛

$$\Downarrow$$

$\lim_{y \to x_2-} f(y) \geq r$, což je spor s tím, že $x_2 \in M_r$.

Množinu M_r máme tedy namapovanou na systém po dvou disjunktních otevřených intervalů $\Longrightarrow$ TVRZENÍ.

[příslušné zobrazení je prosté]

□

DŮSLEDEK

Je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotónní na $\mathbb{R}$, pak množina jejích bodů nespojitosti je nejvýše spočetná.

DŮSLEDEK

Je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní na intervalu I, je množina $M = \{x \in I : \text{neexistuje } f'(x)\}$ nejvýše spočetná.

VĚTA

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I a existuje nejvýše spočetná množina $A \subseteq \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall x \in \operatorname{int} I \setminus A): f'(x) > 0.$$

Pak je f rostoucí na intervalu I.

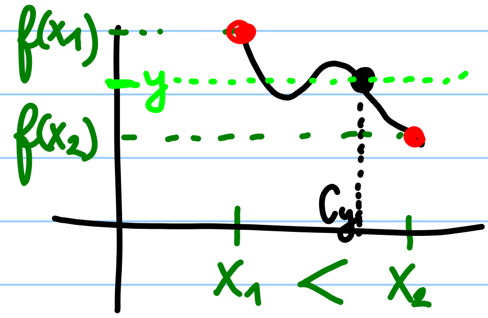
[$A = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow$ standardní věta z analýzy]

DŮKAZ

Ukážeme nejprve, že f musí být neklesající na I.

Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovala čísla $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, taková, že

$$\boxed{f(x_1) > f(x_2).}$$



Každému $y \in (f(x_2), f(x_1))$ přiřadíme bod $c_y \in \langle x_1, x_2 \rangle$ předpisem

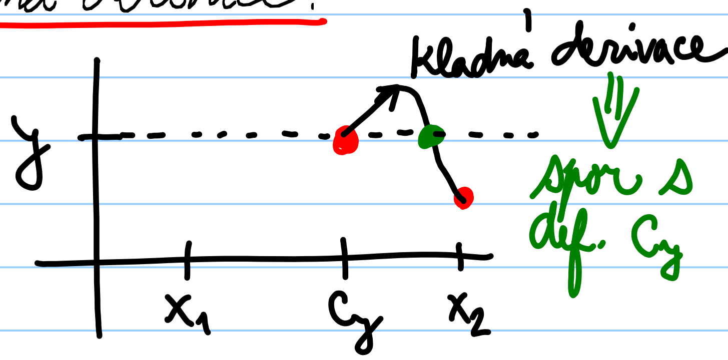
$$c_y = \sup \{ x \in \langle x_1, x_2 \rangle : f(x) = y \}.$$

Ze spojitosti f plyne $\boxed{f(c_y) = y}$, a proto zobrazení

$$\boxed{y \longmapsto c_y \quad \text{je prosté.}}$$

Navíc $\boxed{c_y \in (x_1, x_2)}$.

Je jasné (z definice derivace), že v bodě c_y nemůže být kladná derivace.



Protože $c_y \in \operatorname{int} I$, je jasné, že $\boxed{c_y \in A}$.

Máme tedy prosté zobrazení intervalu $(f(x_2), f(x_1))$ do množiny A.

[A je nejvýše spočetná]

$\Downarrow$

$(f(x_2), f(x_1))$ je nejvýše spočetná množina $\Rightarrow$ SPOR.

Právě jsme dokázali, že za uvedených předpokladů je funkce neklesající.

Kdyby nebyla rostoucí na I, musel by existovat interval $J \subseteq I$, na kterém je f konstantní, což by byl spor s předpoklady věty, neboť interval J je nespočetná množina a

$$(\forall x \in \operatorname{int} J) : f'(x) = 0 .$$

□

VĚTA

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I a existuje nejvýše spočetná množina $A \subseteq \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall x \in \operatorname{int} I \setminus A) : f'(x) \geq 0 .$$

Pak je f neklesající na intervalu I.

DŮKAZ

Pokud bychom se snažili větu dokázat podobně jako větu předchozí, narazili bychom! [rozmyslete si, kde]

Větu dokážeme s pomocí jednoduchého triku.

Pro každé $\varepsilon > 0$ definujme funkci f_ε předpisem

$$\boxed{f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x.}$$

PAK

- f_ε je spojitá na I,
- $f'_\varepsilon(x) = f'(x) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{int} I \setminus A$.

Podle předchozí věty je (pro každé $\varepsilon > 0$) funkce f_ε rostoucí na I, tzn. platí

$$(\forall x, y \in I,\ x < y): \quad f_\varepsilon(x) < f_\varepsilon(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) + \varepsilon x < f(y) + \varepsilon y$$

$$\Downarrow \ \varepsilon \to 0+$$

$$f(x) \leq f(y).$$

$\square$

DŮSLEDEK

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I a existuje nejvýše spočetná množina $A \subseteq \mathbb{R}$ taková, že

$$(\forall x \in \operatorname{int} I \setminus A): \quad f'(x) = 0.$$

Pak je f konstantní na intervalu I.

POZNÁMKA

Kdybychom uvažovali místo spočetné množiny A množinu nulové (Lebesgueovy) míry, výše uvedené tvrzení by již pravdivé nebylo. Protipříkladem by byla Cantorova stupňovitá funkce, která má derivaci nulovou skoro všude, ale není konstantní. Vše je způsobeno tím, že Cantorova funkce není absolutně spojitá.

CVIČENÍ

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce.
Dokažte, že množina

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{existuje } \lim_{y \to x} f(y) \text{ a platí } \lim_{y \to x} f(y) \neq f(x) \right\}$$

[body odstranitelné nespojitosti]

je nejvýše spočetná.

LITERATURA

[1] VÍTĚZSLAV NOVÁK: DIFERENCIÁLNÍ POČET V $\mathbb{R}$, STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ, PRAHA, 1985.