Katedra aplikované matematiky

OSMA

# OBČASNÝ SEMINÁŘ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

PETR VODSTRČIL

21. 11. 2017

# FAKTORIÁLY
## A NUMERICKÁ INTEGRACE

**VĚTA**

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.}$$

**DŮKAZ**

$$\boxed{\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \cdot (n-1) \cdot n \\ n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \ldots \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}} \quad \text{vynásobíme}$$

$$\Longrightarrow (n!)^2 = \underbrace{(1 \cdot n)}_{\overset{AG}{\leq} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \cdot \underbrace{(2 \cdot (n-1))}_{\overset{AG}{\leq} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \cdot \ldots \ldots \cdot \underbrace{(n \cdot 1)}_{\overset{AG}{\leq} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \Longrightarrow \boxed{n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.}$$

K důkazu druhé nerovnosti si stačí uvědomit, že

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) : \quad i \cdot (n+1-i) \geq n,$$

Dkn.
$$\left.\begin{aligned} 1\cdot n &\geq n \\ 2\cdot(n-1) &\geq n \\ &\vdots \\ n\cdot 1 &\geq n \end{aligned}\right\} \Rightarrow (n!)^2 \geq n^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n! \geq n^{\frac{n}{2}}.}$$

$\square$

Výše uvedené odhady faktoriálu jsou ale dosti hrubé. Nyní se je pokusíme vylepšit.

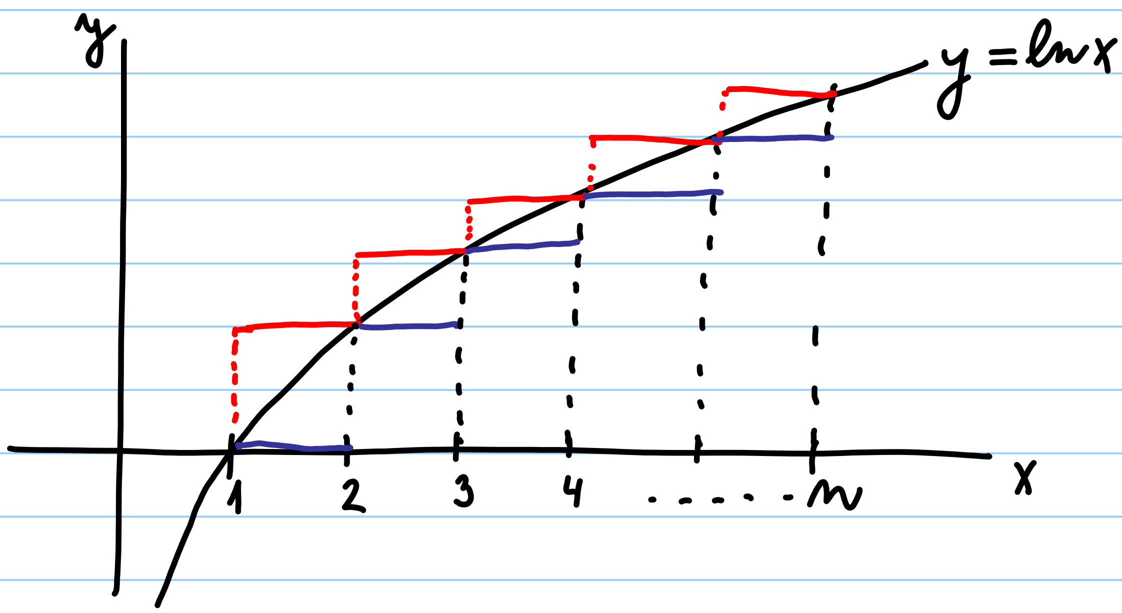
Uvědomme si, že

$$\boxed{\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n.}$$

[Faktoriál bude souviset s $\int_1^n \ln x \, dx$.]

Platí, že

$$\int_1^n \ln x \, dx \overset{\text{per-partes}}{=} \Big[x \ln x - x\Big]_1^n = n \ln n - n + 1.$$



Zřejmě platí

$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right)$:

$$\underbrace{\ln 1 + \dots + \ln(n-1)}_{\ln[(n-1)!]} \leq \int_1^n \ln x \, dx \leq \underbrace{\ln 2 + \dots + \ln n}_{\ln(n!)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln[(n-1)!] \leq \underbrace{n \ln n - n + 1}_{\ln\left[e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right]} \leq \ln(n!)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(n-1)! \leq e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!}$$

[platí i pro $n=1$]

$$\Downarrow$$

**VĚTA**

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

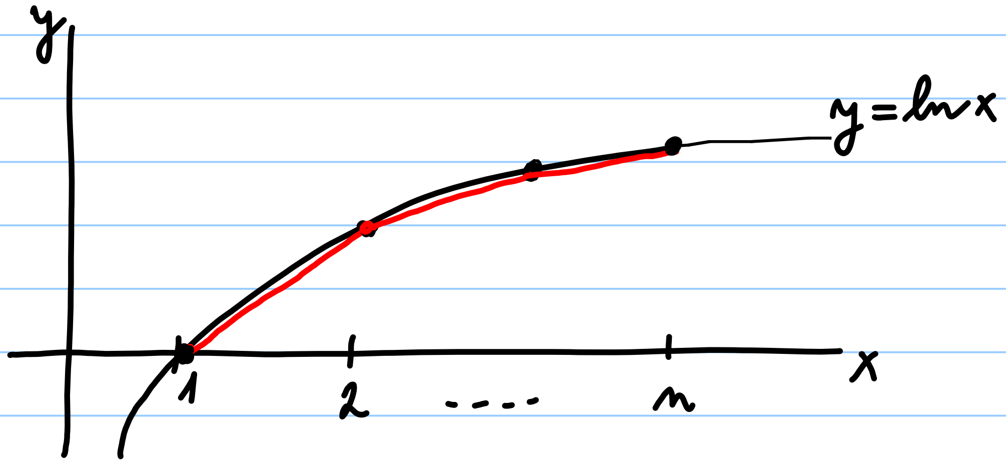
$$\boxed{e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n.}$$

Ukážeme si, že tyto odhady lze dále vylepšovat.

4

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Počítejme integrál $\int_1^n \ln x\,dx$ lichoběžníkovým (složeným) pravidlem.




Protože je logaritmus konkávní funkce, zřejmě bude platit

$$\underbrace{n\ln n - n + 1}_{\ln\left[e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]} = \int_1^n \ln x\,dx \geq \overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln(n-1) + \tfrac{1}{2}\ln n}_{\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right)}}^{\text{lich. pravidlo}}$$

$\Downarrow$ [platí i pro $n=1$]

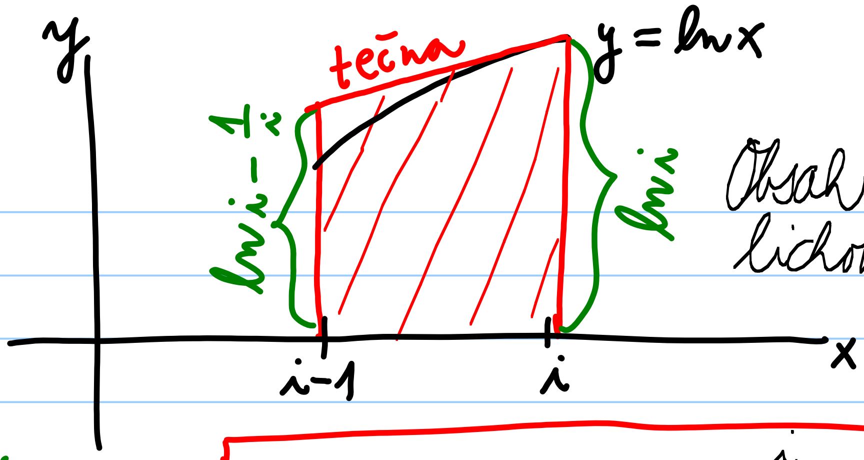
## VĚTA

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}):\quad n! \leq e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}.}$$

[vylepšený horní odhad]

Nyní vylepšíme i dolní odhad faktoriálu.

[Pro $i \in \{2,\ldots,n\}$ uvažujme interval $\langle i-1, i\rangle$ a na něm funkci $y = \ln x$.]




Obsah červeně vyšrafovaného lichoběžníku je $\boxed{\ln i - \frac{1}{2i}}$.

Konkávnost logaritmu $\Longrightarrow$

$$\boxed{\ln i - \frac{1}{2i} \geq \int_{i-1}^{i} \ln x \, dx.}$$

Sečtením dostaneme

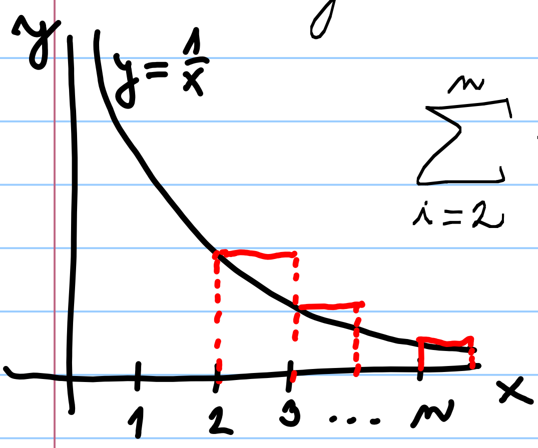
$(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ :

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{n}\left(\ln i - \frac{1}{2i}\right)}_{\ln(n!) - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}} \geq \int_{1}^{n} \ln x \, dx = \underbrace{n \ln n - n + 1}_{\ln\left[e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]}.$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\ln(n!) \geq \ln\left[e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}.} \quad (*)$$

Zkusme ještě odhadnout výraz $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$.




$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \geq \int_{2}^{n+1}\frac{1}{x}\,dx \geq \int_{2}^{n}\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \ln\frac{n}{2}.$$

Z nerovnosti ⊛ pak obdržíme

$$\ln(n!) \geq \underbrace{\ln\left[e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] + \frac{1}{2}\ln\frac{n}{2}}_{\ln\left[\frac{e}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}\right]}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n! \geq \frac{e}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}\,.}$$

[opět platí i pro $n=1$]

Dostáváme tedy následující větu.

**VĚTA**

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\boxed{\frac{e}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n} \leq n! \leq e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}\,.}$$

Jinak zapsáno:

$$\boxed{\frac{e}{\sqrt{2}} \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}} \leq e\,.} \qquad ⊛$$

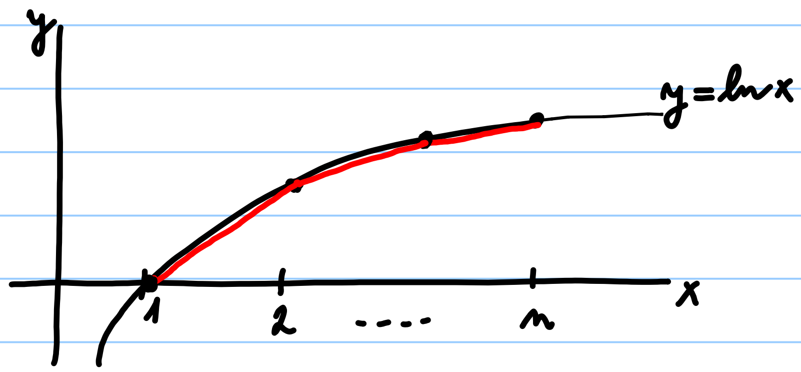
Ukázali jsme, že posl. $a_n \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}}$ je omezená (kladnými konstantami $\frac{e}{\sqrt{2}}$ a $e$).

To nám vlastně říká, že $\boxed{n!}$ a $\boxed{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}$ rostou řádově stejně rychle.

Nyní ukážeme, že posloupnost $a_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}$ je dokonce konvergentní.

K tomu stačí ukázat, že $(a_n)$ je monotónní.

Vraťme se zpět k lichoběžníkovému pravidlu




Je jasné, že posloupnost

$$b_n \overset{\text{def.}}{=} \int_1^n \ln x\, dx - \left[\tfrac{1}{2}\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln(n-1) + \tfrac{1}{2}\ln n\right]$$

je rostoucí (opět konkávnost logaritmu).

Zároveň víme, že

$$b_n = \underbrace{n\ln n - n + 1}_{\ln\left[e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]} - \ln\frac{n!}{\sqrt{n}} =$$

$$= \ln\left[\frac{e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}}{n!}\right] \quad \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ posloupnost $\left\{\dfrac{e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je také rostoucí $\Rightarrow$ posloupnost $a_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}}$ musí být klesající.

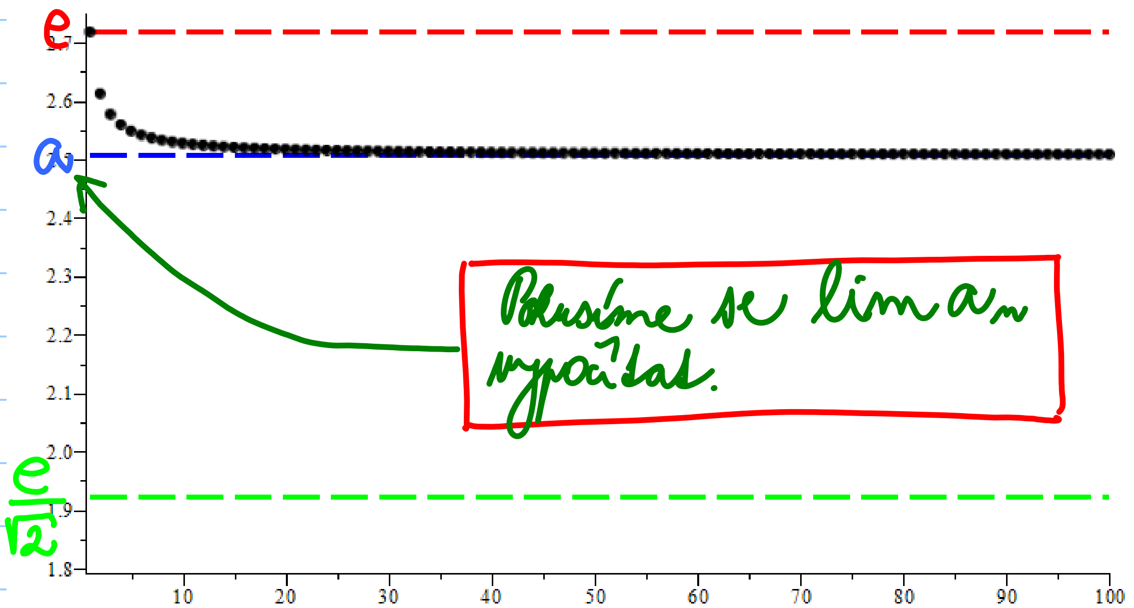
Odtud máme, že $(a_n)$ je konvergentní.

Přesněji: [vzhledem ke vztahu ⊛]

$$\boxed{\lim a_n \overset{\text{ozn.}}{=} a \in \mathbb{R}^+.}$$

[dokonce víme, že $a \in \left\langle \frac{e}{\sqrt{2}}, e \right\rangle$]

GRAF $(a_n)$:




K výpočtu $\lim a_n$ využijeme tzv. Wallisovu formuli.

# WALLISOVA FORMULE

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ počítejme integrál

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx.}$$

Zřejmě

$$I_0 = \int_0^{\pi} 1 \, dx = \pi \quad , \quad I_1 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2.$$

Pro $n \geq 2$ počítejme metodou per-partes:

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & v' = \sin x \\ u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{\left[ -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \right]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx =$$

$$= (n-1) \cdot \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= (n-1) \cdot \left[ \int_0^{\pi} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx \right] = (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n).$$

Máme tedy: $\quad (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2):$

$$\boxed{I_n = (n-1)\cdot(I_{n-2} - I_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}.}$$ (rekurentní vztah)

Platí tedy

$I_0 = \pi$ $\qquad$ $I_1 = 2$

$I_2 = \pi\cdot\frac{1}{2}$ $\qquad$ $I_3 = 2\cdot\frac{2}{3}$

$I_4 = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ $\qquad$ $I_5 = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$

$I_6 = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$ $\qquad$ $I_7 = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}$

$\vdots$

$$\boxed{I_{2n} = \pi\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n},\quad I_{2n+1} = 2\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.}$$

$(n\in\mathbb{N})$

Zároveň platí

$$(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})(\forall x\in\langle 0,\pi\rangle):\ \sin^n x \geq \sin^{n+1} x$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) : \quad I_n \geq I_{n+1}.}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\pi \cdot \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}}_{I_{2n}} \geq \underbrace{2 \cdot \frac{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}}_{I_{2n+1}} \geq \underbrace{\pi \cdot \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)}}_{I_{2n+2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\downarrow \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \geq \frac{2\cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)\cdot(2n+1)} \geq \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}}_{\downarrow \frac{\pi}{2}} \qquad (**)$$

Odtud

$$\frac{\pi}{2} = \lim \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right],$$

tzn.

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots\ldots}$$

(Wallisova formule – r. 1655)

Nám se bude Wallisova formule hodit v jiném tvaru. Ze vztahu (**) plyne

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^2}{[3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)]^2 \cdot (2n+1)} =$$

$$= \lim \frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2 \cdot (2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{[3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)]^2\cdot(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2\cdot(2n+1)} =$$

$$= \lim \frac{2^{4n}\cdot (n!)^4}{[(2n)!]^2\cdot (2n+1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim \frac{2^{4n}\cdot (n!)^4}{n\cdot [(2n)!]^2} = \pi.} \quad (W)$$

[Tvar, který se bude hodit.]

Nyní se vrátíme zpět k posloupnosti

$$\boxed{a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}}.}$$

Víme, že $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{n! = a_n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}.} \quad (**)$$

Pak (podle W a ✱✱) máme

$$\pi = \lim \frac{\cancel{2^{4n}} \cdot a_n^4 \cdot \cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}} \cdot \cancel{n^2}}{\cancel{n} \cdot a_{2n}^2 \cdot \cancel{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}} \cdot 2\cancel{n}} =$$

$$= \lim \frac{a_n^4}{2a_{2n}^2} \quad a_n^4 \to a^4,\ a_{2n}^2 \to a^2 \quad \overset{[a\neq 0]}{=} \frac{a^2}{2} \overset{[a>0]}{\Longrightarrow} \boxed{a = \sqrt{2\pi}.}$$

To znamená, že

$$\lim \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Proto platí:

**VĚTA (STIRLINGOVA FORMULE)**

$$\boxed{\lim \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1.}$$

$$\left[ n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \right] \quad ✱$$

**POZNÁMKA**

Vzhledem k tomu, že $(a_n)$ je klesající, máme dokonce

$$\boxed{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} \searrow 1.}$$

# ZPŘESNĚNÍ STIRLINGOVY FORMULE:

Lze ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

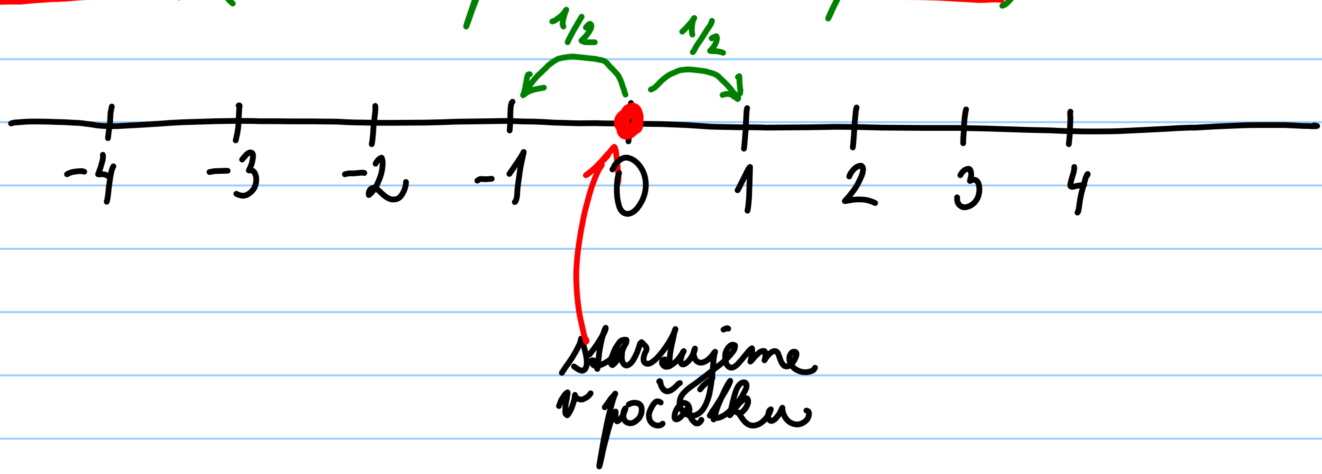
$$\boxed{e^{\frac{1}{12n+1}} \leqslant \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} \leqslant e^{\frac{1}{12n}}.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}} \quad (**)$$

| $n$ | rel. chyba při výpočtu $n!$ pomocí (*) | rel. chyba při výpočtu $n!$ pomocí (**) |
|---|---|---|
| 5 | $-1{,}65\,\%$ | $2{,}2 \cdot 10^{-3}\,\%$ |
| 10 | $-0{,}83\,\%$ | $2{,}8 \cdot 10^{-4}\,\%$ |
| 15 | $-0{,}55\,\%$ | $8{,}2 \cdot 10^{-5}\,\%$ |
| 20 | $-0{,}42\,\%$ | $3{,}5 \cdot 10^{-5}\,\%$ |
| 50 | $-0{,}17\,\%$ | $2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\%$ |
| 100 | $-0{,}08\,\%$ | $2{,}8 \cdot 10^{-7}\,\%$ |
| 1000 | $-0{,}008\,\%$ | $2{,}8 \cdot 10^{-10}\,\%$ |

## PROBLÉM (náhodná procházka na přímce)




S pravděpodobností $1/2$ skočíme doprava a s pravděpodobností $1/2$ uděláme krok doleva.

## ÚLOHA

Vypočtěte a odhadněte pravděpodobnost $p$, že po $2n$ krocích skončíme opět v počátku.

## ŘEŠENÍ

Je jasné, že

$$\boxed{p = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}.}$$

To znamená:

$$p = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \approx$$

[Použijeme $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$.]

$$\approx \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{2^{2n} \cdot \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}\right]^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{(2n)^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}} \cdot \sqrt{4\pi n}}{\cancel{2^{2n}} \cdot \dfrac{\cancel{n^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}} \cdot 2\pi n} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

[řádový odhad]

Pokud by například bylo $n = 100$, pak

$$p = \frac{\binom{200}{100}}{2^{200}} = \frac{\overset{59 \text{ cifer}}{90548514656103281165404177077484163874504589675413336841320}}{\underset{61 \text{ cifer}}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376}}$$

$$\doteq 0{,}05634847900 9.$$

S použitím formulky $p \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ bychom dostali

$$p \doteq 0{,}05642.$$

## POZNÁMKA

Pokud bychom uvažovali zpřesněnou Stirlingovu formuli $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/12n}$, dostali bychom

$$p = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} \approx \frac{1}{e^{\frac{1}{8n}} \cdot \sqrt{\pi n}},$$

což by po dosazení $n = 100$ dávalo

$$p \doteq 0{,}056348487.$$

# PROBLÉM K ZAMYŠLENÍ

- náhodná procházka v rovině

?

## ÚLOHA

Mějme $2n$ čísel a $n$ lidí.
Každý si vytáhne jedno číslo a vrátí ho zpět do osudí.
Jaká je pravděpodobnost, že bude vytaženo $n$ různých čísel?

## ŘEŠENÍ

$$p = \frac{1}{(2n)^n} \cdot 2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) =$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \cdot (2n)^n} \approx \qquad \left[ n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \right]$$

$$\approx \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (2n)^n} =$$

$$= \frac{\frac{2^{\cancel{2}n} \cdot \cancel{n^{2n}}}{(e^n)^{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{\cancel{2\pi} \cdot 2\cancel{n}}}{\frac{\cancel{n^n}}{\cancel{e^n}} \cdot \sqrt{\cancel{2\pi n}} \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{n^n}} =$$

$$= \boxed{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^n}$$

Například pro $n = 10$ dostáváme

$$p = \frac{20!}{10! \cdot 20^{10}} = 0{,}0654729075.$$

S použitím přibližné formulky $\otimes$ obdržíme

$$p \approx \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{10} \doteq 0{,}0657.$$

# LITERATURA


[1] K. CONRAD,
STIRLING'S FORMULA,
HTTP://WWW.MATH.UCONN.EDU/~KCONRAD/BLURBS

[2] J. MATOUŠEK, J. NEŠETŘIL,
KAPITOLY Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY,
UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE, NAKL. KAROLINUM,
PRAHA, 2002

[3] M. ROKYTA,
ELEMENTÁRNÍ ODVOZENÍ STIRLINGOVY FORMULE,
HTTP://WWW.KARLIN.MFF.CUNI.CZ/~ROKYTA/VYUKA